אקדמון
בית ההוצאה של הסתדרות הסטודנטים של האוניברסיטה העברית

אריאל רובינשטיין

פרקים נבחרים במתמטיקה לכלכלנים

ערך

צבי ספרא

ירושלים תש"מ

אריאל רובינשטיין

פרקים נבחרים במתמטיקה לכלכלנים

ערך צבי ספרא

ירושלים, תשי"מ

הקדמה

החומר הנלמד בחלקם הראשון והשלישי של הקורסים "מתמטיקה לכלכלנים ב' " ו"השלמות במתמטיקה לכלכלנים" מפוזר בספרים רבים וברמה ובהיקף שאינם מתאימים לתלמידי הקורסים. תפקידה העיקרי של חוברת זו הוא למלא במידת מה את החלל ולשמש חומר עזר למשתתף בקורס.

בד בבד תוכל החוברת להועיל לתלמידי החוג לכלכלה המעוניינים להשלים באופן עצמאי את הידע המתמטי שלהם בנושאים הנדונים בחוברת.

החוברת מחולקת לשני חלקים. חלק א' מתאים לחלקם הראשון של הקורסים הנ"ל ובו ארבעה פרקים. שלושת הראשונים מציגים מושגים מתמטיים ובאחרון מובאים שימושים כלכליים למושגים אלה. חלק ב' של החוברת מתאים לחלקם השלישי של הקורסים, ובו שישה פרקים.

הראשון סוקר מושגים מתמטיים הדרושים לכל אורך החלק, ואילו באחרים יש חומר מתמטי ונושאים כלכליים הקשורים בו. חמשת הפרקים האחרונים הינם במידה רבה בלתי תלויים זה בזה, וכך יכול הקורא לקרוא פרק מבלי לעבור תחילה על הפרקים הקודמים לו.

רוב ההוכחות שבחוברת מובאות בצורה מתמטית מדוייקת, אך במספר פעמים הסתפקנו בהבאת משפטים ללא הוכחה.

למרות מאמצינו, יתכן שבחוברת נפלו שגיאות עניניות או טעויות דפוס. נודה לכל המעיר לנו עליהן.

החוברת מבוססת על הרצאות שנתנו בשנת תשל"ז בקורס "מתמטיקה לכלכלנים ב' ".

תודתנו נתונה ליונתן סטופ אשר היה שותף בעיצובו של הקורס הנ"ל וכן לחוג לכלכלה אשר תמך בהוצאת החוברת לאור.

אריאל רובינשטיין, צבי ספרא

תוכן העניינים

חלק א

חלק ב

תוכן העניינים (נושאים כלכליים מסומנים ב-*)

<u>חלק א'</u>

פרק 1 - ה ק ב ו צ ה

1.1 מושג הקבוצה

באמרנו "קבוצה" אנו מתכוונים לישות שהינה "אוסף של עצמים". העצמים המרכיבים את הקבוצה יכולים להיות מוחשיים (ספרים) או מופשטים (מספרים), אך מושג הקבוצה הינו מושג מופשט אשר מצרף את העצמים למכלול אחד.

לדוגמה: קבוצת הכדורגל של בית"ר ירושלים מורכבת מאנשים בודדים אך בהתייחסותנו ל"קבוצת הכדורגל של בית"ר ירושלים" אנו מתבוננים בהם כמצטרפים לישות חדשה אחת. עקומת תמורה של משק הינה אוסף של צרופי ייצור אפשריים. נתבונן בה משנרצה להתבונן במצבו הטכנולוגי של המשק.

אם ברצוננו להציג תורה מתמטית מדויקת ומבוססת היטב, נראה לכאורה שלא נוכל להגדיר קבוצה כ"אוסף של עצמים", מכיוון שבהגדרה זו אנו משתמשים במלה "אוסף" אשר היא מלה נרדפת לזו המוגדרת. אף-על-פי-כן לא נאמר על קבוצה אלא את מה שאמרנו בפתיחת הדברים (דהיינו, שקבוצה הינה "אוסף של עצמים"), ובעיון נוסף אין הדבר צריך להפתיענו. גם בשטחים אחרים של המתמטיקה נזקקנו למושגים בסיסיים שלא היו מוגדרים קודם לכן ואשר היוו את אבני היסוד של התורה כולה. כך למשל בססנו את הגיאומטריה על מושגי "הנקודה", "הקו" ו"החלת נקודה בקו", וכשהתיחסנו למושגים אלו הסתפקנו בתיאור שנתן שימוש לדמיון האנושי. כאן ושם אנו נעזרים בתפיסתנו המופשטת: שם באינטואיציה הגיאומטרית וכאן ביכולת הצרוף של עצמים לישות חדשה אחת.

מושג בסיסי "בלתי מוגדר" נוסף בו שנשתמש בסעיף זה הינו "השתייכות לקבוצה נתונה". מושג זה מבטא את היחס הבסיסי בין אבר וקבוצה, ומסומן ב- "$\in$".

"$a \in A$" משמעו "a הינו אבר בקבוצה A".

"$a \notin A$" משמעו "a איננו אבר בקבוצה A".

נתבונן עתה בשורה של קבוצות:

(א) הקבוצה המכילה את המספרים 1 ו-17, את האות-ח ואת הפונקציה $\ell n\ x$.

זוהי קבוצה סופית המכילה בדיוק ארבעה עצמים והממחישה שלא חייב להיות קשר "ברור" בין אברי הקבוצה.

(ב) קבוצת הנעלים השמאליות על כדור הארץ.

לפנינו קבוצה שהינה מן הסתם גדולה מאד אך...סופית.

(ג) קבוצת הפתרונות של המשוואה $x^2 - 1 = 0$.

גם קבוצה זו סופית. היא מכילה את המספרים 1 ו- 1- בלבד.

(ד) קבוצת הישרים העוברים דרך הראשית.

קבוצה זו הינה אינסופית.

(ה) קבוצת הקבוצות שהגדרנו עד כאן.

אבריה של קבוצה זו הינם <u>קבוצות</u>. לפנינו דוגמה ראשונה ליכולת להתבונן בעצם גם כקבוצה של אברים, וגם כאיבר בודד במכלול אחר. מספר העצמים בקבוצה זו הינו ארבעה, וזאת למרות שאחד מאברי הקבוצה הינו קבוצה אינסופית.

(ו) קבוצת הכוכבים עליהם יש יצורים חיים. על קבוצה זו נוכל רק לאמר שהיא מכילה לפחות אבר אחד. אמנם איננו יודעים <u>לקבוע</u> האם כוכב מסוים שייך לקבוצה, אך למרות אי-ידיעתנו, לגבי כל כוכב <u>מתקיים</u> - הכוכב שייך לקבוצה, או, הכוכב איננו שייך לקבוצה.

(ז) קבוצת המספרים הטבעיים (שלמים וחיוביים) n עבורם יש מספרים שלמים שונים מאפס x,y,z כך ש- $x^n + y^n = z^n$. קבוצה זו קשורה להשערתו הידועה של פרמה. לפי השערה זו הקבוצה מכילה את המספרים 1 ו- 2 בלבד ($3^2 + 4^2 = 5^2$, $1^1 + 2^1 = 3^1$).

השערת פרמה נחקרה באופן אינטנסיבי ועדיין אין בידינו תשובה ביחס לנכונותה. למרות זאת, אי-ידיעתנו אינה פוגעת ב"קיומה" של הקבוצה, שכן כל מספר מקיים אחת משתים: הוא שייך לקבוצה, או, הוא איננו שייך לקבוצה.

(ח) קבוצת הסלים המורכבים משתי סחורות שמחיריהן P_x ו- P_y וערכן I. קבוצה זו ידועה בכלכלה בתור "קו התקציב" של צרכן בעל הכנסה I במערכת המחירים $P_{x_1}\ P_y$.

(ט) קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים הגדולים מ-3. בקבוצה זו אינסוף אִיברים.

(י) הקבוצה המכילה את המספר 1 ואת הקבוצה שאיברה היחיד 17. בקבוצה זו שני אברים, האחד מספר והשני קבוצה. שוב מומחש שלא חייב להיות קשר בין אברי קבוצה.

קבוצה נסמן באמצעות "{ }" כלומר על-ידי סוגרים מסולסלים. בין הסוגרים נציין את אברי הקבוצה. קיימים מספר אופנים לציון אברי קבוצה מסוימת והעיקריים הם:

(1) רישום כל אברי הקבוצה.

את הקבוצות (א),(ג),ו-(י) נוח לרשום באופן זה:

$\{x\ \ell n,\ ח\ ,17,\ 1\}$, $\{1,-1\}$, $\{1,\{17\}\}$.

(2) רישום מספר איברים מהם יכול הקורא ל"הסיק" על כלל המגדיר את אברי הקבוצה.

למשל את הקבוצה (ט) נוכל לרשום כך - $\{4,6,8,10\ldots\}$

(3) ציון תכונה המאפיינת את אברי הקבוצה (צורת רישום זו היא הנפוצה ביותר) -

{x מקיים P|x}

ומשמעו - קבוצת האברים X המקיימים תכונה P.

כך נציין את הקבוצה (ז) - {n טבעי המקיים שיש x,y,z שלמים שונים מאפס | n
כך ש- $x^n + y^n = z^n$}

את הקבוצה (ח) - $\left\{(x,y) \mid \quad P_x\cdot X + P_y\cdot y = I \quad \begin{matrix} x\geq 0 \\ y\geq 0\end{matrix}\right\}$

ואת הקבוצה (ט) - {n טבעי זוגי ו- n > 3 | n}

את הקבוצה בדוגמה (ט) רשמנו בשני אופנים שונים. אופן ציון אברי הקבוצה נתון לבחירתנו ונעשה על-פי שיקולי נוחיות.

<u>הגדרה:</u> קבוצות A ו- B ייקראו <u>שוות</u> אם לכל איבר X מתקיים

$X \in A$ אםם (אם ורק אם) $X \in B$

(פורמלית ננסח זאת גם כך - $A = B \Leftrightarrow [X \in B \Leftrightarrow X \in A]$)

<u>דוגמאות:</u>

(א) $\{1,-1\} = \{x|x^2 - 1 = 0\}$

ברור כי אברי הקבוצה השמאלית שהם 1 ו- 1-, שייכים לקבוצה הימנית, אלא שזה עדיין אינו מבטיח את שוויון הקבוצות. יש לציין בנוסף שכל אבר בקבוצה הימנית (כלומר כל פתרון של המשוואה $x^2 - 1 = 0$) שייך לקבוצה השמאלית. במילים אחרות, לציין שאין פתרון של $x^2 - 1 = 0$ שאיננו 1 או 1-.

(ב) $\{1,2\} = \{1,1,2\}$

הקבוצות שוות למרות שבימנית רשום המספר 1 פעמיים.

(ג) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$

רישום אברי הקבוצה ב"סדר" שונה אינו "מקלקל" את שוויון הקבוצות.

(ד) נדגים הוכחה מורכבת יותר של שוויון שתי קבוצות.

תהיינה $B = \{n|$ 3 -ב 2 -המתחלק ב n טבעי$\}$ $A = \{n|$ 6-המתחלק ב n טבעי$\}$

<u>טענה:</u> $A = B$

<u>הוכחה:</u> יהא $n \in A$. יש m כך ש- $n = 6m$

לכן $n = 2(3m) = 3(2m)$

ולכן n מתחלק ב-2 וב-3. מכאן $n \in B$.

יהא $n \in B$. יש m ו- ℓ כך ש- $n = 2m = 3\ell$.

3 מחלק את n ולכן את $2m$.

לכן 3 מחלק את m ולפיכך יש k כך ש- $m = 3k$.

לכן $n = 2m = 2(3k) = 6k$,

ולכן n מתחלק ב-6. מכאן $n \in A$.

<u>הגדרה:</u> קבוצה ששום איבר אינו שייך אליה נקראת <u>קבוצה ריקה</u>.

את הקבוצה הריקה[1] נסמן ב- ϕ.

---

(1) השמוש במלים "הקבוצה הריקה" מחייב הוכחה שיש קבוצה ריקה יחידה. ואמנם אם A ו- B קבוצות ריקות, מכיוון שלכל X $X \notin A$ ו- $X \notin B$ נכון לומר ש- $X \in A$ אםם $X \in B$, ואזי $A = B$.

<u>דוגמאות:</u> $\{x|x^2 + 1 = 0\} = \phi$

$\{x|$ x אבר גדול ביותר $\} = \phi$ (לכל x $x < x + 1$)

$\{\phi\} \neq \phi$ כי $\phi \in \{\phi\}$.

<u>הגדרה:</u> קבוצה A תקרא <u>מוכלת</u> בקבוצה B אם לכל $X \in A$ מתקיים גם $X \in B$.

נסמן $A \subseteq B$ ונאמר גם ש- A קבוצה חלקית של B וש- B מכילה את A.

<u>הגדרה:</u> קבוצה A תקרא <u>מוכלת ממש</u> בקבוצה B אם $A \subseteq B$ ויש $b \in B$ כך ש- $b \notin A$.

נסמן $A \subset B$ או $A \subsetneqq B$.

<u>דוגמאות:</u> (א) $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$ אבל גם נכון ש- $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$.

(ב) $\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$ אבל $\{\{1,2\}\} \not\subseteq \{1,2\}$.

(ג) $\{$כדור הארץ$\} \subseteq \{X|$ X כוכב עליו יש חיים$\}$

במקרה זה איננו **יודעים** אם ההכלה הינה ממש או לא.

הטענות הבאות מביאות את התכונות העיקריות של "ההכלה":

<u>טענות:</u> לכל קבוצות A,B,C:

(1) $A \subseteq A$.

(2) אם $A \subseteq B$ ו $B \subseteq C$ אזי $A \subseteq C$.

(3) אם $A \subset B$ ו $B \subseteq C$ אזי $A \subset C$.

(4) אם $A \subseteq B$ ו $B \subseteq A$ אזי $A = B$.

(5) $\phi \subseteq A$.

<u>הוכחה:</u> (1) לכל $X \in A$, $X \in A$ לכן $A \subseteq A$.

(2) יהא $X \in A$

אזי $X \in B$ כי $A \subseteq B$

ולכן $X \in C$ כי $B \subseteq C$.

לכן כל אבר ב- A שייך גם ל- C, ומכאן $A \subseteq C$.

(3) $A \subset B$ ולכן בפרט $A \subseteq B$ לכן מ(2) $A \subseteq C$.

נותר להראות שיש איבר ב- C שאיננו ב- A.

$A \subset B$. לכן יש $b \in B$ ו- $b \notin A$.

b זה מקיים $b \in C$ (כי $B \subseteq C$) ולכן $b \in C$ ו- $b \notin A$, כנדרש.

(4) מיידי מהגדרת השוויון.

(5) צריך להוכיח ש- $X \in \phi \Rightarrow X \in A$.

משפט "אם...אז..." מתקיים אם הרישא והסיפא אמיתיים או אם הרישא שקרית.

הרישא כאן שקרית כי תמיד $X \notin \phi$, ולכן המשפט מתקיים.

<u>הגדרה:</u> קבוצת כל הקבוצות החלקיות של קבוצה A תקרא <u>קבוצת החזקה של A</u> ותסומן 2^A.

(זו אינה פעולת החזקה של מספרים.)

<u>דוגמה:</u> $A = \{1,2,3\}$

$$2^A = \{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$$

אנו רואים כי ב- 2^A יש $2^3 = 8$ איברים וזהו גם הטעם לשמה ולסימנה של קבוצת החזקה: אם ב- A n איברים אזי ב- 2^A 2^n איברים (זאת מכיוון שכל קבוצה חלקית מאופינת ע"י קביעה לגבי כל איבר אם הוא שייך לקבוצה או לא. כל שתי "קביעות" שונות מגדירות קבוצות שונות, ולהיפך, לכל שתי קבוצות שונות מתאימות קביעות שונות. לכן מספר ה"קביעות" שווה למספר התת-קבוצות והינו $2^n = 2\cdot\ldots 2$)

מהגדרותינו עד כאן אין כל מניעה שקבוצה תהיה שייכת לעצמה!

<u>דוגמה:</u> (א) נסמן ב- S את קבוצת כל הקבוצות, כלומר $S = \{X \mid X \text{ קבוצה}\}$

S עצמה קבוצה ולכן $S \in S$.

(ב) תהא T קבוצת כל הקבוצות הניתנות להגדרה בעזרת הא"ב העברי.

$T \in T$ כי... הרי הגדרנו אותה באמצעות הא"ב העברי.

שנים ספורות אחרי פרסום חיבורו הראשון של קנטור, מניח היסוד של תורת הקבוצות, פרסם הפילוסוף הנודע ברטנרד ראסל את הפרדוקס הבא, הקרוי על שמו, ואשר הצביע על הקושי בהגדרה ה"נאיבית" של מושגי הקבוצה והשייכות:

נתבונן בקבוצת כל הקבוצות אשר אינן מכילות עצמן כאיבר:

$$A = \{X \mid X \notin X\}$$

האם $A \in A$?

לא ייתכן ש- $A \in A$ שכן לפי הגדרת A נקבל כי A איננה שייכת ל- A !

מאידך גם לא ייתכן ש- $A \notin A$ שכן שוב, לפי הגדרת A, A שייכת ל- A . לכן לא מתקיים ש- $A \in A$ ולא מתקיים ש- $A \notin A$!!!

הפרדוקס של ראסל הוליד דיונים מפורטים במושג הקבוצה שיעדם היה למנוע את "הסתירה". לא נכנס כאן לדיונים אלו ורק נציין שהגבלת יחס השייכות באופן שכלל לא תהיה משמעות לאמירה $X \in X$ מספיקה כדי למנוע סתירות.

1.2 פעולות יסודיות בקבוצות

נתבונן בשלוש הקבוצות הבאות:

(א) קבוצת הסטודנטים הלומדים כלכלה או סטטיסטיקה.

(ב) קבוצת הסטודנטים הלומדים כלכלה וסטטיסטיקה.

(ג) קבוצת הסטודנטים הלומדים כלכלה ואינם לומדים סטטיסטיקה.

בהגדרת כל אחת מהקבוצות נעשה שימוש בשתי קבוצות:
קבוצת הסטודנטים הלומדים כלכלה ו- קבוצת הסטודנטים הלומדים סטטיסטיקה,אלא שהשימוש בקבוצות אלו שונה: ב-(א) אנו מצרפים את שתי הקבוצות, ב-(ב) אנו מתבוננים במשותף לשתי הקבוצות וב-(ג) אנו מתבוננים באברי הקבוצה האחת שאינם בשניה.

כללית, נגדיר עתה שלוש "פעולות" יסודיות בקבוצות - פעולות היוצרות קבוצה שלישית על בסיס שתי קבוצות "קודמות".

<u>הגדרות:</u> תהייה A ו- B קבוצות.
<u>האחוד</u> של A ו- B הינו קבוצת האברים הנמצאים ב- A או ב- B (כלומר ב- A, ב- B או בשתיהן). קבוצה זו מסומנת ב- $A \cup B$ ולפיכך -

$$A \cup B = \{a \mid a \in B \text{ או } a \in A\}$$

<u>החתוך</u> של A ו- B הינו קבוצת האברים הנמצאים גם ב- A וגם ב- B.

<u>החיתוך</u> של A ו- B הינו קבוצת האברים הנמצאים גם ב- A וגם ב- B.

החתוך מסומן על-ידי $A \cap B$ ולפיכך -

$$A \cap B = \{a \mid a \in B \text{ ו- } a \in A\}.$$

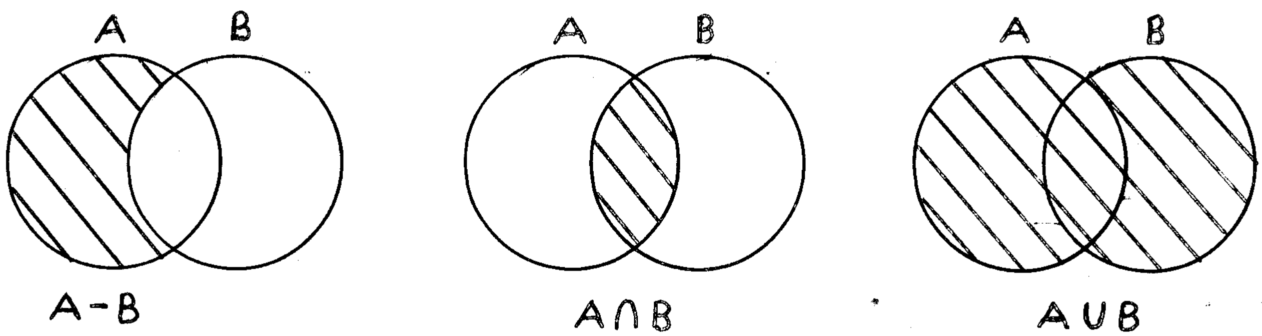
<u>ההפרש</u> בין A ל- B הינו קבוצת האברים הנמצאים ב- A ואינם נמצאים ב- B.

קבוצה זו מסומנת על-ידי $A - B$ ולפיכך -

$$A - B = \{a \mid a \in A\ ,\ a \notin B\}$$

<u>דוגמאות:</u>

(א) להמחשת הפעולות בקבוצות נוהגים להעזר ב"מעגלי ון". הקבוצות מצוינות על-ידי צורות גיאומטריות והקבוצה המוגדרת מצוינת על-ידי שטח מקווקו:



(ב) $A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,3,\pi\}$ קיים:

$A \cup B = \{1,2,3,\pi\}$ $A \cap B = \{2,3\}$ $A - B = \{1\}$ $B - A = \{\pi\}$

(ג) תהא A קבוצת השלמים האי-שליליים, כלומר $A = \{0,1,2\ldots\}$

ותהא B קבוצת השלמים האי-חיוביים, כלומר $B = \{\ldots,-2,-1,0\}$

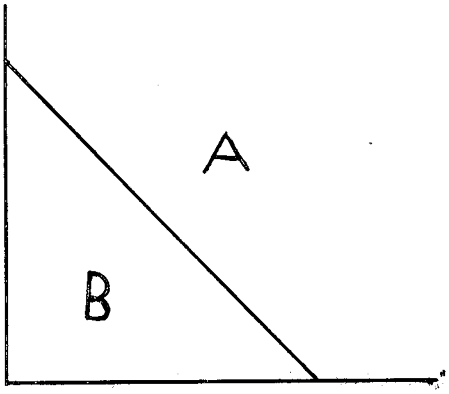
קיים:

$A \cup B = Z$ (כל השלמים)

$A \cap B = \{0\}$ (הקבוצה המכילה את האפס בלבד)

$A - B = \{1,2,3\ldots\}$ (השלמים החיוביים)

$B - A = \{-1,-2,-3\ldots\}$ (השלמים השליליים)



(ד) בהיות P_1 ו- P_2 מחירי שני מוצרים ו- I הכנסת פרט - תהיינה A ו- B הקבוצות הבאות:

$$A = \{(x_1,x_2)|p_1x_1 + p_2\cdot x_2 \geq I, x_1,x_2 \geq 0\}$$

$$B = \{(x_1,x_2)|p_1x_1 + p_2\cdot x_2 \leq I, x_1,x_2 \geq 0\}$$

קיים: $A \cup B$ הינו קבוצת כל הסלים האפשריים.

$A \cap B$ הינו קו התקציב.

$B - A$ הינו קבוצת הסלים אשר ניתן לקנותם בהוצאה ממש קטנה מ- I.

$A - B$ הינו קבוצת הסלים שניתן לקנותם בהוצאה ממש גדולה מ- I.

(ה) תהיינה: קב' הטבעיים הזוגיים = A   קב' הטבעיים האי-זוגיים = B.

קיים: $B - A = B$ $A - B = A$ $A \cap B = \phi$ $A \cup B = N$

<u>הגדרה:</u> קבוצות שחיתוכן ריק נקראות <u>זרות</u>. קבוצות שאינן זרות נקראות <u>חותכות</u>.

לעתים קרובות נהיה מעוניינים בקבוצת כל האברים האפשריים במסגרת דיון מסוימת. למשל, במסגרת תורת הצרכן אנו מתבוננים בקבוצת כל הסלים (R^2_+), ובמסגרת תורת המספרים בקבוצת המספרים הטבעיים. קבוצה כזו תיקרא קבוצה כוללת (אוניברסלית) ותסומן ב- Ω. למניעת בלבול יש לציין את הקבוצה הכוללת אליה מתייחסים בתחילת דיון.

<u>הגדרה:</u> תהא A קבוצה. הקבוצה <u>המשלימה</u> ל- A הינה קבוצת כל האברים (בקבוצה הכוללת) שאינם ב- A. הקבוצה המשלימה תסומן ב- A^c (או $-A$) ולפיכך -

$A^c = \Omega - A$.

ברור כי הקבוצה המשלימה תלויה בבחירת הקבוצה הכוללת אליה אנו מתייחסים. עבור שתי קבוצות כוללות שונות נקבל קבוצות משלימות שונות. לדוגמה: תהא A קבוצת הסטודנטיות במדעי-החברה. אם הקבוצה הכוללת היא קבוצת כל הסטודנטים בפקולטה אזי A^c הינה קבוצת הסטודנטים (הזכרים) בפקולטה. אך אם מסגרת הדיון היא כזו שהקבוצה הכוללת הרלונטית היא קבוצת כל הסטודנטיות באוניברסיטה אזי הקבוצה המשלימה A^c הינה קבוצת הסטודנטיות הלומדות בפקולטות אחרות בלבד.

שלושת הפעולות שהוגדרו - אחוד, חיתוך ומשלים מתאימות לשלוש הפעולות הבסיסיות של הלוגיקה: $\vee$ (או), $\wedge$ (ו), $\sim$ (שלילה). נשים לב שאנו משתמשים ב-או במובן הכולל (inclusive) - '$X \in A$ או $X \in B$' משמעו '$X \in A$ ו- $X \notin B$', או, '$X \notin A$ ו- $X \in B$' או, '$X \in A$ ו- $X \in B$'.

נביא עתה מספר רב של משפטים הנוגעים לפעולות שהוגדרו לעיל ונסתפק בהוכחת חלק מהם. רעיון ההוכחה של השאר זהה לזה של אלו שיוכחו.

בכל המשפטים A, B ו-C הינן קבוצות המוכלות בקבוצה כוללת כלשהי Ω.

<u>משפט 1</u>: (החוק הקומוטטיבי-החילופי)

א. $A \cap B = B \cap A$

ב. $A \cup B = B \cup A$

<u>הוכחת א.</u>: $X \in A \cap B$

אמם $X \in A$ ו- $X \in B$ (הגדרת $\cap$)

אמם $X \in B$ ו- $X \in A$ (זהות לוגית)

אמם $X \in B \cap A$ (הגדרת $\cap$)

ולכן מהגדרת שוויון קבוצות $A \cap B = B \cap A$.

<u>משפט 2</u>: (החוק הדיסטריבוטיבי-הפילוגי)

א. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ב. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

<u>הוכחת ב.</u>: $X \in A \cup (B \cap C)$

אמם $X \in A$ או $X \in B \cap C$ (הגדרת $\cup$)

אמם $X \in A$ או ($X \in B$ ו- $X \in C$) (הגדרת $\cap$)

אמם ($X \in A$ או $X \in B$) ו- ($X \in A$ או $X \in C$) (זהות לוגית)

אמם $X \in A \cup B$ ו- $X \in A \cup C$ (הגדרת $\cup$)

אמם $X \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (הגדרת $\cap$)

והמשפט נובע עתה מהגדרת שוויון קבוצות.

<u>דוגמה ל-2א.</u>: קבוצת הכדורים שהם גדולים וגם ירוקים או כחולים שווה לקבוצת הכדורים שהם גדולים וירוקים, או, גדולים וכחולים.

<u>משפט 3</u>:

א. $A \cap A = A$

ב. $A \cup A = A$

<u>הוכחת א.</u>: $X \in A$

אםם $X \in A$ ו- $X \in A$ (זהות לוגית)

אםם $X \in A \cap A$ (הגדרת $\cap$)

<u>משפט 4</u>: (החוק האסוציטיבי-הצרופי)

א. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ב. $(A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$

<u>הוכחת ב.</u>: $X \in (A \cup B) \cup C$

אםם $X \in A \cup B$ או $X \in C$ (הגדרת $\cup$)

אםם ($X \in A$ או $X \in B$), או $X \in C$ (הגדרת $\cup$)

אםם $X \in A$ או ($X \in B$ או $X \in C$) (זהות לוגית)

אםם $X \in A$ או $X \in B \cup C$ (הגדרת $\cup$)

אםם $X \in A \cup (B \cup C)$ (הגדרת $\cup$)

ושוב, המשפט נובע מהגדרת השוויון.

<u>הערה</u>: בזכות משפט 4 נוכל להשתמש בלי סכנת טעות בסמונים $A \cap B \cap C$ ו- $A \cup B \cup C$. ללא ציון הסוגרים המורים על סדר הפעולות.

<u>משפט 5</u>:

א. $A \cap \phi = \phi$

ב. $A \cup \phi = A$

<u>הוכחת א.</u>: $X \in A \cap \phi$

אםם $X \in A$ ו- $X \in \phi$ (הגדרת $\cap$)

משפט זה תמיד שקרי ולכן הוא שקול למשפט שקרי אחד - $X \in \phi$.

ושוב מהגדרת השוויון נובע ש- $A \cap \phi = \phi$.

<u>משפט 6</u>:

א. $A \cap \Omega = A$

ב. $A \cup \Omega = \Omega$

<u>דוגמה ל-6 א.</u>: בהיות Ω קבוצת כל בני האדם ו- A קבוצת השמנים אזי משמעות 6א. היא שקבוצת בני האדם השמנים שווה לקבוצת השמנים.

משפטים 7 ו-8 נקראים חוקי המשלים.

<u>משפט 7</u>:

א. $A \cap A^c = \phi$

ב. $A \cup A^c = \Omega$

<u>הוכחת א.</u>: $X \in A \cap A^c$

אמם $X \in A$ ו- $X \in A^c$ (הגדרת $\cap$)

$X \in A$ ו- $X \notin A$ (הגדרת A^c)

$X \in \phi$ (משפט ושלילתו תמיד שקרי, והגדרת ϕ)

<u>משפט 8</u>:

א. $\phi^c = \Omega$

$\Omega^c = \phi$

$A^{c^c} = A$

<u>הוכחת ג.</u>: $X \in (A^c)^c$

אמם $X \notin A^c$ (הגדרת המשלים)

אמם לא נכון ש- X איננו שייך ל- A (הגדרת המשלים)

אמם $X \in A$ (זהות לוגית)

<u>משפט 9</u>:

א. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

<u>הוכחת א.</u>: $X \in A - (B \cap C)$

אםם $X \in A$ ו- $X \notin B \cap C$ (הגדרת הפרש)

אםם $X \in A$ ו- $(X \notin B$ או $X \notin C)$ (הגדרת $\cap$)

אםם $X \in A$ ו- $X \notin B$, או $X \in A$ ו- $X \notin C$ (זהות לוגית)

אםם $X \in A - B$ או $X \in A - C$ (הגדרת הפרש)

אםם $X \in (A - B) \cup (A - C)$ (הגדרת $\cup$)

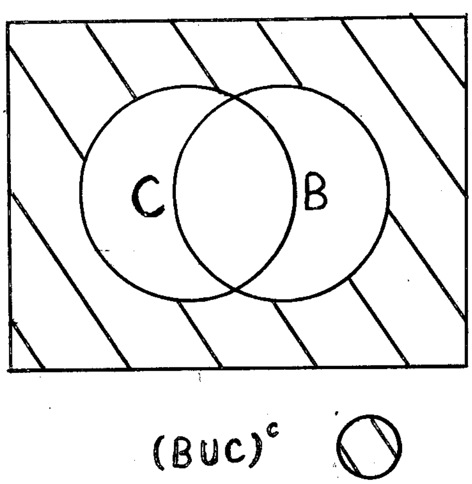
בכתבנו Ω במקום A נקבל ממשפט 9 את החוקים הבאים הנקראים חוקי דה-מורגן:

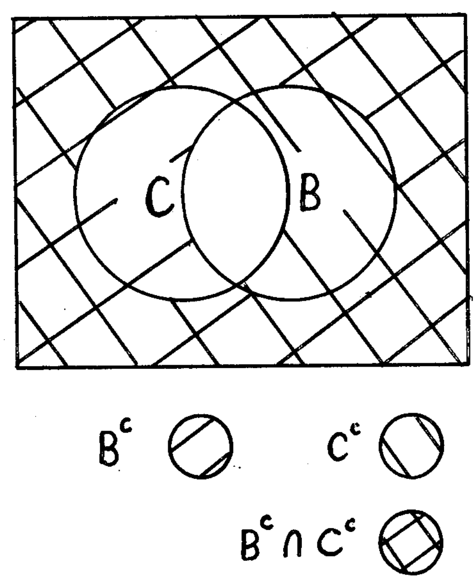
<u>משפט 10</u>:

א. $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$

ב. $(B \cup C)^c = B^c \cap C^c$

נדגים משפט 10 ב. באמצעות מעגלי ון: (המלבן מייצג את Ω)





בהיות B קבוצת הכדורים הירוקים ו- C קבוצת הכדורים הכחולים מבטא משפט 10 ב. את הזהות בין הכדורים שאינם ירוקים או כחולים, לבין הכדורים שאינם ירוקים ואינם כחולים.

1.3 זוג סדור וכפל קבוצות

כזכור, שנוי סדר הרישום של אברי קבוצה אינו משנה את הקבוצה. הקבוצות $\{a,b\}$ ו- $\{b,a\}$ שוות שהרי כל אבר של הראשונה נמצא בשניה, ולהיפך.

לעתים קרובות יהיה זה מועיל להבחין ב"מקור הבחירה" של שני אברי הקבוצה. לדוגמה, כשנרצה לציין נקודה במישור נהיה מעונינים להבחין איזו משתי הקואורדינטות מתאימה לציר ה-x-ים ואיזו לציר ה-y-ים.

לפיכך נשתמש במושג חדש "זוג סדור", ונסמנו ע"י - $\langle a,b\rangle$. a ייקרא הרכיב הראשון ו- b ייקרא הרכיב השני של הזוג.

<u>הגדרה:</u> יהיו $\langle a,b\rangle$ ו- $\langle c,d\rangle$ זוגות סדורים אזי -

$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ אם $a = c$ ו- $b = d$ (כלומר אם הרכיבים שוים בהתאמה)

<u>דוגמאות:</u> $\langle 0,1\rangle \neq \langle 1,0\rangle$ למרות ש- $\{0,1\} = \{1,0\}$. $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$ רק אם $a = b$.

<u>הגדרה:</u> תהיינה A ו- B קבוצות. <u>קבוצת הכפל</u> של A ו- B הינה קבוצת כל הזוגות הסדורים שרכיבם הראשון שייך ל- A והשני שייך ל- B. קבוצה זו מסומנת ע"י $A \times B$.

<u>דוגמאות:</u>

(א) $A = \{1,2\}$ $B = \{א,ב,ג\}$

$B \times A = \{\langle ג,1\rangle , \langle ג,2\rangle , \langle ב,1\rangle , \langle ב,2\rangle , \langle א,1\rangle , \langle א,2\rangle\}$

בעוד ש- $A \times B = \{\langle 1,ג\rangle , \langle 2,ג\rangle , \langle 1,ב\rangle , \langle 2,ב\rangle , \langle 1,ג\rangle , \langle 2,ג\rangle\}$

מכאן שהכפל אינו מקיים את תכונת הקומוטטיביות.

(ב) המישור הינו המכפלה $R \times R$ (R - הממשיים).

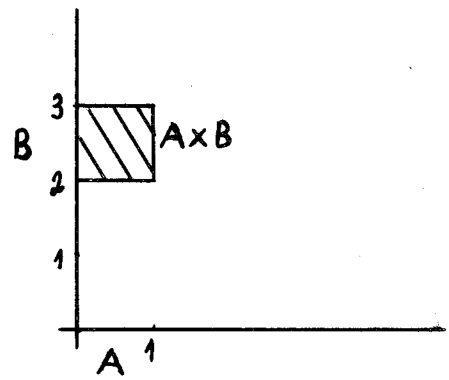
(ג) קבוצת משבצות לוח השחמט מזוהה עם המכפלה של $\{א,...,ח\}$ ו- $\{1,...,8\}$

(ד) $A = B = \{1\}$ $A \times B = B \times A = \{\langle 1,1\rangle\}$

(ה) $A = B = \{1,2\}$ $B \times A = A \times B = \{\langle 1,1\rangle , \langle 1,2\rangle , \langle 2,1\rangle , \langle 2,2\rangle\}$

(ו) $A = [0,1]$ $B = [2,3]$

במקרה זה $A \times B$ הינו ריבוע מלא במישור.



הערה: אם A ו- B קבוצות סופיות אזי מספר האברים ב- $A \times B$ הינו מכפלת מספרי האברים ב- A וב- B.

נביע עתה מספר טענות כלליות בנוגע לפעולת הכפל. בטענות אלו, A,B,C,D הן קבוצות.

טענה 1: א. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

הוכחת א.: $\langle a,d\rangle = X \in A \times (B \cap C)$

אםם $a \in A$ ו- $d \in B \cap C$ (הגדרת הכפל)

אםם $a \in A$ ו- $d \in B$ ו- $d \in C$ (הגדרת חיתוך)

אםם $\langle a,d\rangle \in A \times B$ ו- $\langle a,d\rangle \in A \times C$ (הגדרת הכפל)

אםם $X = \langle a,d\rangle \in (A \times B) \cap (A \times C)$ (הגדרת החיתוך)

טענה 2: אם $A \subseteq B$, $C \subseteq D$ אזי - $A \times C \subseteq B \times D$.

הוכחה: $X = \langle a,c\rangle \in A \times C$

$\Leftarrow$ $a \in A$ ו- $c \in C$ (הגדרת הכפל)

$\Leftarrow$ $a \in B$ ו- $c \in D$ (הגדרת ההכלה)

$\Leftarrow$ $X = \langle a,c\rangle \in B \times D$ (הגדרת הכפל)

טענה 3: $A \times \phi = \phi \times A = \phi$

הוכחה: אם $A \times \phi \neq \phi$ אזי היה $(a,b) \in A \times \phi$ ולפי הגדרת הכפל $b \in \phi$ בסתירה להגדרת הקבוצה הריקה.

פרק 2 - ה י ח ס

2.1 מושג היחס

נתבונן בשני היחסים "$x < y$" ו- "יש מספר חיובי p כך ש- $y = x + p$". המשותף לשני יחסים אלו שאם נציב זוג מספרים a ו- b במקום x ו- y יתקיים היחס הימני אםם יתקיים היחס השמאלי. למרות ששני היחסים מנוסחים באופן שונה "רשימות" הזוגות המקיימים את היחסים זהות.

הגדרה: תהיינה A ו- B קבוצות. R ייקרא יחס בין A ל- B אם $R \subseteq A \times B$.

אם $A = B$ נאמר ש- R יחס ב- A.

דוגמאות:

(א) תהיינה A = קבוצת בני האדם בירושלים

B = קבוצת המספרים הטבעיים.

היחס - $R = \{<a,b>|$ b מספר טלפון של $a\}$

ידוע בתור "ספר הטלפונים" של ירושלים.

(ב) תהיינה A = קבוצת המלים העבריות

B = קבוצת הפסוקים בתנ"ך.

היחס $C = \{<a,b>|$ a מופיעה בפסוק $b\}$

ידוע בתור הקוקורדנציה של התנ"ך.

(ג) בהיות $A = \{1,2,3,4\}$

היחס $R = \{<1,2> , <1,3> , <2,4> , <2,3> , <2,4> , <3,4>\}$

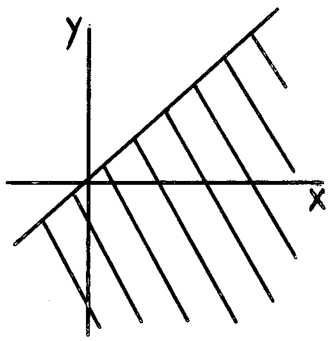
"מבטא" את היחס "קטן מ-" על A.

(ד) בהיות $A = \{\pi,$אל-על$\}$ $B = \{\phi,$ ים המלח, גוש אמונים$\}$

יהא $R = \{<\pi,$גוש-אמונים$>, <$אל-על$,\phi>, <\pi,\phi>\}$.

R יחס בין A ל- B למרות שלא קיים לו מובן סביר.

(ה) יחס השוויון על קבוצה ניתן להגדרה על-ידי $E = \{<a,a>|a \in A\}$



(ו) היחס המוצג על-ידי הזוגות בשטח המקווקו הינו היחס "$Y \geq X$".

<u>סמון:</u> אם $\langle a,b\rangle \in R$ נסמן $a\ R\ b$.

נראה עתה שמושגי הקבוצה והיחס "עשירים" מספיק כדי לאפשר בטוי פורמלי של מושגים נוספים.

<u>הגדרה:</u> יחס R בין A ל- B ייקרא <u>ריק</u> אם $R = \phi$.

<u>דוגמה:</u> קבוצת הספורטאים בישראל $= A$ קבוצת מקצועות האתלטיקה הקלה $= B$

יהא $C = \{\langle a,b\rangle |$ b אלוף העולם במקצוע a$\}$

את העובדה שאין ישראלי שהינו אלוף עולם במקצוע כנ"ל נבטא פורמלית על-ידי $C = \phi$. היחס הריק מבטא איפוא את הבלתי-קיים.

<u>הגדרה:</u> אם R ו- S יחסים בין A ל- B, אזי <u>יחס החיתוך</u> $R \cap S$ מוגדר ע"י $R \cap S = \langle a,b\rangle |$ $a\ R\ b$ ו- $a\ S\ b\}$.

<u>דוגמה:</u> קבוצת הקבוצות בליגה הלאומית לכדורסל אשתקד.

נגדיר - $T_1 = \{\langle a,b\rangle |$ a נצחה את b בסבוב הראשון$\}$

$T_2 = \{\langle a,b\rangle |$ a נצחה את b בסבוב השני$\}$

אזי $T_1 \cap T_2 = \{\langle a,b\rangle |$ a נצחה את b בשני הסבובים$\}$

<u>הגדרה:</u> אם R ו- S יחסים בין A ל- B אזי <u>יחס האחוד</u> $R \cup S$ מוגדר ע"י $R \cup S = \{\langle a,b\rangle |$ $a\ R\ b$ או $a\ S\ b\}$

<u>דוגמה:</u> בדוגמה האחרונה -

$T_1 \cup T_2 = \{\langle a,b\rangle |$ a נצחה את b לפחות פעם אחת$\}$

לפי ההגדרה הבאה נתבונן בזוגות היחסים הבאים:

" הורה של " , " בן של ".

" אות במלה " , " מלה המכילה את האות ".

" גדול מ- " , " קטן מ- ".

את המובן המדויק של הקשר בין היחסים בכל זוג מבטאת ההגדרה הבאה:

הגדרה: יהא R יחס בין A ל- B. __היחס ההפוך__ R^{-1} הינו היחס מ- B ל- A המוגדר על ידי $R^{-1} = \{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle \in R\}$

דוגמאות: (1) היחס ההפוך ליחס בדוגמה (ג) הינו -

$$R^{-1} = \{\langle 2,1\rangle , \langle 3,1\rangle , \langle 4,2\rangle , \langle 3,2\rangle , \langle 3,2\rangle , \langle 4,3\rangle\}$$

(2) היחס ההפוך לשוויון הוא השוויון עצמו $E^{-1} = E$.

(3) לכל יחס R $(R^{-1})^{-1} = R$.

דוגמה: היחסים $<$, $\leq$, $=$, $>$, $\geq$ על R מקיימים:

(1) $\geq$ הוא איחוד של $>$ ו- $=$.

(2) $\neq$ הוא איחוד של $>$ ו- $<$.

(3) החיתוך של $>$ ו $<$ הינו ϕ.

(4) היחס ההפוך ל- $\geq$ הוא $\leq$. ו- $>$ $= <$ $(>)^{-1}$.

(5) איחוד היחסים $\geq$ ו- $\leq$ הינו היחס המלא.

נסיים הסעיף בשני מושגים נוספים:

הגדרה: יהא R יחס בין A ל- B.

__התחום__ של R הינו הקבוצה -

$D(R) = \{a \mid a \in A$ ויש $b \in B$ כך ש- $a\ R\ b\}$.

__הטווח__ של R הינו הקבוצה -

$I(R) = \{b \mid b \in B$ ויש $a \in A$ כך ש- $a\ R\ b\}$.

דוגמאות: (1) בדוגמה (ג) $I(R) = \{2,3,4\}$ $D(R) = \{1,2,3\}$.

(2) קבוצת הקבוצות שהפסידו לפחות פעם אחת בסבוב הראשון $= I(T_1)$

קבוצת הקבוצות שניצחו לפחות פעם אחת בסבוב הראשון $= D(T_1)$.

(3) $D(<) = I(>) = R$.

2.2 מיון יחסים

בסעיף זה נעסוק במספר תכונות בסיסיות של יחסים. דיון בתכונות אלו יסייע לנו ללמוד את מאפיניהם של משפחות יחסים בעלות מקצת מהתכונות.

א. ההתיחסות העצמית

נשווה בין שלושת היחסים הבאים:

(1) על קבוצת הכדורים - צבע הכדור A כצבע הכדור B.

צבען של כל כדור כצבע עצמו ולכן כל כדור מתייחס ביחס זה לעצמו.

(2) על קבוצת בני האדם - A בן של B .

אין אדם שהינו בן של עצמו ולכן אין עצם בקבוצה הנדונה המתייחס ביחס זה לעצמו.

(3) על קבוצת הפונקציות הממשיות - f היא הנגזרת של g.

$(e^x)' = e^x$ $(x^2)' \neq x^2$. לכן יתכן שעצם יתייחס לעצמו ויתכן שלא.

מכאן ההבחנה הבאה:

<u>הגדרה:</u> יחס R על קבוצה A ייקרא <u>רפלקסיבי</u> אם לכל $a \in A$ מתקיים $a\,R\,a$.

יחס R על קבוצה A ייקרא <u>אי-רפלקסיבי</u> אם לכל $a \in A$ מתקיים $a \not R\, a$.

היחס (1) הינו רפלקסיבי, (2) הינו אי-רפלקסיבי ו- (3) אינו רפלקסיבי ואינו אי-רפלקסיבי.

ב. הסימטריה בהתייחסות

נתבונן בארבעת היחסים הבאים:

(1) על קבוצת הנקודות במישור - הנקודה A נמצאת במרחק 1 מהנקודה B.

אם A מתייחסת ל- B, כלומר מרחק A מ- B הינו 1, אזי גם המרחק של B מ- A הינו 1, ולכן B מתייחסת ל- A.

(2) על 2^Ω - הקבוצה A מכילה <u>ממש</u> את B.

אם A מתייחסת ל- B, כלומר $B \subset A$, לא יתכן ש- $A \subset B$. ולכן לא יתכן ש- B תתייחס ל- A.

(3) על 2^Ω - הקבוצה A מכילה את B.

אם $B \subseteq A$ לא יתכן ש- $A \subseteq B$ אלא אם כן $A = B$.

(4) על קבוצת המספרים - y מתייחס ל- x אם $x < 2y$.

3 מתייחס ל-2 ו-2 מתייחס ל-3. אבל 4 מתייחס ל-1 ו-1 איננו מתייחס ל-4.

מכאן ההבחנה הבאה:

<u>הגדרה:</u> יחס R על קבוצה A ייקרא <u>סימטרי</u> אם לכל $x,y \in A$ אם $x R y$ אז $y R x$.

יחס R על קבוצה A ייקרא <u>א-סימטרי</u> אם לכל $x,y \in A$ אם $x R y$ אז $y \not R x$.

יחס R על קבוצה A ייקרא <u>אנטי-סימטרי</u> אם לכל $x \neq y \in a$ אם $x R y$ אז $y \not R x$.

יחס (1) הינו סימטרי, (2) א-סימטרי, (3) אנטי-סימטרי ו- (4) אינו מקיים אף אחת מתכונות אלו.

ג. <u>הורשת ההתייחסות</u>

ושוב נפתח בהתבוננות במספר יחסים.

(1) על קבוצת בני האדם - x נצר למשפחת y.

אם x נצר של y ו- y נצר של z אזי x נצר של z.

(2) על קבוצת קבוצות הכדורגל שהשתתפו בגביע המדינה דאשתקד - x נצחה את y.

אם x נצחה את y ו- y נצחה את z לא יתכן ש- x נצחה את z.

(כל נבחרת מפסידה לכל היותר פעם אחת...).

(3) על קבוצת בני האדם - A בן דוד של B.

יתכן ו- A בן דוד של B, B בן דוד של C ו- A בן דוד של C.

ויתכן ו- A בן דוד של B, B בן דוד של C ו- A איננו בן דוד של C.

מכאן ההגדרות הבאות:

<u>הגדרה:</u> יחס R על קבוצת A ייקרא <u>טרנזיטיבי</u> אם לכל $x,y,z \in A$ אם $x R y$ ו- $y R z$ אז $x R z$.

יחס R על קבוצת A ייקרא <u>א-טרנזיטיבי</u> אם לכל $x,y,z \in A$ אם $x R y$ ו- $y R z$ אז $x \not R z$.

היחס (1) הינו טרנזיטיבי, (2) א-טרנזיטיבי ו-(3) אינו טרנזיטיבי ואינו א-טרנזיטיבי.

ד. <u>שלמות ההתייחסות</u>

נתבונן בשני היחסים הבאים:

(1) על קבוצת בני-האדם - A נולד בשנה גדולה או שווה לשנה בה B נולד.

כל שני עצמים בקבוצה מתייחסים ביחס זה; או הראשון לשני, או השני לראשון, (בפרט אם "שני" העצמים זהים).

(2) על קבוצת קבוצות הכדורסל ששחקו אשתקד בליגה הלאומית - A נצחה את B בסבוב הראשון.

כל שתי קבוצות שונות - מתקיים לגביהן שהאחת נצחה את השניה או השניה את הראשונה.

הגדרות: יחס R על קבוצה A ייקרא <u>שלם</u> אם לכל $x,y \in A$ קיים $x R y$ או $y R x$.

יחס R על קבוצה A ייקרא <u>קשיר</u> אם לכל $x \neq y \in A$ קיים $x R y$ או $y R x$.

יחס (1) הינו יחס שלם ו- (2) הינו קשיר.

הערה: בספרות מופיעות תכונות רבות נוספות. כמו כן מופיע לעתים קרובות מושג זהה בשמות שונים, ולהפך. לפיכך מומלץ להתרכז בהבנת היחוד של התכונות ולא בשמותם.

נעמוד עתה על כמה מהקשרים הפשוטים בין התכונות השונות:

טענה 1: יהא R יחס על A.

(א) אם R א-סימטרי אזי R אנטי-סימטרי ואי-רפלקסיבי.

(ב) אם R אנטי-סימטרי ואי-רפלקסיבי אזי R א-סימטרי.

הוכחה: (א) מידי מההגדרה.

(ב) נניח $x,y \in A$ מקיימים $x R y$

$\Leftarrow$ $x \neq y$ (R אי-רפלקסיבי)

$\Leftarrow$ $y \not R x$ (אנטי-סימטריות R)

מכאן ש- R א-סימטרי.

טענה 2: יהא R יחס קשיר, טרנזיטיבי וסימטרי על קבוצה A המכילה יותר מאיבר אחד אזי R רפלקסיבי.

הוכחה: יהא $x \in A$. יש $x \neq y \in A$ (ב- A יותר מאיבר אחד).
בגלל הקשירות $x\,R\,y$ או $y\,R\,x$. בגלל הסימטריות $x\,R\,y$ ו- $y\,R\,x$
ובגלל הטרנזיטיביות $x\,R\,x$.

2.3 יחס שקילות

בשפת היום-יום אנו משתמשים פעמים רבות במושג "אותו דבר". "x אותו דבר כמו y" משמעו שלמרות שיתכן ש- x ו- y הם שונים הרי לצורך ענין מסוים אפשר לזהות ביניהם. היחס "אותו דבר", יהיה אשר יהיה קריטריון הזיהוי, מקיים את תכונות הרפלקסיביות, הסימטריות והטרנזיטיביות. בסעיף זה נדון ביחסים המקיימים את שלושת התכנות האלו ונוכיח שכל יחס המקיים אותן הוא במובן מסוים יחס מהטיפוס "אותו דבר".

הגדרה: יחס בינרי $\sim$ על קבוצה A ייקרא יחס שקילות (יחס אקוילנציה) אם $\sim$ רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמאות:

(א) השוויון הינו יחס שקילות כי -

(1) $a = a$

(2) אם $a = b$ אז $b = a$

(3) אם $a = b$ ו- $b = c$ אזי $a = c$.

(ב) יחס חפיפת המשולשים הינו יחס שקילות.

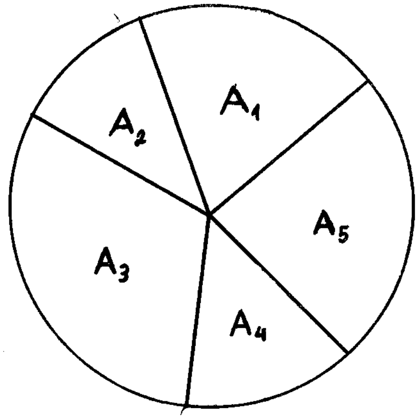
(ג) תהא A קבוצת ישובים המחוברים במערכת דרכים. נגדיר $a \to b$ אם יש דרך להגיע מ- a ל- b. $\to$ יחס שקילות כי -

(1) אפשר להגיע מ- a ל- a.

(2) אם אפשר להגיע מ- a ל- b אפשר לעשות את הדרך חזרה מ- b ל- a.

(3) אם אפשר להגיע מ- a ל- b ומ- b ל- c ברור כי אפשר להגיע מ- a ל- c. (למשל, דרך b).

(ד) על קבוצת בני האדם - היחס "נולד באותה שנה" הינו יחס שקילות.



במקביל, נפתח עתה מושג נוסף והוא "חלוקה של קבוצה". נתבונן באוסף הבא של פרוסות ה"עוגה"

A: $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$

באיזה מובן אוסף זה הינו חלוקה של העוגה? במובן הבא:

(א) כל "פרור" נמצא באחת מהפרוסות.

(ב) אין "פרור" הנמצא בשתים מהפרוסות.

ובאופן כללי נגדיר -

<u>הגדרה:</u> תהא A קבוצה. P - קבוצה של תת-קבוצות לא ריקות של A ($P \subseteq 2^A$) תקרא <u>חלוקה של A</u> אם:

(1) לכל $B,C \in P$ או ש- $B = C$ או ש- $B \cap C = \phi$

(2) לכל $a \in A$ יש $B \in P$ כך ש- $a \in B$.

<u>דוגמאות:</u>

(א) תהא $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

$P = \{\{1,4,5\} , \{6\} , \{2,7\} , \{3\}\}$ היא חלוקה של A.

$Q = \{1,2,3,4\} , \{5,6,7\} , \phi\}$ אינה חלוקה של A כי אחת הקבוצות ב- Q ריקה.

$\{A\}$ היא חלוקה של A.

(ב) נסמן ב- A את הטבעיים הזוגיים וב- B את הטבעיים האי-זוגיים. אזי $\{A,B\}$ היא חלוקה של N.

(ג) נסמן $A_x = \{(x,t) \mid t \in R\}$

A_x הינו הישר הניצב לציר ה-x-ים בנקודה $(x,0)$.

$\{A_x \mid x \in R\}$ הינה חלוקה של R^2.

(ד) תהא $A = \{2,3,4,5,6,7\}$

נסמן - $y_1 = 246$ $y_2 = 573$ $y_3 = 3755$

$A_i = \{n \mid$ הספרה n נמצאת ב- $y_i\}$

$\{A \mid 1 \leq i \leq 3\}$ הינו חלוקה של A. אמנם $A_3 \cap A_2 \neq \phi$ אבל $A_3 = A_2$.

<u>הגדרה:</u> יהא $\sim$ יחס שקילות על קבוצה A. לכל $a \in A$ הקבוצה $B_a = \{x \in A | X \sim a\}$ (קבוצת כל האיברים השקולים ל- a) תיקרא <u>מחלקת השקילות של a</u>.

<u>דוגמה:</u> בדוגמה (ב) לעיל

$B_2 = B_{16}$ = זוגיים

$B_1 = B_3$ = אי-זוגיים

מה הקשר בין "יחס שקילות" ו"חלוקה"? על-כך עונים שני המשפטים הבאים המצטרפים למשפט שמכונה "המשפט היסודי של יחס השקילות":

<u>משפט:</u> יהא $\sim$ יחס שקילות על A. אזי $\{B_a | a \in A\}$ הינה חלוקה של A.

<u>הוכחה:</u> (א) <u>הקבוצות אינן ריקות וכל $a \in A$ שייך לאחת מהקבוצות.</u>

לכל $a \in A$, $a \in B_a$, ולכן גם $B_a \neq \phi$.

(ב) <u>לכל $r,s \in A$ $B_r = B_s$ או $B_r \cap B_s = \phi$</u>

נניח $B_r \cap B_s \neq \phi$

$\Leftarrow$ יש x $x \in B_r \cap B_s$

$\Leftarrow$ יש x $x \sim r$ $x \sim s$ (הגדרת מחלקת שקילות)

$\Leftarrow$ $r \sim s$ ($\sim$ סימטרי וטרנזיטיבי)

נראה עתה ש- $B_r \subseteq B_s$ (בצורה דומה אפשר להראות ש-$B_s \subseteq B_r$ ולכן נקבל כי $B_r = B_s$)

יהא $y \in B_r$

$\Leftarrow$ $y \sim r$ (הגדרת מחלקת שקילות)

$\Leftarrow$ $y \sim s$ ($\sim$ טרנזיטיבי)

$\Leftarrow$ $y \in B_s$

<u>משפט:</u> תהא P חלוקה של קבוצה A. ונגדיר יחס $\sim$ על-ידי $a \sim b$ אם יש $B \in P$ כך ש- $a \in B$ ו- $b \in B$. אזי $\sim$ יחס שקילות (כאשר החלוקה המתאימה לו על-סמך המשפט הקודם היא P).

<u>הוכחה:</u>

(א) <u>רפלקסיביות</u>

P חלוקה לכן יש $B \in P$ כך ש- $a \in B$. $a \in B$ ו- $a \in B$, ומכאן $a \sim a$.

(ב) <u>סימטריות</u>

נניח $a \sim b$

⇐ יש B כך ש- $a \in B$ $b \in B$ (הגדרת ~)

⇐ יש B כך ש- $b \in B$ ו- $a \in B$ (שקילות לוגית)

⇐ $b \sim a$ (הגדרת ~)

(ג) <u>טרנזיטיביות</u>

נניח $a \sim b$ ו- $b \sim c$

⇐ יש $B \in P$ כך ש- $a \in B$ ו- $b \in B$ ויש $C \in P$ כך ש- $b \in C$

ו- $c \in C$ (הגדרת ~)

⇐ $B = C$ (תכונה (1) של החלוקה)

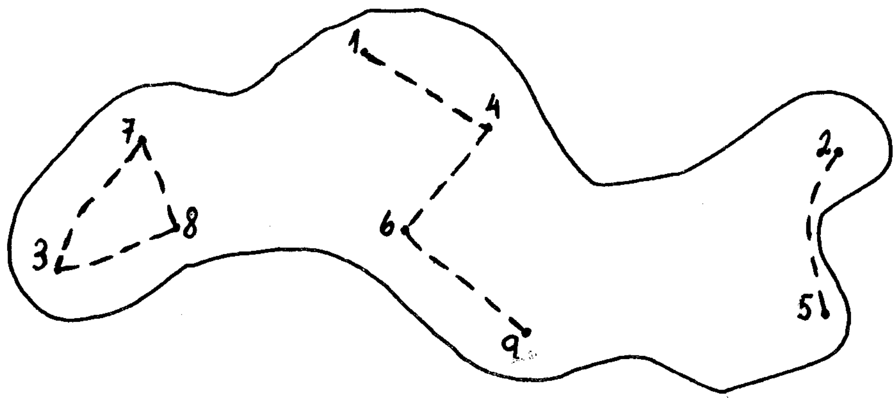
⇐ יש b $a \in B$ ו- $c \in B$

⇐ $a \sim c$ (הגדרת ~)

<u>הגדרה:</u> אם ~ יחס שקילות על קבוצה A אזי $\{B_a | a \in A\}$ היא <u>חלוקת השקילות שמשרה ~ על A</u>.

ראינו שיש קשר חד-חד-ערכי בין יחסי השקילות על קבוצה A לבין החלוקות של A. את יתרת הסעיף בקדיש לדוגמאות של יחסי שקילות, ונחקור מהן החלוקות המושרות על-ידי היחסים השונים.

<u>דוגמה 1</u>: על האי "אקויולנציה" 9 ערים הממוספרות מ-1 עד -9. להלן מפת הדרכים המחברת ביניהן:



כפי שכבר ציינו, היחס $\sim$ המוגדר על-ידי $x \sim y$ אם יש דרך מ- x ל- y, הינו יחס שקילות.

חלוקת השקילות של קבוצת הערים הינה - $\{\{2,5\}\ ,\ \{1,4,6,9\}\ ,\ \{3,7,8\}\}$.

<u>דוגמה 2</u>: על $\mathbb{N} \cup \{0\}$ נגדיר יחס $\equiv$

$x \equiv y$ אם $x - y$ מתחלק ב-3 (דהיינו יש $z \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x - y = 3z$)

<u>טענה</u>: $\equiv$ יחס שקילות.

<u>הוכחה</u>: (1) לכל x $x - x = 0$ ומתחלק ב-3. לכן $x \equiv x$

(2) אם $x \equiv y$

יש $z \in \mathbb{Z}$ $x - y = 3z$

$\Leftarrow$ $y - x = 3(-z)$

$\Leftarrow$ $y \equiv x$.

(3) אם $x \equiv y$ ו $y \equiv z$

יש $k,\ell \in \mathbb{Z}$ $x - y = 3k$ $y - z = 3\ell$

$$x - z = (x - y) + (y - z) = 3(k + \ell)$$

לכן $x \equiv z$.

לכל $0 \leq t \leq 2$ קיים ש $x \equiv t$

אזי יש $z \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x - t = 3z$

$$x = 3z + t$$

אזי השארית של חלוקת x ב- 3 הינה t.

מכאן נקבל כי

$$B_0 = \{0,3,6,9,\dots\}$$

$$B_1 = \{1,4,7,10,\dots\}$$

$$B_2 = \{2,5,8,11,\dots\}$$

חלוקת השקילות של $\equiv$ היא $\{B_0,B_1,B_2\}$.

<u>דוגמה 3</u>: על $N \times N$ נגדיר יחס $\sim$ על-ידי:

$(a,b) \sim (c,d)$ אם $a \cdot d = b \cdot c$.

<u>טענה</u>: $\sim$ יחס שקילות.

<u>הוכחה</u>: (1) $a \cdot b = b \cdot a$ (חלופיות הכפל)

$\Leftarrow (a,b) \sim (a,b)$

(2) נניח $(a,b) \sim (c,d)$

$\Leftarrow a \cdot d = b \cdot c$ (הגדרת $\sim$)

$\Leftarrow c \cdot b = d \cdot a$ (סימטריות השוויון)

$\Leftarrow (c,d) \sim (a,b)$ (הגדרת $\sim$)

(3) נניח $(c,d) \sim (e,f)$, $(a,b) \sim (c,d)$

$\Leftarrow c \cdot f = d \cdot e$ $a \cdot d = b \cdot c$ (הגדרת $\sim$)

$\Leftarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\Leftarrow$ $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ $\Leftarrow$ $a \cdot f = b \cdot e$

$\Leftarrow (a,b) \sim (e,f)$.

$(x,y) \sim (a,b)$ אםם $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ -

ולכן $B_{(a,b)} = \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x}{y} = \frac{a}{b}\right\}$.

מכאן נקבל כי לכל q רציונלי $B_q = \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x}{y} = q\right\}$ ולפיכך

$\{B_q \mid 0 \le q \,,\, q \in Q\}$ היא חלוקת השקילות שמשרה $\sim$.

<u>הערה</u>: לדוגמה זו חשיבות רבה במתמטיקה בהיותה בסיס ל"בנית" המספרים הרציונליים מתוך המספרים הטבעיים.

<u>דוגמה 4</u>: בתורת הצרכן אנו מניחים בדרך-כלל שיחס העדפתו של פרט הינו קשיר רפלקסיבי וטרנזיטיבי. תהא A קבוצת הסלים האפשריים ו- $\precsim$ יחס העדפה של פרט. נגדיר יחס $\sim$ על A שהוא בעצם הוא יחס האדישות, על-ידי:

$a \sim b$ אם $b \precsim a$ ו- $a \precsim b$.

<u>טענה</u>: $\sim$ יחס שקילות.

<u>הוכחה</u>: (1) לכל a $\quad a \precsim a$ (רפלקסיביות $\precsim$)

⇐ $a \precsim a$ ו- $a \precsim a$ (שקילות לוגית)

⇐ $a \sim a$ (הגדרת $\sim$)

(2) נניח $a \sim b$

⇐ $b \precsim a$ ו- $a \precsim b$ (הגדרת $\sim$)

⇐ $a \precsim b$ ו- $b \precsim a$ (שקילות לוגית)

⇐ $b \sim a$ (הגדרת $\sim$)

(3) נניח $a \sim b$ ו- $b \sim c$

⇐ $b \precsim a$ ו- $a \precsim b$ (הגדרת $\sim$)

ו- $c \precsim b$ ו- $b \precsim c$

⇐ $b \precsim a$ ו- $c \precsim b$ ו- $b \precsim c$ ו- $a \precsim b$

⇐ $c \precsim a$ ו- $a \precsim c$ (טרנזיטיביות $\precsim$)

⇐ $a \sim c$ (הגדרת $\sim$)

מחלקת שקילות הינה מה שאנו קוראים "עקומת אדישות", ויחס האדישות מחלק את קבוצת הסלים למערכת "עקומות אדישות". כל סל נמצא על אחת עקומות האדישות ואין עקומות האדישות "נחתכות".

2.4 יחסי סדר

"גדול מ-", "עדיף על", "צודק יותר", "מדורג בטבלה לפני", כל אלו הינם יחסים אשר תכונתם המשותפת הבולטת היא שהם "מסדרים" את אברי הקבוצה עליהם הם מוגדרים.

בסעיף זה נטפל במושג הסדר באופן פורמלי. נבחין בין מספר טפוסים של סדר ונראה כמה מהקשרים ביניהם.

בכל ההגדרות R הינו יחס בינרי על קבוצה A.

<u>הגדרה:</u> R ייקרא יחס <u>סדר</u> אם A טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי.

בהגדרת יחס סדר מופיעים שני אלמנטים:

(1) יחס הסדר טרנזיטיבי: אם a קודם ל- b, ו- b קודם ל- c אזי a קודם ל- c.

(2) יחס הסדר אנטי-סימטרי: אם a קודם ל- b (ו- $a \neq b$), לא יתכן שגם b יקדם ל- a.

<u>דוגמאות:</u> (א) היחסים $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ (על הממשיים) הם יחסי סדר.

(ב) על R^2 נגדיר יחסים

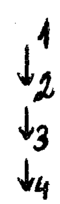
$(x_1,x_2) \geq (y_1,y_2)$ אם $x_1 \geq y_1$ ו- $x_2 \geq y_1$.

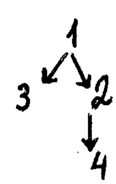
$(x_1,x_2) > (y_1,y_2)$ אם $x_1 > y_1$ ו- $x_2 > y_2$.

קל לוודא ש- $\geq$ ו- $<$ יחסי סדר.

(ג) הגרפים הבאים מציינים יחסי סדר על הקבוצה $\{1,2,3,4\}$:

($i \succsim j$ אם יש שרשרת חצים יורדת מ- i ל- j)





ההבחנה בין "לפני" ו"לא אחרי", "עדיף" ו"לא נחות", $<$ ו- $\leq$ מביאה אותנו להגדרה:

<u>הגדרה:</u> R ייקרא <u>סדר חזק</u> אם R סדר אי-רפלקסיבי.

<u>דוגמאות:</u> (א) $<$ הינו סדר חזק בנגוד ל- $\leq$.

(ב) בדוגמה (ב) לעיל $<$ יחס סדר חזק בנגוד ל- $\geq$.

(ג) על קבוצת הקבוצות החלקיות של קבוצה Ω - היחס מכיל ממש הינו סדר חזק. היחס מכיל הינו יחס סדר שאיננו חזק ($A \subseteq A$).

עד כאן דרשנו מיחס סדר שיהיה אנטי-סימטרי. נתבונן עתה ביחס עדיף או אדיש המאפיין פרט מסויים על קבוצת הסלים R^2_+ , ונבחין כי יחס זה "מסדר" את קבוצת הסלים למרות שאינו אנטי-סימטרי. לפיכך יש טעם בהגדרה הבאה:

<u>הגדרה:</u> R ייקרא <u>קוואזי-סדר</u> אם R טרנזיטיבי ורפלקסיבי.

<u>דוגמאות:</u> (א) על R^2_+ נגדיר

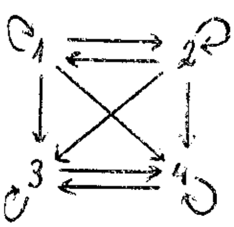
$(x_1,x_2) \succsim (y_1,y_2)$ אם $x_1 + x_2 \ge y_1 + y_2$.

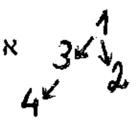
$\succsim$ הינו קוואזי-סדר שאינו סדר שכן $(2,1) \succsim (1,2)$ ו- $(1,2) \succsim (2,1)$.

(ב) על הממשיים, היחס $\succsim$ המוגדר על-ידי $x \succsim y$ אם $|x| \ge |y|$, הינו קוואזי-סדר שאינו סדר, שכן $-3 \succsim 3$ ו- $3 \succsim -3$.

(ג) על $\{1,2,3,4\}$,

היחס המוצג בגרף הינו קוואזי-סדר שאינו סדר.



בחלק מהדוגמאות שטיפלנו בהן לא השווה יחס הסדר הנידון בין כל שני איברים בקבוצה עליה היה מוגדר. כך למשל היחס "מוכל" אינו משווה בין $\{1,2\}$ ו- $\{2,3\}$, והיחס  אינו משווה בין 2 ו- 3.

מכאן ההבחנה הבאה:

<u>הגדרה:</u> יחס סדר (סדר חזק/קוואזי סדר) קשיר ייקרא יחס סדר (סדר חזק/קוואזי סדר) <u>מלא</u>. יחס שאינו מלא ייקרא <u>חלקי</u>.

<u>דוגמאות:</u> (א) על הטבעיים $n|m$ אם n מחלק את m.

יחס זה חלקי כי $3 \nmid 4$ ו $4 \nmid 3$.

(ב) על הממשיים היחס $x \succsim y$ אם $x - y \ge 1$.
הינו יחס סדר חלקי.

לשם הדגמת המושגים שהוגדרו בסעיף זה נחקור עתה בפרוט את תכונותיו של יחס הסדר <u>המילוני (הלקסיקוגרפי)</u>.

<u>הגדרה:</u> היחס $\le_L$ המוגדר על R^2 והמקיים -

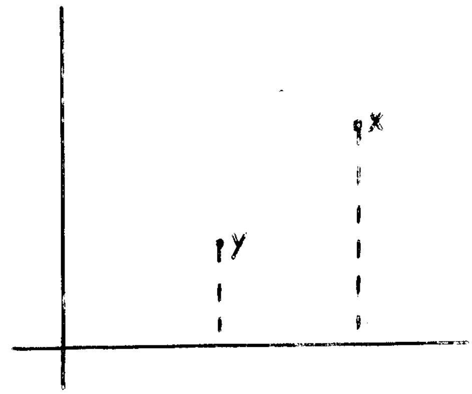
$(y_1,y_2) \le_L (x_1,x_2)$ אם $\left.\begin{array}{l} y_1 < x_1 \\ \text{או } y_1 = x_1 \text{ ו- } y_2 \le x_2 \end{array}\right\}$

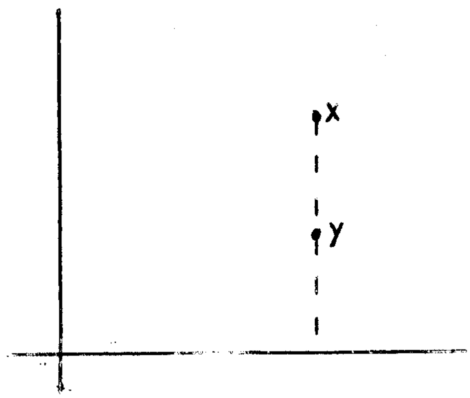
ייקרא <u>יחס הסדר המילוני</u> (הלקסיקוגרפי).

הטעם לשם היחס נעוץ בדמיונו לשיטת הסידור במלון. תחילה אנו משוים את הרכיב השמאלי, ובמקרה של שוויון, אנו עוברים להשוואת הרכיב הימני.

לדוגמה: $(2,50) \le_L (3,1)$ ו- $(3,1) \le_L (2,50)$

$(3,0) \le_L (3,1)$.





גיאומטרית $y \le_L x$ אם x נמצאת על ישר מאונך לציר ה-x-ים שהוא ימני יותר מהישר המאונך לציר ה-x-ים עליו יושבת הנקודה y, או ששתיהן נמצאות על אותו אנך אבל x "מעלי" y.

<u>$\le_L$ רפלקסיבי.</u> לכל (a,b) $a = a$ ו- $b = b$ $\Leftarrow$ $(a,b) \le_L (a,b)$

<u>$\le_L$ טרנזיטיבי.</u> $\begin{cases}(c,d) \le_L (a,b)\\(e,f) \le_L (c,d)\end{cases}$ $\Leftarrow$ $\left(\begin{matrix}c < a\\ \text{או } c = a \text{ ו- } d \le b\end{matrix}\right)$ ו- $\left(\begin{matrix}e < c\\ \text{או } e = c \text{ ו- } b \le d\end{matrix}\right)$

אם $c < a$ אזי $e < a$ ולכן $(e,f) \le_L (a,b)$.

אם $c = a$ אזי אם $e < c$, מתקיים $e < a$ ו- $(e,f) \le_L (a,b)$,

ואם $e = c$ ו- $f \le d \le b$ אזי $e = a$ ו- $f \le b$ ולכן $(e,f) \le_L (a,b)$.

<u>$\le_L$ אנטי סימטרי.</u> נניח $(c,d) \le_L (a,b)$ ו- $(a,b) \le_L (c,d)$ (ונוכיח $(a,b) = (c,d)$)

מהגדרת $\le_L$ $\left(\begin{matrix}c < a\\ \text{או } c = a \text{ - } d \le b\end{matrix}\right)$ ו- $\left(\begin{matrix}a < c\\ \text{או } a = c \text{ ו- } b \le d\end{matrix}\right)$

מכאן ש- $c = a$ ו- $d \le b$ ו- $b \le d$ ולכן $c = a$ ו- $d = b$

ומכאן $(a,b) = (c,d)$.

<u>$\leq_L$ קשיר.</u> לכל $(a,b)(c,d)$ אם $c < a$ אז $(c,d) \leq_L (a,b)$

אם $a < c$ אז $(a,b) \leq_L (c,d)$

ואם $a = c$ אזי

אם $d \leq b$ $(c,d) \leq_L (a,b)$

ואם $b \leq d$ $(a,b) \leq_L (c,d)$.

<u>מסקנה:</u> היחס המילוני הינו קוואזי סדר. סדר מלא, אבל איננו חזק.

פרק 3 - הפונקציה

3.1 פונקציה

התלות בין כמות מבוקשת של סחורה לבין מחירה, בין הצריכה הפרטית וההכנסה הלאומית, ובין שער הריבית והערך הנוכחי של השקעה מהוות מספר דוגמאות לשמוש הרחב במושג הפונקציה בתיאוריה הכלכלית (כמו בשאר ענפי המדע ובשפה היום-יומית).

ניתן היה להגדיר פונקציה מקבוצה A לקבוצה B כ"פעולה המתאימה לכל אבר ב- A איבר יחיד ב- B", אולם קיים קושי בהגדרה זו והוא מתבטא במלים "פעולה המתאימה". כדי להמנע מקושי זה נביא הגדרה למושג הפונקציה המתבססת על מושג היחס (שנידון בפרק הקודם).

הגדרה: A ו- B קבוצות. F יחס בין A ל- B ($F \subseteq A \times B$) ייקרא פונקציה אם:

(1) $\langle a,b\rangle \in F$, $\langle a,c\rangle \in F$ $\Leftarrow$ $b = c$

(2) לכל $a \in A$ יש $b \in B$ כך ש- $\langle a,b\rangle \in F$.

תנאי (1) מציג את הדרישה שלכל איבר ב- A,F תתאים לכל היותר איבר אחד ב- B. ותנאי (2) מציג את הדרישה שלכל איבר בקבוצה A אמנם יותאם איבר כלשהו ב- B.

סמון: אם $\langle a,b\rangle \in F$ נכתוב $F(a) = b$.

$F \subseteq A \times B$ נציין זאת בכתיב - $F:A \to B$.

הגדרה: התחום של הפונקציה F הינו התחום של היחס F, ומסומן - $D(F)$.

(אם $F:A \to B$ אזי $D(F) = A$)

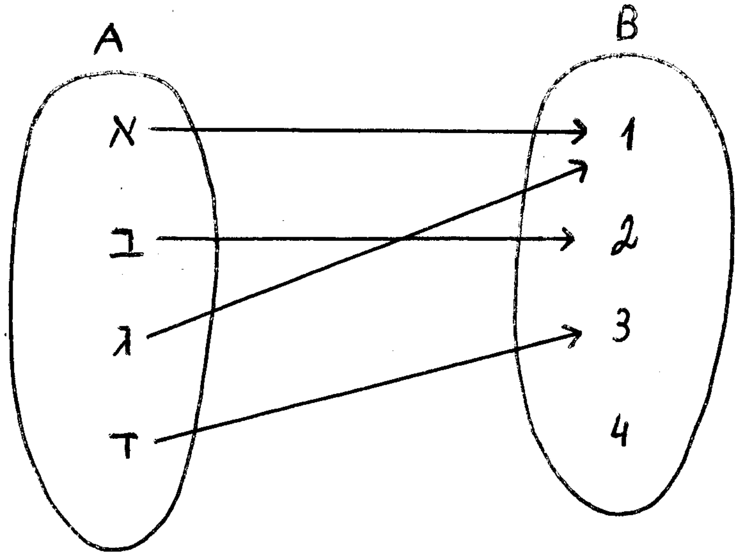
הטווח של הפונקציה F הינו הטווח של היחס F, ומסומן $I(F)$ (ולפעמים גם $R(F)$).
ניתן להסתכל על הטווח כעל קבוצת האיברים המתקבלים על-ידי פעולת F על תחומה.
דהיינו - $I(F) = \{b \in B \mid$ יש $a \in A$ $F(a) = b\}$.

דוגמאות:

(1) $A = \{$א,ב,ג,ד$\}$ $B = \{1,2,3,4\}$.

היחס $f = \{\langle$א$,1\rangle , \langle$ב$,2\rangle , \langle$ג$,1\rangle , \langle$ד$,3\rangle\}$

הינו פונקציה. $f:A \to B$ ונוכל לתארה גרפית על-ידי



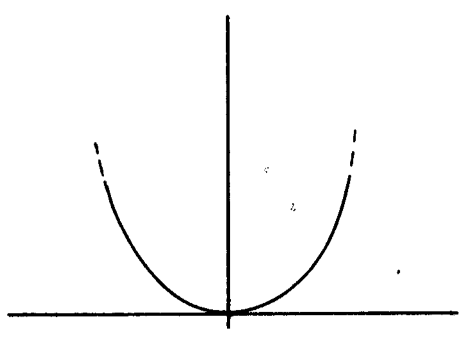
נציין - $f(\text{ג}) = 1$ $f(\text{א}) = 1$

$f(\text{ד}) = 3$ $f(\text{ב}) = 2$

וקיים $I(f) = \{1,2,3\}$

היחס $g = \{\langle\text{א},2\rangle , \langle\text{ב},3\rangle , \langle\text{ד},3\rangle\}$ איננו פונקציה מ- A ל-B כי ל- ג אין $b \in B$ כך ש- $\langle\text{ג},b\rangle \in g$.

(2) $f = \{(x,y) \mid y = x^2\}$.



$f:R \to R$ מבטאת את ההתאמה $f(x) = x^2$.

קיים $I(f) = R_+ = \{x \mid x \geq 0\}$.

נשים לב כי ההתבוננות ב- f כיחס זהה להתבוננות ב- f כגרף, שכן - הגרף של f הינו אוסף הזוגות $\langle a,f(a)\rangle$.

בדרך-כלל מבטאת הפונקציה כלל שמציין את ההתאמה ומכאן ואילך לא נכתוב עוד את הפונקציה כיחס אלא נציין את כלל ההתאמה בלבד.

(3) קבוצת המדינות = A

קבוצת הערים = B

בירת a = $f(a)$,

f מתאימה לכל מדינה את בירתה. טווח f הינו קבוצת ערי הבירה.

(4) $A = Q$ $B = \{0,1\}$

$.f(x) = \begin{cases} 1 & \text{שלם } x \\ 0 & \text{שאינו שלם } x \end{cases}$

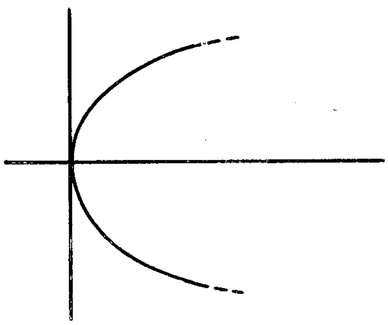
f "מציינת" ב-1 את המספרים השלמים שבקבוצת המספרים הרציונליים, ו- $I(f) = B$.

(5) $A = R^2$ $B = R$ $f(<x,y>) = x + y$.

$I(f) = R$, ו- f מתאימה לכל זוג מספרים את סכום רכיביו.

(היחס f הינו $f = \{< <x,y> , x + y>| \; x,y \in R\}$)

(6) $f:R_+ \to R$ מוגדרת על-ידי:



פתרון המשוואה "$f(a) = "x^2 - a = 0$

f איננה פונקציה כי ל- 4, לדוגמה,

f מתאימה שני ערכים: 2 ו- 2-.

(7) $A = \{f|f:R \to R\}$, $B = 2^R$,

$P:A \to B$ מוגדרת על-ידי

$.P(f) = \{x|f(x) < 0\}$

P מתאימה לכל פונקציה את קבוצת הנקודות

עבורן הפונקציה מקבלת ערכים שליליים.

לדוגמה: $P(x^2 - 5x + 6) = \{x|2 < x < 3\}$, $P(x) = (-\infty;0)$, $P(x^2) = \phi$.

(8) תהא Ω קבוצה כוללת. $f:2^\Omega \to 2^\Omega$ מקיימת $f(A) = A^c$

ומתאימה לכל קבוצה את משלימה. $I(f) = 2^\Omega$ כי לכל $A \in 2^\Omega$

$.f(A^c) = (A^c)^c = A$

<u>הערה:</u> נשים לב להבדל בין f לבין f(x). בכתבנו f אנו מתכוונים לפונקציה בעוד ש- f(x) הינו איבר בקבוצת הטווח.

מקצת מהקוראים נתקלו בודאי בהבחנה שבין פונקציה ופונקציה חד-ערכית, וכדאי לשים לב לעובדה שהגדרת הפונקציה שהובאה כאן כוללת את דרישת החד-ערכיות.

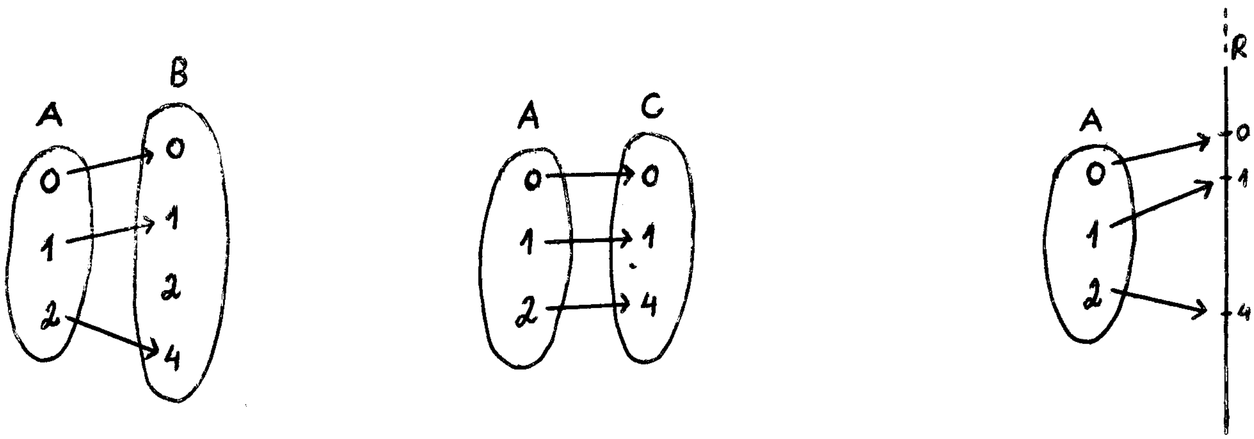
מכיוון שהגדרנו פונקציה כיחס המקיים תכונות מסוימות לא בצטרך להגדיר שוויון בין פונקציות. מהגדרת שוויון יחסים נובע ש- f ו- g שוות $(f=g)$ אם:

(1) f ו- g מוגדרות על אותו תחום A.

(2) לכל $a \in A$ $\quad f(a) = g(a)$.

__דוגמאות:__

(1)



$f:A \to 13$ $\qquad$ $g:A \to C$ $\qquad$ $h:A \to R$

$h(x) = x^2$

$f = g = h$ כי התחומים שוים ולכל $a \in A$ $\quad f(a) = g(a) = h(a)$.

(2) $f:R \to R$ $\qquad f(x) = x^3$

$g:[0,1] \to R$ $\qquad g(x) = x^3$

f - g אינן שוות כי תחומם שונה.

(3) $f:R \to R$ $\qquad f(x) = x^2$

$g:R \to R$ $\qquad g(y) = y^2$.

$f = g$ מכיוון ששנוי שם המשתנה אינו משנה את הפונקציה.

נביא עתה שתי הגדרות של תכונות חשובות המתייחסות לפונקציות:

__הגדרה:__ $f:A \to B$ תקרא __חד-חד-ערכית__ (ח-ח-ע) אם -

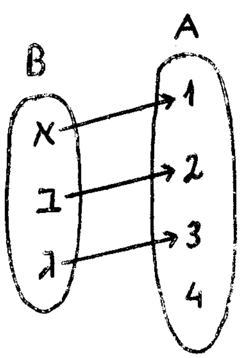
$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

<u>הגדרה:</u> $f:A \to B$ תקרא <u>על</u> אם לכל $b \in B$ יש $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$.

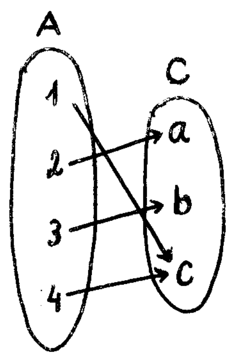
במלים אחרות f על אם קיים $I(f) = B$.

<u>דוגמאות:</u>

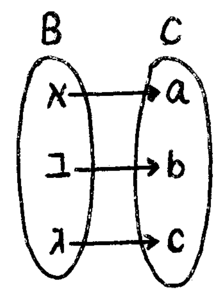
(1) נגדיר $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{א,ב,ג\}$ $C = \{a,b,c\}$.



$f:B \to A$



$g:A \to C$



$h:B \to C$

f 1-1-ע ואינה על. g על אך אינה 1-1-ע. h 1-1-ע ועל.

(2) $f:R \to R$ $f(x) = x^2$.

f אינה על כי $-1 \notin I(f)$, ואינה 1-1-ע כי $f(2) = f(-2)$.

אולם, $f:R_+ \to R_+$ המקיימת $f(x) = x^2$ הינה 1-1-ע ועל.

(3) נעיין שוב בפונקציה $f:2^\Omega \to 2^\Omega$ המקיימת $f(A) = A^c$.

f 1-1-ע כי

$$f(A) = f(B) \quad \Leftarrow$$
$$A^c = B^c \quad \Leftarrow$$
$$(A^c)^c = (B^c)^c \quad \Leftarrow$$
$$A = B$$

f על כי בהיות $B \in 2^\Omega$ $f(B^c) = (B^c)^c = B$.

<u>הגדרה</u>: $f:A \to A$ המקיימת לכל $a \in A$ $f(a) = a$ תיקרא <u>פונקצית הזהות על A</u> ותסומן 1_A.

<u>הגדרה</u>: $f:A \to B$ תיקרא <u>פונקציה קבועה</u> אם יש $b \in B$ כך שלכל $a \in A$ $f(a) = b$.

פונקציה קבועה מקבלת ערך אחד בכל תחום הגדרתה.

<u>3.2 הרכבת פונקציות</u>

נסתכל בשלוש הפונקציות הבאות:

מספר האנשים בבירת המדינה x = $h_1(x)$.

השרש החיובי של הלוגריתמים הטבעי של x = $h_2(x)$

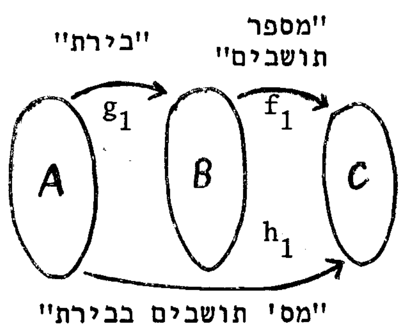
סך הפריטים בסל המועדף בהכנסה נתונה x = $h_3(x)$.

המשותף לשלוש הפונקציות הוא שכל אחת מהן בנויה משתי פונקציות "פשוטות" יותר המופעלות בדרוג.

<u>הגדרה</u>: תהא $g;A \to B$ - $f:B \to C$.

<u>פונקצית ההרכבה</u> $f \circ g$ של f על g היא הפונקציה $f \circ g:A \to C$ המקיימת $f \circ g(a) = f(g(a))$.

<u>דוגמאות</u>:



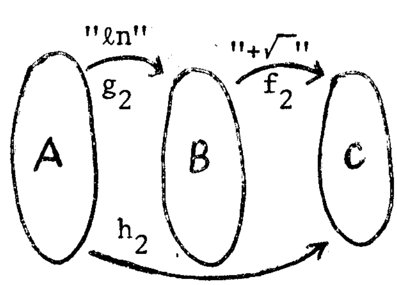
(א) קבוצת המדינות $= A$

קבוצת הערים $= B$

המספרים הטבעיים $= C$

בירת a $= g_1(a)$

מספר התושבים ב- b $= f_1(b)$. קיים $h_1 = f_1 \circ g_1$.



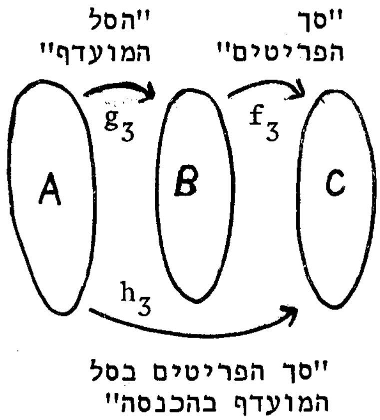
(ב) $A = \{x |\ 1 \le x\}$

$B = R^+$

$C = R$

$g_2(a) = \ell n\ a$

$f_2(b) = +\sqrt{b}$. קיים $h_2 = f_2 \circ g_2$.



(ג) $A = R_+$

$B = R_+^2$

$C = R_+$

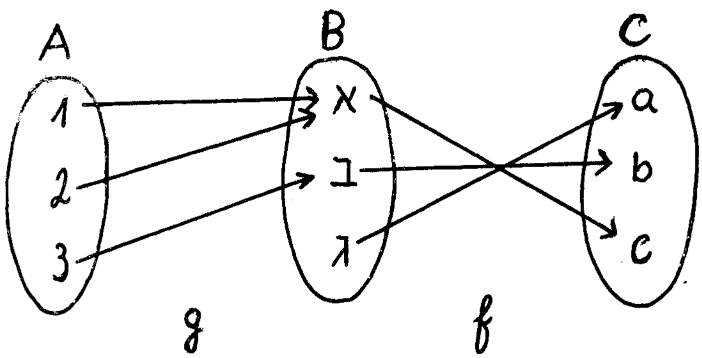
הסל המועדף ביותר בהכנסה a = $g_3(a)$

סך הפריטים בסל b = $f_3(b)$, קיים $h_3 = f_3 \circ g_3$

(ד) $f\circ g(1) = c$

$f\circ g(2) = c$

$f\circ g(3) = b$.



<u>הערה:</u> לא תמיד הרכבת פונקציות אפשרית. כדי ש- $f\circ g$ יהיה מוגדר, $f(g(a))$ צריך להיות מוגדר לכל $a \in A$. לכן לכל $a \in A$, $g(a)$ צריך להיות בתחום של f.

לדוגמה - $g:R_+ \to R$ $\quad g(x) = \ln x$ $\quad f:R_+ \to R$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$

$f\circ g$ אינו מוגדר כי $g(1/e) = -1$ אינו בתחום של f !

<u>משפט:</u> (אסוציטיביות ההרכבה)

תהיינה $f:A \to B$ $\quad g:B \to C$ $\quad h:C \to D$

אזי $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ (במובן שאם אחד הצדדים מוגדר אזי גם השני מוגדר וקיים השוויון).

<u>הוכחה:</u> לכל $a \in A$

$$(h\circ g)\circ f\,(a) = (h\circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h(g\circ f(a)) = h\circ(g\circ f)(a)$$

<u>הערה</u>: הרכבת פונקציות אינה קומוטטיבית כפי שנווכח מהדוגמה הבאה:

$$g:R \to R \qquad g(x) = x + 1 \qquad f:R \to R \qquad f(x) = x^2$$

קיים $\quad f \circ g(x) = (x+1)^2 \qquad g \circ f(x) = x^2 + 1$

ושתי הפונקציות שונות כי לדוגמה

$g \circ f(1) \neq f \circ g(1)$.

למספר 1 התכונה שלכל מספר t קיים $1 \cdot t = t \cdot 1 = t$, כלומר הכפלה ב-1 איננה "משנה" את המוכפל. האם קיימת פונקציה בעלת תכונה דומה ביחס לפעולת ההרכבה?

<u>טענה</u>: תהא $f:A \to B$. אזי $1_B \circ f = f \circ 1_A = f$

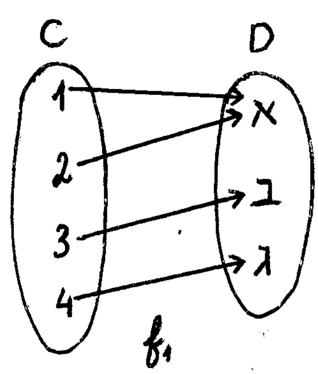
$$f \circ 1_A = f \Leftarrow f \circ 1_A(a) = f(1_A(a)) = f(a)$$

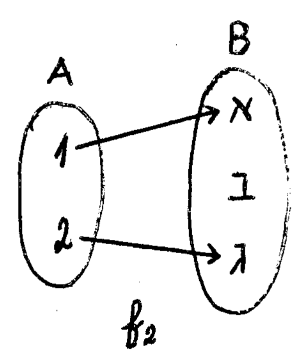
$$1_B \circ f = f \Leftarrow 1_B \circ f(a) = 1_B(f(a)) = f(a).$$

בפרק הקודם דנו במושג היחס ההפוך. כזכור בהיות $R \subseteq A \times B$

$$R^{-1} = \{\langle b,a \rangle \mid \langle a,b \rangle \in R\} \subseteq B \times A$$

היחס ההפוך קיים תמיד. אולם אם נתבונן בפונקציה כיחס - לא בהכרח היחס ההפוך הינו פונקציה. לדוגמה:





f_1^{-1} איננה פונקציה מ- B ל- A כי אין $a \in A$ כך ש- $(ב,a) \in f_1^{-1}$.

f_2^{-1} איננה פונקציה מ- D ל- C כי (א,1) ו- (א,2) שייכים ל- f_2^{-1}.

נשים לב ש- f_1 איננה על, ו- f_2 איננה 1-1-ע. ואמנם -

<u>משפט:</u> תהא $f:A \to B$ פונקציה. היחס f^{-1} הינו פונקציה אםם f 1-1-ע ועל.

f 1-1-ע

אםם לכל x,y,b אם $f(x) = f(y) = b$ אז $x = y$

אםם לכל x,y,b אם $(y,b) \in f$ ו- $(x,b) \in f$ אז $x = y$

אםם לכל b אם $(b,y) \in f^{-1}$ ו- $(b,x) \in f^{-1}$ אז $x = y$

אםם f^{-1} מקיימת תנאי (1) בהגדרת הפונקציה.

f על

אםם לכל $b \in B$ יש $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$

אםם לכל $b \in B$ יש $a \in A$ כך ש- $\langle b,a \rangle \in f^{-1}$

אםם f^{-1} מקיימת תנאי (2) בהגדרת הפונקציה.

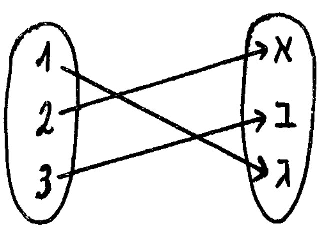
<u>הגדרה:</u> אם $f^{-1}:B \to A$ פונקציה אזי f^{-1} תיקרא <u>הפונקציה ההופכית</u> ל- f.

על f נאמר שהיא <u>פונקציה הפיכה</u>.

נשים לב ש- $f(a) = b$ אם ורק אם $f^{-1}(b) = a$.

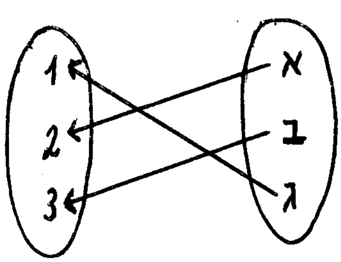
<u>דוגמאות:</u>

(א) תהא f מוגדרת על-ידי הדיאגרמה.



הפונקציה ההופכית ל- f "מתקבלת"

על-ידי היפוך החיצים.



(ב) $f:R_+ \to R_+$ $\quad f(x) = x^2$

נמצא את $f^{-1}:R_+ \to R_+$.

$f^{-1}(b) = a$ אםם $f(a) = b$ אםם $a^2 = b$ אםם $a = \sqrt{b}$

ולכן - $f^{-1}(b) = \sqrt{b}$.

(ג) קבוצת אזרחי המדינה $= A$ $\quad$ קבוצת מספרי תעודות הזהות $= B$

$f:A \to B$ $\quad f(a) =$ מספר ת.ז. של a

$f^{-1}:B \to A$ $\quad f^{-1}(b) =$ האיש שמספר ת.ז. שלו הוא - b.

<u>משפט:</u> אם f פונקציה הפיכה אזי -

$$f^{-1} \circ f = 1_A \qquad f \circ f^{-1} = 1_B.$$

<u>הוכחה:</u> יהא $b \in B$.

f על ולכן יש $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$.

לכן $f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b = 1_B(b)$.

ומכאן $f \circ f^{-1} = 1_B$.

באופן דומה נוכיח ש- $f^{-1} \circ f = 1_A$.

<u>משפט:</u> תהא $f:A \to B$ הפיכה. אם $g:B \to A$ מקיימת $g \circ f = 1_A$ או $f \circ g = 1_B$ אזי - $g = f^{-1}$.

<u>הוכחה:</u> נניח $g \circ f = 1_A$.

יהא $b \in B$. יש a כך ש- $f(a) = b$ (f על).

מכאן - $f^{-1}(b) = a$

ולכן $g(b) = g(f(a)) = g \circ f\ (a) = 1_A(a) = a = f^{-1}(b)$. מכאן ש- $g = f^{-1}$.

באופן דומה נוכיח ש- $f \circ g = 1_B$ גורר ש- $g = f^{-1}$.

<u>משפט:</u> תהיינה $f:A \to B$ - $g:B \to C$. אזי -

(1) אם f ו- g על אזי גם $g \circ f$ על.

(2) אם f ו- g 1-1-ע אזי גם $g \circ f$ 1-1-ע.

<u>הוכחה</u>: (1) יהא $c \in C$.

יש $b \in B$ כך ש- $g(b) = c$ (g על)

יש $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$ (f על)

לפי הגדרת הרכבת פונקציות - $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

ומכאן ש- $g \circ f$ על.

(2) מוכח באופן דומה.

3.3 <u>עצמות</u>

האם בכל שתי קבוצות אינסופיות "אותו-מספר" איברים? על שאלה זו לא נוכל לענות כי המושג "אותו מספר" כלל לא הוגדר לגבי קבוצות אינסופיות.

בסעיף זה נציג את המושג "עצמה" אשר מכליל את המושג "מספר" כמונה של קבוצות סופיות ונשיב בעזרתו על השאלה האם לכל הקבוצות האינסופיות אותה עצמה.

בכיתה תלמידים וכסאות. השוואת מספר התלמידים והכסאות תיתכן כמובן על-ידי ספירת התלמידים וספירת הכסאות, אולם אפשר גם אחרת. בכל אחד מהמצבים הבאים לא נזדקק לכן:

(א) כל הכסאות תפוסים ויש תלמידים שעומדים;

(ב) חלק מהכסאות פנויים וכל התלמידים יושבים;

(ג) כל הכסאות תפוסים וכל התלמידים יושבים.

במצב (א) ברור שמספר הכסאות קטן ממספר התלמידים,

במצב (ב) נסיק שמספר הכסאות גדול ממספר התלמידים,

ובמצב(ג) נקבע שמספר התלמידים שווה למספר הכסאות.

לשם קביעות אלו אין זה חשוב מי מהתלמידים יושב על איזה מהכסאות. כל שאנו צריכים הוא ההתאמה בין כסא לתלמיד היושב עליו.

העיון "על תלמידים וכסאות" מוביל להגדרה הבאה:

<u>הגדרה</u>: נאמר על קבוצות A ו- B שהן <u>שוות עצמה</u> (ונסמן $A \sim B$)

אם יש פונקציה $f:A \to B$ 1-1-ע ועל.

דוגמאות:

(1) $A = \{א,ב,ג,...,ש,ת\}$

$B = \{1,2,...,10,20,...,100,...,400\}$

$A \sim B$ כי הפונקציה - $f:A \to B$ המוגדרת על-ידי: הגימטריה של $f(a) = a$

הינה 1-1-ע ועל.

(2) נסמן ב- N את קבוצת המספרים הטבעיים וב- $2N$ את קבוצת הטבעיים הזוגיים.

טענה: $N \sim 2N$

הוכחה: נגדיר $f:N \to 2N$ על-ידי $f(n) = 2n$.

f 1-1-ע כי $f(n) = f(m) \Leftarrow 2n = 2m \Leftarrow n = m$.

f על כי בהיות $k \in 2N$ יש ℓ כך ש- $2\ell = k$

ולכן $f(\ell) = 2\ell = k$.

קבוצת הטבעיים הזוגיים מוכלת ממש בטבעיים. דוגמה (2) מספקת לנו הוכחה לכך שיתכן שקבוצה תהיה שוות עצמה לקבוצה חלקית לה ממש!!! המצב ש"שלם" יכול להיות שקול לחלקו אופייני לקבוצות האינסופיות בלבד.

בטרם נשוב ונעיין בדוגמאות נוספות נוכיח את הטענה הבאה המאפשרת לנו להרחיב את מושג "המספר" למושג "העצמה".

טענה: $\sim$ יחס שקילות.

הוכחה: רפלקסיביות: תהא A קבוצה. $1_A:A \to A$ (הזהות) 1-1-ע ועל. לכן $A \sim A$.

סימטריות : נניח $A \sim B$.

תהא $f:A \to B$ 1-1-ע ועל (קיימת כזו מהגדרת "שוות עצמה")

$\Leftarrow$ $f^{-1}:B \to A$ 1-1-ע ואל (נובע מטענה בסעיף הקודם)

$\Leftarrow$ $B \sim A$ (הגדרת "שוות-עצמה").

טרנזיטיביות: נניח $A \sim B$ ו- $B \sim C$

תהיינה $f:A \to B$ $g:B \to C$ חד-חד ערכיות ועל (קיומן מהגדרת $\sim$)

$\Leftarrow$ $g \circ f:A \to C$ 1-1-ע ועל (טענות בסעיף הקודם)

$\Leftarrow$ $A \sim C$ (הגדרת $\sim$)

קבוצות ניתנות להימנות

סוג מיוחד של קבוצות אינסופיות מאופיין באמצעות ההגדרה הבאה:

הגדרה: קבוצה A תיקרא <u>ניתנת להימנות</u> אם $A \sim N$.

ברור שקבוצת הטבעיים ניתנת להימנות ($N \sim N$), וראינו כבר דוגמה נוספת של קבוצה ניתנת להימנות - הטבעיים הזוגיים. הטעם לתואר "ניתנת להימנות" הוא שאם A ניתנת להימנות אזי יש פונקציה $f:N \to A$ ע-1-1 ועל, ו- f זו "מונה" את איברי A באופן ש- $f(1)\ ,\ f(2)\ ,\ f(3), \ldots$ הינה רשימה "מסודרת" של כל איברי A.

נראה עתה כמה דוגמאות של קבוצות נוספות הניתנות להימנות.

דוגמה 3: $N \cup \{0\}$ ניתנת להימנות.

הוכחה: תהא $f:N \to N \cup \{0\}$ $\quad f(n) = n - 1$

קל לוודא ש- f ע-1-1 ועל.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & f(1) & & f(2) & & f(3) & & f(4) & & f(5) & & f(6) & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & 2 & \cdots\cdots & 3 & \cdots\cdots & 4 & \cdots\cdots & 5 & \cdots\cdots \end{array}$$

דוגמה 4: קבוצת השלמים (Z) ניתנת להימנות.

הוכחה: די יהיה אם נראה ש- $Z \sim N \cup \{0\}$ שכן מדוגמה 3 $N \cup \{0\} \sim \mathbf{N}$ ומטרנזיטיביות $\sim$ ינבע ש- $Z \sim \mathbf{N}$.

נגדיר $g:N \cup \{0\} \to Z$

$$g(a) = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{זוגי } a \\ 0 & a = 0 \\ -\frac{a+1}{2} & \text{אי-זוגי } a \end{cases}$$

g ע-1-1:

נניח $g(x) = g(y)$.

אם $g(x) = 0$ אזי $x = y = 0$.

אם $g(x) > 0$ אז x ו- y זוגיים ולכן $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \Leftarrow x = y$.

אם $g(x) < 0$ אז x ו- y אי-זוגיים ולכן $-\frac{x+1}{2} = -\frac{y+1}{2} \Leftarrow x = y$.

על g:

אם $y > 0$, $2y$ זוגי $g(2y) = \frac{2y}{2} = y$.

$y < 0$, $-2y - 1$ אי-זוגי, ו- $g(-2y - 1) = -\frac{-2y - 1 + 1}{2} = y$.

<u>הערה</u>: הרכבת הפונקציות f ו- g בדוגמאות 3 ו- 4 "מונה" את השלמים באופן הבא:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\ \ldots\ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots \end{array}$$

<u>דוגמה 5</u>: $N \sim N \times N$

נבנה פונקציה שתמנה את הזוגות בשיטה המודגמת בדיאגרמה:

(1,1) →	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

באופן פורמלי פונקציה זו ניתנת לתיאור על-ידי $f(i,j) = \sum_{k=2}^{i+j-1} (k - 1) + i$.

<u>דוגמה 6</u>: קבוצת הרציונליים החיוביים - Q_+ ניתנת למניה. ניתן לראות זאת על-ידי כך ש"נמנה" את $N \times N$ כמו בדוגמה 5 אבל "נפסח" על זוג (i,j) אם כבר מנינו קודם זוג (k,ℓ) המקיים - $\frac{i}{j} = \frac{k}{\ell}$:

① 1/1	② 1/2	④ 1/3	⑥ 1/4	⑩ 1/5	1/6
③ 2/1	× 2/2	⑦ 2/3	× 2/4	2/5	2/6
⑤ 3/1	⑧ 3/2	× 3/3	3/4	3/5	3/6
⑨ 4/1	× 4/2	4/3	4/4	4/5	4/6
⑪ 5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6

<u>הערה:</u> על קבוצה ניתנת להימנות נאמר שעצמתה $\aleph_0$ (כן, האות העברית "אלף").

<u>קבוצות שוות עצמה לקטע [0,1]</u>

<u>דוגמה 7:</u> $[0,1] \sim [1,3]$

<u>הוכחה:</u> נגדיר $f:[0,1] \to [1,3]$ $f(x) = 1 + 2x$.

f חח"ע כי $f(x) = f(y) \Rightarrow 1 + 2x = 1 + 2y \Rightarrow x = y$.

f על כי בהיות $1 \le y \le 3$ אזי $0 \le \frac{y-1}{2} \le 1$ - $f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{y-1}{2} = y$.

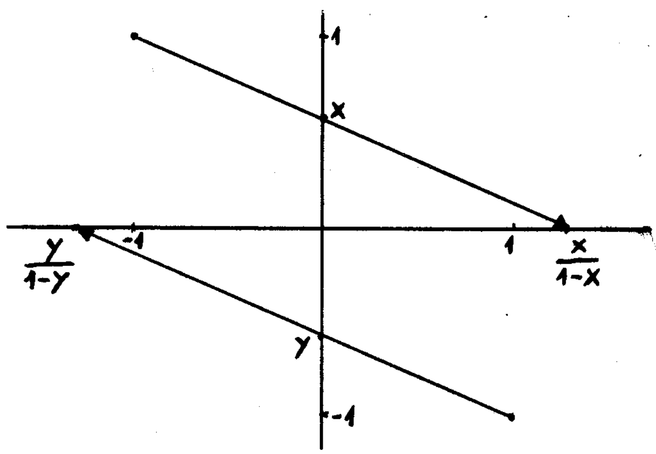
באופן דומה ניתן להוכיח שכל קטע סגור [a,b] שווה עצמה לקטע [0,1].

<u>דוגמה 8:</u> $(-1,1) \sim R$

<u>הוכחה:</u>

$f:(-1,1) \to R$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1-x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{x}{1+x} & x < 0 \end{cases}$$



וקל לוודא ש- חח"ע ועל.

<u>הערה:</u> על קבוצה שוות עצמה לקטע [0,1] נאמר שעצמתה כעצמת <u>הרצף</u>, או שהיא בעלת עצמה א.

קבוצות נוספות שעצמתן א - קטע פתוח, קטע חצי פתוח, הישר הממשי, רבוע היחידה (!), המישור, המרחב - R^3 , ועוד.

ונסיים את הסעיף בשאלה שפתחה אותו: האם כל שתי קבוצות אינסופיות הינן שוות עצמה?
את התשובה לשאלה נתן קנטור ב-1892 תוך שמוש ברעיון שנקרא על-שמו - "שיטת האלכסון של קנטור".

<u>משפט</u>: הקטע $[0,1]$ אינו ניתן להימנות (כלומר $N \not\sim [0,1]$).

<u>הוכחה</u>: נשים לב שלא די שנמצא פונקציה 1-1-ע <u>מסויימת</u> מהמספרים הטבעיים לקטע $[0,1]$ שאיננה על. יש להראות שלא יתכן שתהיה פונקציה כלשהי 1-1-ע ועל מהטבעיים לקטע.
נניח איפוא,בשלילה שיש $f:N \to [0,1]$ 1-1-ע ועל. מכיוון שכל מספר ממשי ניתן להצגה יחידה כשבר עשרוני אינסופי (עם מספר אינסופי של ספרות שונות מאפס), נוכל לרשום:

$$\begin{array}{llllllll}
f(1) & = & 0\,. & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\cdots \\
f(2) & = & 0\,. & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\cdots \\
f(3) & = & 0\,. & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\cdots \\
f(4) & = & 0\,. & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\cdots \\
f(5) & = & 0\,. & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}\cdots \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

נתבונן עתה במספר - $b = .\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots$ הנוצר על-ידי בחירת $b_n \neq a_{nn}$
ו- $b_n \neq 0$ לכל n. b בקטע $[0,1]$, אבל אין k כך ש- $f(k) = b$
כי לכל k $b_k \neq a_{kk}$. מכאן f איננה על !!!

פרק 4 - **שמושים כלכליים**

4.1 - פונקצית תועלת

בדיונים בתיאוריה כלכלית מקובל בדרך-כלל להניח שפרט מביא למקסימום את תועלתו כאשר פונקצית התועלת "מייצגת" את העדפתו.

מה פרוש הדבר ש"פ' התועלת מייצגת העדפת פרט"?

האם תמיד ניתן ל"ייצג" העדפה על-ידי פונקצית תועלת?

ונתחיל בהגדרה פורמלית:

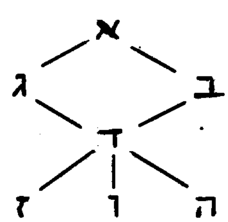
<u>הגדרה:</u> תהא A קבוצה ו- $\precsim$ קוואזי סדר קשיר על A.

פונקציה $u:A \to R$ (R - הממשיים) תיקרא <u>פונקצית תועלת המייצגת את $\precsim$</u>

אם לכל $x,y \in A$ - $x \precsim y$ אםם $u(x) \leq u(y)$.

פונקצית תועלת מעתיקה את איברי הקבוצה A (עליה מוגדר היחס) לתוך המספרים הממשיים, תוך שהיא "משמרת" את היחס במובן שלכל שני אברים x,y היחס $\precsim$ בין x ו- y זהה ליחס $\leq$ בין u(x) ו- u(y).

<u>דוגמאות:</u>



(1) הדיאגרמה הבאה מציגה את היחס המוגדר על

$A = \{$א,ב,ג,ד,ה,ו,ז$\}$

הפונקציות $u:A \to R$ $v:A \to R$ הבאות הינן

דוגמאות לפונקציות תועלת המייצגות את $\precsim$:

u(א) = 73.1	u(א) = 4
u(ב) = v(ג) = 16.243	u(ב) = u(ג) = 3
u(ד) = π	u(ד) = 2
u (ח) = u(ו) = u(ז) = 0	u(ה) = u(ח) = u(ז) = 1

(2) על-יד כביש ישר שארכו 100 מ', קיימת תוכנית לחפור בור מים ונזהה את "הכביש" עם הקטע [0,100] . פרט גר בנקודה $0 \leq a \leq 100$ והעדפתו לגבי מקום חפירת הבור הינה ביחס הפוך למרחק הבור מביתו.

במקרה זה $A = [0,100]$ ופונקציות תועלת מתאימות הן למשל

$u(x) = -|x - a|$ ו- $v(x) = 100 - (x - a)^2$

(3) העדפת פרט על קבוצת הסלים בני שתי סחורות נקבעת לפי סכום הפריטים.

פונקציות תועלת המייצגות את העדפתו הן למשל - $(A = R^2_+)$

$u(x,y) = x + y$ $\quad v(x,y) = (x + y)^2$ $\quad w(x,y) = \ell n(x + y)$.

ראינו שיתכן שיחס העדפה יהיה ניתן ל"ייצוג" על-ידי יותר מפונקצית תועלת אחת.

המשפטים הבאים מאפיינים את הקשר בין פונקציות תועלת המייצגות אותו יחס:

<u>משפט:</u> יהא $\precsim$ קוואזי סדר קשיר על A ותהא f פונקצית תועלת המייצגת אותו.

תהא $f:I(u) \to R$ פונקצית מונוטונית עולה חזק $(f(x) \le f(y) \Leftrightarrow x \le y)$

אזי גם $f \circ u:A \to R$ פונקצית תועלת המייצגת את $\precsim$.

<u>הוכחה:</u> $f \circ u\,(x) \le f \circ u(y)$

אםם $f(u(x)) \le f(u(y))$ (הרכבת פונקציות)

אםם $u(x) \le u(y)$ (f מונוטונית עולה חזק)

אםם $x \precsim y$ (u מייצגת את $\precsim$)

<u>משפט:</u> יהא $\precsim$ קוואזי סדר קשיר על A ו- u ו- v פ' תועלת המייצגות אותו. אזי

יש $f:I(u) \to R$ מונוטונית עולה חזק כך ש- $f \circ u = v$.

<u>הוכחה:</u> <u>שלב 1 - הגדרת f</u>

יהא $x \in I(u)$. יש $a \in A$ כך ש- $u(a) = x$, ונגדיר $f(x) = v(a)$.

<u>שלב 2 - נראה שבחירת a בשלב 1 אינה משנה את הגדרת f</u>

יהיו $a,b \in A$ מקיימים $u(a) = u(b) = x$. u מייצגת את $\precsim$ ולכן $a \sim b$.

גם v מייצגת את $\precsim$ ולכן $v(a) = v(b)$.

<u>שלב 3 - $f \circ u = v$</u>

שלב 2 מבטיח ש- $f \circ u(a) = f(u(a)) = v(a)$

שלב 4 - f מונוטונית עולה חזק

יהיו $x < y$ שניהם ב-$I(u)$.

מהגדרת $I(u)$ יש $a,b \in A$ כך ש- $u(a) = x$ $u(b) = y$.

u מייצגת את $\precsim$ - לכן $x = u(a) < u(b) = y \Rightarrow a \not\succsim b$.

לכן גם $v(a) < v(b)$ אבל $f(y) = v(b)$ ו- $f(x) = v(a)$

ולכן $f(x) < f(y)$. (ומכאן $x \le y \Leftrightarrow f(x) \le f(y)$).

הדוגמה הבאה עונה לשאלה האם תמיד ניתן לייצג יחס העדפה על-ידי פונקצית תועלת:

דוגמה: על R_+^2 הגדרנו את יחס המילוני (הלקסיקוגרפי) באופן הבא:

$(x_1,y_1) \le_L (x_2,y_2)$ אמם $x_2 < x_1$, או, $x_2 = x_1$ ו- $y_2 \le y_1$.

(סל עדיף על משנהו אם יש בו יותר מהסחורה - x או שהסחורה x נמצאת בשני הסלים בכמויות שוות ויש בו יותר מהסחורה y).

משפט: אין פונקצית תועלת המייצגת את $\le_L$.

הוכחה: נניח ש- u מייצגת את $\le_L$.

נשים לב שלכל x $(x,1) <_L (x,0)$ ולכן $u(x,0) < u(x,1)$.

בין כל שני מספרים יש מספר רציונלי, נבחר $u(x,0) < r_x < u(x,1)$.

טענה: אם $x < y$ אזי $r_x < r_y$.

הוכחה: $(x,0) <_L (x,1) <_L (y,0) <_L (y,1)$

לכן - $u(x,o) < r_x < u(x,1) < u(y,0) < r_y < u(y,1)$.

נגדיר $f:R_+ \to Q$ $f(x) = r$.

מהטענה נובע ש- f 1-1 ומכאן ניתן להגיע לסתירה לכך ש $[0,1]$ איננו בן-מניה.

למשפט האחרון יש לכאורה משמעות "חמורה". יחס הסדר המילוני אינטואיטיבי מאד אך איננו ניתן לייצוג ע"י פונקצית תועלת. לכן, האם אין בהנחת התיאוריה הכלכלית על אפשרות הייצוג משום צמצום משמעותי בדיון הרצוי?

ללא הוכחה נצטט משפט (דברו) האומר שבהנחות סבירות לגבי יחס העדפה, קיימת פונקצית תועלת המייצגת אותו (שהיא אפילו פונקציה רציפה).

יחס קוואזי-סדר על R_+^2 ייקרא רציף אם מהעובדה שהסל (a,b) עדיף על (c,d) נובע שגם אם "נזוז" מעט מ- (a,b) עדיין הסל החדש יהיה עדיף על (c,d).

<u>משפט:</u> קוואזי סדר קשיר ורציף על R_+^2 ניתן לייצוג על-ידי פונקצית תועלת רציפה.

במה "חטאו" של היחס המילוני שאין לו פונקצית תועלת? בשים לב שהיחס המילוני אינו רציף. $(1,1) <_L (1,0)$ אבל לכל $x < 1$ (ויהיה קרוב כרצוננו ל-1) $(x,1) >_L (1,0)$!

<u>4.2 בחירה ניתנת לרציונליזציה</u>

עד כאן הזכרנו שתי צורות לאפיון התנהגותו של פרט במערכת כלכלית: יחס העדפה ופונקצית תועלת. בסעיף זה נציג דרך שלישית - פונקצית בחירה - ונעמוד על הקשר בינה ובין יחס העדפה.

בבסיס הדיון קבוצת אפשרויות - Ω (בבעית הצרכן נבחר ב- $\Omega = R_+^2$)

בהינתן קבוצה $S \subseteq \Omega$ (למשל קבוצת תקציב), אנו מסמנים ב- $C(S)$ את קבוצת האפשרויות ב- S מהן הפרט יבחר אחת ואשר ביניהן הוא "אדיש".

בצורה פורמלית - <u>פונקצית בחירה</u> היא פונקציה $C:2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$

המקיימת (1) לכל S - $C(S) \subseteq S$

(2) לכל $S \neq \phi$ - $C(S) \neq \phi$.

נעיין בשתי הדוגמאות הבאות: $\Omega = \{1,2,3\}$

א. $C(\{2,3\}) = \{3\}$ $C(\{1,3\}) = \{3\}$ $C(\{1,2\}) = \{2\}$ $C(\Omega) = \{3\}$

$C(\{3\}) = \{3\}$ $C(\{2\}) = \{2\}$ $C(\{1\}) = \{1\}$ $C(\phi) = \phi$

לפונקצית בחירה זו "הסבר": ה"הבוחר" מעדיף לפי הדרוג - $3 \succ 2 \succ 1$, ובהינתן קבוצת אפשרויות הוא בוחר את העדיפה ביותר.

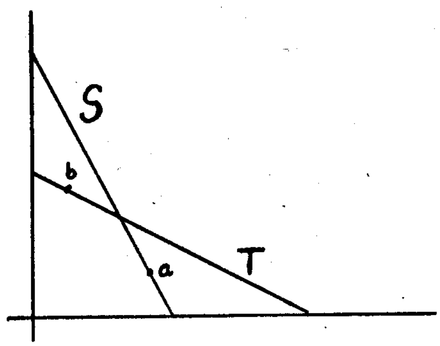
ב. C מקיימת $C(\{1,2,3\}) = \{1\}$ ו- $C(\{1,2\}) = \{2\}$.

C אינה ניתנת ל"הסבר" כמו ב-א שכן אם יש יחס העדפה $\succsim$ ה"מסביר" את C

אזי $1 \nprec 2$ ולא $2 \nprec 1$ (כי $C(\{1,2\}) = \{2\}$)

אך $2 \nprec 1$ ($C(\Omega) = \{1\}$).

<u>הגדרה</u>: פונקצית בחירה תיקרא <u>ניתנת לרציונליזציה</u> אם יש יחס $\precsim$ (על Ω) רפלקסיבי, טרנזיטיבי וקשיר כך ש- $C(s) = \{x \mid s \in S \text{ לכל } s \precsim x\}$



בדיון בתורת הצרכן הנחנו שבהיות S ו- T קבוצות תקציב כמשורטט בציור אזי אם הצרכן בוחר ב- a כשקבוצת התקציב שלו הינה S. הוא לא יבחר ב- b כשקבוצת התקציב שלו - T.

נכליל הנחה זו:

<u>הגדרה</u>: תהא C פונקצית בחירה המקיימת שלכל $S,T \subseteq \Omega$ ולכל $x,y \in S \cap T$ אם $x \in C(T)$ ו- $y \notin C(T)$ אזי $y \notin C(S)$. במקרה זה נאמר על C שהיא מקיימת את <u>אקסיומת ההעדפה המתגלה</u>.

את הקשר בין שתי התכונות של פונקצית בחירה שציינו מביא המשפט הבא:

<u>משפט</u>: פונקצית בחירה C מקיימת את אקסיומת ההעדפה המתגלה אם ורק אם C ניתנת לרציונליזציה.

<u>הוכחה</u>: א - נניח ש- C ניתנת לרציונליזציה ונוכיח שהיא מקיימת האקסיומה.

תהיינה $T \subseteq \Omega$, ו- $a,b \in S \cap T$ ונניח $a \in C(T)$ ו- $b \notin C(T)$.

לפי הגדרת ניתנת לרציונליזציה יש יחס רפלקסיבי, טרנזיטיבי וקשיר - כך ש- $C(S) = \{x \mid s \in S \text{ לכל } s \precsim x\}$.

$a \precsim b$ כי אם $b \precsim a$, אזי מכיוון שלכל $x \in T$ $x \precsim a$,

ובגלל טרנזיטיביות $\precsim$, נקבל שלכל $x \in T$ $x \precsim b$, ולכן

$b \in C(T)$; בסתירה להנחה ש- $b \notin C(T)$.

כל $x \in C(S)$ מקיים שלכל $s \in S$, $s \precsim x$ ובפרט $a \precsim x$; לכן $b \notin C(S)$.

ב - נניח ש- C מקיימת האקסיומה ונוכיח ש- C ניתנת לרציונליזציה.

נגדיר יחס על Ω -

$a \precsim b$ אמם $b \in C(\{a,b\})$,

1. $\precsim$ רפלקסיבי.

לכל $a \in \Omega$ $C(\{a\}) = \phi$. לכן $C(\{a,a\}) = \{a\}$ ולפי הגדרת $\precsim$,

$a \precsim a$.

2. $\precsim$ טרנזיטיבי.

יהיו $b \precsim c$ ו- $a \precsim b$.

לפי הגדרת $\precsim$ $c \in C(\{b,c\})$ ו- $b \in C(\{a,b\})$.

נבחין בין שתי אפשרויות:

(א) $b \notin C(\{a,b,c\})$.

$a \notin C(\{a,b,c\})$ (כי אם $a \in C(\{a,b,c\})$ אזי מהאקסיומה $b \notin C(\{a,b\})$)

לכן $C(\{a,b,c\}) = \{c\}$ (כי לכל S, $C(S) \neq \phi$)

ולכן מהאקסיומה $a \notin C(\{a,c\})$.

ומכאן $C(\{a,c\}) = \{c\}$ (לכל S $C(S) \neq \phi$)

ולכן לפי הגדרת $\precsim$, $a \precsim c$.

(ב) $b \in C(\{a,b,c\})$.

$c \in C(\{a,b,c\})$ (כי אם $c \in C(\{a,b,c\})$ אזי $c \notin C(\{b,c\})$)

לכן - $c \in C(\{a,c\})$ (אחרת $c \in C(\{a,b,c\})$)

ולפי הגדרת $\precsim$, $a \precsim c$.

3. $\precsim$ קשיר

$C(\{a,b\}) \neq \phi$ ולכן $a \precsim b$ או $b \precsim a$.

נותר להראות ש- $C(S) = \{a \mid x \precsim a \text{ לכל } x \in S\}$.

<u>נניח $a \in C(S)$</u> אם יש $x \in S$ $x \not\precsim a$ אזי בגלל הקשירות $a \precsim x$

ו- $C(\{a,x\}) = \{x\}$, ולכן $a \notin C(S)$. סתירה!

<u>נניח a מקיים $x \precsim a$ לכל $x \in S$.</u>

אם $a \notin C(S)$ יש $b \neq a$ $b \in C(S)$.

לכן $a \notin C(\{a,b\})$ (אחרת $a \in C(S)$) ולכן $b \not\precsim a$. קיבלנו סתירה לכך ש- $x \precsim a$

לכל $x \in S$.

חלק ב'

פרק 1 - מושגים ראשוניים במרחב הממשי ה-ת ממדי

1.1 המרחב R^n

בסימון R^n נציין את קבוצת ה-ת-יות של מספרים ממשיים. אברי R^n יקראו **וקטורים** או **נקודות**.

עבור x ב-R^n יציין x_i את הרכיב ה-i שלו, דהיינו $x = (x_1,\dots,x_n)$. על אברי R^n מוגדרות פעולות החבור והכפל בסקלר:

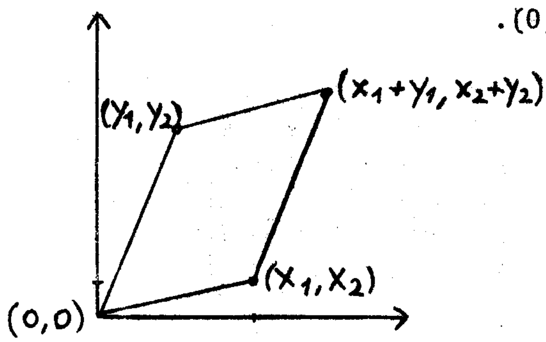
החבור - לכל $(x_1,\dots,x_n)$ ו- $(y_1,\dots,y_n)$ ב-R^n

$$(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n)$$

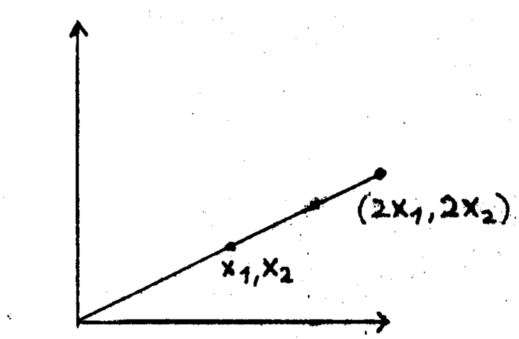
והכפל בסקלר (מספר ממשי) - לכל $(x_1,\dots,x_n)$ ב-R^n ו-λ ממשי

$$\lambda(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

את R^1 ניתן לזהות עם הישר הממשי. את R^2 ניתן לזהות עם המישור, ובמרחב זה ניתן לתת הצגה גאומטרית לפעולות הנ"ל. הוקטור $(x_1 + y_1 , x_2 + y_2)$ המתקבל כסכום של הוקטורים (x_1,x_2) ו- (y_1,y_2) מוצג בשרטוט הבא כקודקוד הרביעי במקבילית אשר שלשת קודקודיה האחרים הם: (x_1,x_2) , (y_1,y_2) ו-$(0,0)$.



הוקטור $(2x_1 ,2x_2)$ המתקבל מ- (x_1 ,x_2) על-ידי כפל ב-2 הינו וקטור בעל "כוון" זהה לזה של (x_1 ,x_2) אך בעל "אורך" כפול (מושג האורך יוסבר בסעיף 1.3).



R^n עם הפעולות הנ"ל הינו מרחב וקטורי (במובן האלגברי). את הוקטור $(0,\ldots,0)$ נסמן בהמשך ב-0, והקורא יצטרך לשים לב לכך שלעיתים 0 הוא מספר ולעיתים וקטור.

נבחין בין הוקטור $(x_1,\ldots,x_n)$ והקבוצה $\{x_1,\ldots,x_n\}$: $(x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_n)$ אם $x_i = y_i$ לכל $1 \le i \le n$, ולעומת זאת $\{x_1,\ldots,x_n\} = \{y_1,\ldots,y_n\}$ אם לכל i $x_i \in \{y_1,\ldots,y_n\}$ וכן $y_i \in \{x_1,\ldots,x_n\}$.

1.2 מכפלה פנימית

פעולה נוספת שנגדיר על אברי R^n היא המכפלה הפנימית (הסקלרית), אשר מתאימה לכל זוג וקטורים ב-R^n מספר ממשי.

__הגדרה:__ יהיו $x,y \in R^n$, המכפלה הפנימית של x ו-y הינה

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

__דוגמא:__ בהנתן וקטור מחירים $p = (p_1,\ldots,p_n)$ וסל $x = (x_1,\ldots,x_n)$, המכפלה הפנימית

$$p \cdot x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

מציינת את מחירו של הסל x במערכת המחירים p.

נוכיח עתה מספר תכונות של המכפלה הפנימית.

__טענה:__ לכל $x,y,z \in R^n$ מתקיים

1. $x \cdot y = y \cdot x$
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
3. לכל $\lambda \in R$, $x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y)$
4. $x \cdot x \ge 0$
5. $x \cdot x = 0$ אם ורק אם $x = (0,\ldots,0)$

__הוכחה:__ .1

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = y \cdot x$$

.2

$$x \cdot (y + z) = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = x \cdot y + x \cdot z$$

.3

$$(\lambda y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda y_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \lambda(x \circ y)$$

.4

$$x \circ x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

(מכיוון שזהו סכום של מספרים אי שליליים).

.5 נניח $x \circ x = 0$. אזי $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, ומכיוון שכל אחד מהמחוברים אי שלילי וסכומם אפס, נובע שכל אחד מהם אף הוא אפס.

לכן $x = (0,\dots,0)$.

ובכוון השני, אם $x = (0,\dots,0)$ אזי ברור כי $x \circ x = 0$.

1.3 אי שוויון קושי שורץ

ב-R, מרחקה של הנקודה x מהראשית הוא $|x| = \sqrt{x^2}$. ב-R^2, מרחקה של הנקודה $x = (x_1, x_2)$ מהראשית הינו (לפי משפט פיתגורס) $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, או בסימון אחר

$$\sqrt{x \circ x}$$

גם ב- R^3, מרחקה של הנקודה $x = (x_1,x_2,x_3)$ מהראשית הינו

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x \circ x}$$

מכאן הרחבת המושג ל-R^n :

<u>הגדרה:</u> לכל וקטור $x \in R^n$, הנורמה של x הינה

$$||x|| = \sqrt{x \circ x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

לכל $x,y \in R^n$ המרחק בין x ל-y הינו

$$d(x,y) = ||x - y||$$

לכל $x \in R^n$ קיים $||x|| = d(x,0)$ ולכן הנורמה של הוקטור x שווה למרחקה של הנקודה x מהראשית.

<u>משפט (אי שוויון קושי שורץ)</u>: לכל $x,y \in R^n$ קיים $||x|| \cdot ||y|| \leq |x \circ y|$. שוויון קיים אם ורק אם יש $\lambda \in R$ כך ש- $x = \lambda y$ או ש- $y = 0$ (כלומר כאשר x ו-y תלויים ליניארית)

<u>הוכחה</u>: צריך להוכיח כי

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac12} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac12}$$

לכל t ממשי קיים

$$0 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - ty_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)t + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)t^2$$

נסמן $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ ו- $C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

לפיכך לכל t ממשי

$$Ct^2 - 2Bt + A \ge 0$$

אם לכל i $y_i = 0$ אזי אי השוויון המבוקש ברור. אחרת יש i כך ש- $y_i \ne 0$ וקיים $C > 0$ (והביטוי $Ct^2 + Bt + A$ מתאר פרבולה "ישרה"). לכן למשוואה הרבועית

$$Ct^2 - 2Bt + A = 0 \qquad (*)$$

יש לכל היותר פתרון אחד. מכאן נקבל שהדיסקרמיננטה שלה אינה חיובית, דהינו

$$4B^2 - 4AC \le 0$$

או

$$|B| \le \sqrt{A}\ \sqrt{C}$$

כלומר קבלנו את המבוקש.

אם באי השוויון האחרון קיים שוויון ו- $y \ne 0$, אזי למשוואה (*) יש פתרון λ ולכן $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda y_i)^2 = 0$. מכאן שלכל i $x_i = \lambda y_i$ ולכן $x = \lambda y$.
אם $y = 0$ או $x = \lambda y$ קל לראות ש- $|x \cdot y| = ||x||\ ||y||$.

נביא כאן שלוש הגדרות שנזדקק להן בהמשך ואשר מתבססות על מושג הנורמה.

<u>הגדרה</u>: סדרה $\{x^k\} \in R^n$ של וקטורים שואפת (מתכנסת) ל- $x \in R^n$ $\left(x^k \underset{k\to\infty}{\to} x\right)$ אם קיים $\lim_{k\to\infty} ||x^k - x|| = 0$

<u>הערה</u>: התכנסות ב-R^n שקולה להתכנסות בכל קואורדינטה, כלומר אם $x^k = \left(x_1^{\ k},\dots,x_n^{\ k}\right)$ אזי תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- $x^k \underset{k\to\infty}{\to} x$ הוא שלכל $1 \le i \le n$ קיים $x_i^{\ k} \underset{k\to\infty}{\to} x_i$.

הגדרה: קבוצה $A \subset R^n$ תקרא **סגורה** אם לכל סדרה $\{x^k\}$ של וקטורים ב-A המתכנסת לוקטור x, קיים גם $x \in A$.

הגדרה: קבוצה $A \subset R^n$ תקרא **חסומה** אם יש M ממשי כך שלכל $x \in A$ קיים $||x|| < M$.

1.4 אי שוויון המשולש

משפט גאומטרי קובע שאורך צלע במשולש

קטן מסכום אורכי הצלעות האחרות.

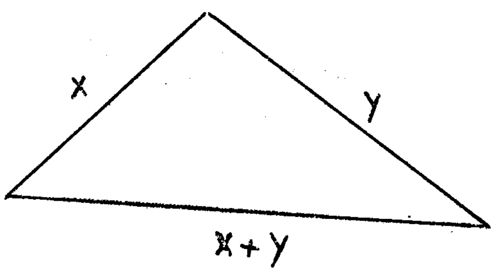
ניתן להביע משפט זה בצורה

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

תוך שימוש במשמעות הגיאומטרית של הוקטור

ב-R^2 (ראה שרטוט).

הכללת משפט זה ל-R^n הינה המשפט הבא.



משפט (אי שוויון המשולש):

לכל $x,y \in R^n$ קיים

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

שוויון קיים אם ורק אם יש $\lambda \geq 0$ כך ש- $x = \lambda y$ או ש- $y = 0$.

הערה: עבור $n = 1$ אי שוויון המשולש הינו אי השוויון

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

הוכחה:

$$||x + y||^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

לפי אי שוויון קושי שוורץ (סעיף 1.3) קיים

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq (\Sigma x_i^2)^{\frac{1}{2}} (\Sigma y_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

ולכן

$$||x+y||^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 =$$

$$= ||x||^2 + 2||x||\ ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

מכאן

$$.||x+y|| \le ||x|| + ||y||$$

אם קיים שוויון באי השוויון האחרון אזי קיים שוויון גם באי שוויון קושי שוורץ

ולכן $y = 0$ או ש- $y \neq 0$ ו- $x = \lambda y$.

נראה כי אם $x = \lambda y$ אזי $\lambda \ge 0$.

$$||x+y|| = ||\lambda y + y|| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 (1+\lambda)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |1+\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = |1+\lambda|\ ||y||$$

בעוד ש-

$$||x|| + ||y|| = ||y|| + ||\lambda y|| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (1+|\lambda|)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = (1+|\lambda|)\ ||y||$$

מכאן

$$1 + |\lambda| = |1+\lambda|$$

ולכן $\lambda \ge 0$.

אם $y = 0$ או $x = \lambda y$ עבור $\lambda \ge 0$, קל לראות כי מתקיים שוויון באי שוויון המשולש.

1.5 פונקציה ב-n משתנים

תהי $A \subset \mathbf{R}^n$.

פונקציה ממשית (סקלרית) $f : A \to \mathbf{R}$ ב-n משתנים הינה התאמה המגדירה לכל $x \in A$ ערך ממשי יחיד $f(x)$. הקבוצה A נקראת **תחום הפונקציה**, והקבוצה $\{y |\ f(x) = y$ כך ש- $x \in A$ יש$\}$ נקראת **טווח הפונקציה**.

דוגמא:

$$f(x_1,x_2) = +\sqrt{x_1x_2}$$

התחום של פונקציה זו הינו הקבוצה

$$\{(x_1,x_2) \in R^2 \mid x_1x_2 \geq 0\}$$

בעוד שהטווח הוא

$$\{ x \in R \mid x \geq 0\}$$

1.6 רציפות

הגדרה: תהי $A \subset R^n$. פונקציה $f : A \to R$ נקראת רציפה ב-$x^o \in A$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $y \in A$ אז

$$||y - x^o|| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x^o)| < \varepsilon$$

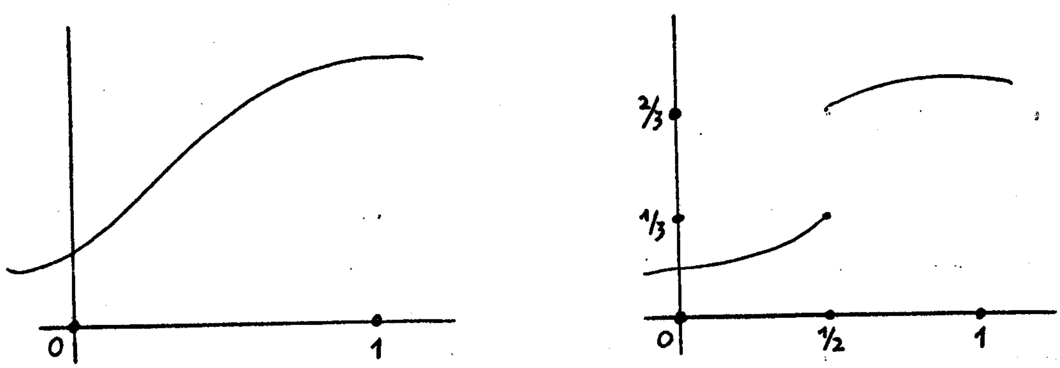
נביא עתה הגדרה נוספת, השקולה לקודמת.

הגדרה: $f : A \to R$ רציפה ב- $x^o \in A$ אם לכל סדרה $\{x^k\} \in A$ השואפת ל-x^o קיים

$$\lim_{k \to \infty} f(x^k) = f(x^o)$$

הגדרה: $f : A \to R$ נקראת רציפה אם לכל $x \in A$ f רציפה ב-x.

בשרטוט הבא נדגים את ההבדל שבין פונקציה רציפה לבין פונקציה לא רציפה.



הפונקציה שבשרטוט השמאלי רציפה בקטע $[0,1]$, בעוד שבשרטוט הימני מופיעה פונקציה שאינה רציפה בקטע זה כי אם $x^k \to \frac{1}{2}$ ו- $x^k > \frac{1}{2}$ לכל k אז $\lim f(x^k) = \frac{2}{3}$ בעוד שאם לכל k $x^k < \frac{1}{2}$ נקבל כי $\lim f(x^k) = \frac{1}{3}$. בפונקציות שאינן רציפות יש "קפיצות", בעוד שבפונקציות רציפות אין כאלה.

<u>**דוגמא:**</u> נבדוק האם הפונקציה $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ רציפה בנקודה $(1, 1)$.

יהי $\varepsilon > 0$. יש למצוא $\delta > 0$ כך שאם

$$\|(x_1, x_2) - (1, 1)\| = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2} < \delta$$

אזי

$$|f(x_1, x_2) - f(1, 1)| = |x_1 \cdot x_2 - 1| < \varepsilon$$

אם $\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2} < \delta$ אזי גם $|x_2 - 1| < \delta$ וכן $|x_1 - 1| < \delta$

נבחר $\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$ ואזי אם $h = x_1 - 1$, $g = x_2 - 1$ וכן $|h| < \delta$

ו- $|g| < \delta$ נקבל כי

$$|f(x_1, x_2) - 1| = |(1 + h)(1 + g) - 1| = |h + g + hg| \le$$

$$\le |h| + |g| + |h|\,|g| < \delta + \delta + \delta^2 < 3\delta < \varepsilon$$

ולכן f רציפה ב- $(1, 1)$.

נראה שהפונקציה הנ"ל רציפה גם לפי ההגדרה השקולה.

תהי $x^k = (x_1^k, x_2^k) \to (1, 1)$. יש להראות כי

$$\lim_{k \to \infty} f(x_1^k, x_2^k) = 1$$

קיים $x_1^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$ וכן $x_2^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$, כמו כן ידוע כי

$$\lim_{k \to \infty} a^k \cdot b^k = \lim_{k \to \infty} a^k \cdot \lim_{k \to \infty} b^k$$

ולכן

$$\lim_{k \to \infty} f(x_1^k, x_2^k) = \lim_{k \to \infty} x_1^k \cdot x_2^k = \lim_{k \to \infty} x_1^k \cdot \lim_{k \to \infty} x_2^k = 1 \cdot 1 = 1$$

ומכאן נובעת הציפות f בנקודה $(1, 1)$.

נביא עתה משפט שמושי על פונקציות רציפות.

משפט: (ללא הוכחה). תהי $A \subset R^n$ ו- $f : A \to R$. אם A סגורה וחסומה אזי יש $x^o \in A$ כך שלכל $y \in A$ קיים

$$f(x^o) \geq f(y)$$

(כלומר f מקבלת מכסימום ב-A. נזכיר כי f פונקציה רציפה).

1.7 נגזרת חלקית

הגדרה: יהיו $A \subset R^n$, $x^o = (x_1{}^o, \ldots, x_n{}^o) \in A$ ו- $f : A \to R$. f גזירה לפי המשתנה x_i בנקודה x^o אם קיים הגבול

הגבול

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(x_1{}^o, \ldots, x_{i-1}^o, x_i^o + h, x_{i+1}^o, \ldots, x_n{}^o) - f(x_1{}^o, \ldots, x_n{}^o)}{h}$$

(בביטוי האחרון רק x_i מקבל תוספת של h).

לגבול הנ"ל קוראים הנגזרת החלקית של f לפי x_i בנקודה x^o ומסמנים אותו באחד מהסימנים הבאים:

$$f_{x_i}(x^o), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^o)$$

אם לכל $x \in A$ קיימת הנגזרת $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ נוכל להגדיר פונקציה חדשה $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ אשר התחום שלה הוא כל A.

דוגמא:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

נמצא את הנגזרת החלקית של f לפי x_1 בנקודה (0, 1). לשם כך נגזור את f לפי x_1 ונתייחס ל-x_2 כאל קבוע. לפי נוסחת נגזרת המנה נקבל

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1 \cdot (x_1 + x_2) - 1 \cdot (x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{2x_2}{(x_1 + x_2)^2}$$

ולכן

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(1, 0) = 0$$

בפונקציות של משתנה אחד, קיום הנגזרת גורר את רציפות הפונקציה.

בפונקציות של מספר משתנים לא קיים מושג ה"נגזרת", אך ניתן היה לחשוב שקיום כל הנגזרות החלקיות מבטיח את רציפות הפונקציה.

נביא דוגמא המראה שאין הדבר כך.

<u>דוגמא:</u>

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

לפונקציה זו יש נגזרות חלקיות לפי x_1 ו-x_2 בנקודה (0, 0). כדי להוכיח זאת נסתכל במנה

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

מנה זו אינה תלויה ב-h ולכן

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

באופן דומה נקבל

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$$

ולכן הנגזרות החלקיות קיימות.

נראה עתה כי f אינה רציפה ב- (0, 0). לאורך קו מהצורה $x_2 = tx_1$ הערך של f יהיה

$$f(x_1, tx_1) = \frac{x_1 \cdot tx_1}{x_1^2 + t^2 x_1^2} = \frac{t \cdot x_1^2}{(1 + t^2)\, x_1^2} = \frac{t}{1 + t^2}$$

ולכן נקבל

$$\lim_{(x_1, tx_1) \to (0, 0)} f(x_1, tx_1) = \frac{t}{1 + t^2}$$

עבור ערכים שונים של t נקבל גבולות שונים של f, ולכן f אינה רציפה ב- (0, 0).

<u>1.8 נגזרת כוונית</u>

<u>הגדרה:</u> תהי $A \subset R^n$ ו- $x^0 \in A$. תהי $f : A \to R$ ויהי $d \in R^n$. אם קיים הגבול

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x^0 + \varepsilon d) - f(x^0)}{\varepsilon}$$

אזי הוא נקרא הנגזרת החלקית של **f** בכוון **d** בנקודה x_0.

<u>דוגמא:</u> תהי $f : R^2 \to R$ הניתנת על-ידי $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. הנגזרת בכוון $d = (d_1, d_2)$, בנקודה (x_1, x_2) היא

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f((x_1, x_2) + \varepsilon(d_1, d_2)) - f(x_1, x_2)}{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_1 + \varepsilon d_1, \ x_2 + \varepsilon d_2) - f(x_1, x_2)}{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x_1 + \varepsilon d_1 + 2(x_2 + \varepsilon d_2) - (x_1 + 2x_2)}{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon d_1 + 2\varepsilon d_2}{\varepsilon} = d_1 + 2d_2$$

<u>הערה:</u> נגזרת חלקית הינה מקרה פרטי של נגזרת כוונית, כי

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x^0 + \varepsilon e_i) - f(x^0)}{\varepsilon}$$

באשר e_i הוא וקטור שכל רכיביו אפסים מלבד הרכיב ה-i ששווה לאחד.

<u>דיפרנציאביליות והגרדיאנט</u>

[illegible] $\in R^n$ [illegible]

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - df_x(h)}{||h||} = 0$$

תקרא הדיפרנציאל של f בנקודה x

<u>הערה:</u> אם קיים דיפרנציאל אזי הוא יחיד

הדיפרנציאל הינו קרוב לינארי לשינוי ב-f הנגרם על-ידי תזוזה קטנה h מ-x.

עבור $f : R \to R$ גזירה, הדיפרנציאל קיים לכל x ומתקיים

$$df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

<u>הגדרה:</u> הוקטור $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ נקרא הגרדיאנט של f בנקודה x.

<u>משפט:</u> (ללא הוכחה). תהי $f:R^n \to R$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בסביבת נקודה x, אזי יש לה דיפרנציאל באותה נקודה, ומתקיים

$$df_x(h_1,\ldots,h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, h_n = \nabla f(x) \cdot (h_1,\ldots,h_n)$$

<u>דוגמא:</u>

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$$

קיים

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2$$

ולכן

$$\nabla f(x) = (2x_1, 3x_2^2)$$

נמצא את הדיפרנציאל של f בנקודה $(2, 2)$.

לפי המשפט האחרון קיים

$$df_{(2,\,2)}(h_1, h_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(2, 2), \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(2, 2)\right) \cdot (h_1, h_2) =$$

$$= (4, 12) \cdot (h_1, h_2) = 4h_1 + 12h_2$$

נראה כי $df_x(h)$ מהווה קרוב ל- $f(x + h) - f(x)$.

יהי $x = (2, 2)$ ו- $h = (1, 0)$. קיים

$$\Delta f_x = f(x + h) - f(x) = f(3, 2) - f(2, 2) = 17 - 12 = 5$$

וכן $df_{(2,2)}(1, 0) = 4$

הקרוב משתפר ככל ש- $||h||$ קטן.

<u>הערה:</u> מהגדרת הדיפרנציאל נובע כי ניתן לרשום $f(x + h) - f(x) - df_x(h) = \beta(h)||h||$ כאשר $\beta(h) \to 0$, או בצורה אחרת (עבור פונקציה בת שני משתנים) $||h|| \to 0$

$$\Delta f_x = f_{x_1}(x)h_1 + f_{x_2}(x)h_2 + \alpha(h)$$

באשר

$$\lim_{||h|| \to 0} \alpha(h)/||h|| = 0$$

<u>משפט:</u> תהי $f : R^n \to R$ דיפרנציאבילית ב- $x \in R^n$ (כלומר יש לה דיפרנציאל שם) אזי לכל $d \in R^n$ קיים השוויון

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon} = df_x(d) = \nabla f(x) \cdot d$$

כלומר לכל $d \in R^n$ קיימת נגזרת בכוון d והיא שווה למכפלה הפנימית של הוקטור d והגרדיאנט של f בנקודה x.

<u>הוכחה:</u> מהגדרת הדיפרנציאל נקבל

$$\lim_{||\varepsilon d|| \to 0} \frac{f(x + \varepsilon d) - f(x) - df_x(\varepsilon d)}{||\varepsilon d||} = 0$$

מכיון ש- df_x לינארית קיים כי $df_x(\varepsilon d) = \varepsilon \cdot df_x(d)$ ולכן

$$\lim_{\varepsilon||d|| \to 0} \frac{1}{||d||} \left(\frac{f(x + \varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon} - df_x(d)\right) = 0$$

מכיון ש-d הינו וקטור קבוע, קיים

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon} - df_x(d) = 0$$

ומכיון ש- $df_x(d)$ אינו תלוי ב-ε נקבל כי

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon} = df_x(d)$$

<u>דוגמא:</u> ראה דוגמא בסעיף 1.8. את אותה תוצאה שקבלנו שם נקבל עתה בדרך אחרת

$$\nabla f(x) \cdot d = (1, 2) \cdot (d_1, d_2) = d_1 + 2d_2$$

1.10 גזירה מורכבת

משפט: יהיו $A \subset R^2$ ו- $f : A \to R$. תהיינה φ ו-ψ מוגדרות בקטע T כך שלכל $t \in T$, $(\varphi(t)\ ,\ \psi(t)) \in A$. אם ל-$f$ נגזרות חלקיות רציפות ו- φ,ψ גזירות אזי הפונקציה המורכבת $F(t) = f(\varphi(t)\ ,\psi(t))$ גזירה ב-T וקיים

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t),\ \psi(t))\ \varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t),\ \psi(t)\ \psi'(t)$$

הוכחה: יהי $t \in T$. נתן ל-t תוספת $\Delta t \neq 0$ כך ש- $t + \Delta t \in T$. φ תקבל תוספת של $\Delta\varphi_t$ ו-ψ תוספת של $\Delta\psi_t$. כתוצאה מכך f תקבל תוספת של $\Delta f_{(\varphi(t),\psi(t))}$ $(= \Delta F_t)$.

לפי הסעיף הקודם קיים

$$\Delta F_t = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t)\ ,\ \psi(t))\ \Delta\varphi_t + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t)\ ,\ \psi(t))\ \Delta\psi(t) + \alpha(\Delta\varphi_t\ ,\ \Delta\psi_t)$$

באשר α פונקציה של $\Delta\varphi_t$ ו- $\Delta\psi_t$ המקיימת

$$\lim_{\Delta\varphi_t,\ \Delta\psi_t \to 0} \alpha(\Delta\varphi_t,\ \Delta\psi_t)\ /\ ||(\Delta\varphi_t,\ \Delta\psi_t)|| = 0$$

נחלק ב-Δt ונקבל:

$$\frac{\Delta F_t}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t),\ \psi(t))\ \frac{\Delta\varphi_t}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t),\ \psi(t))\ \frac{\Delta\psi_t}{\Delta t} +$$

$$+ \frac{\alpha}{||(\Delta\varphi_t\ ,\ \Delta\psi_t)||} \cdot \frac{||(\Delta\varphi_t,\ \Delta\psi_t)||}{\Delta t}$$

אם נשאיף את Δt לאפס אזי גם $\Delta\varphi_t$ ו- $\Delta\psi_t$ ישאפו לאפס ולכן גם הביטוי האחרון.

הביטויים $\frac{\Delta\varphi_t}{\Delta t}$ ו- $\frac{\Delta\psi_t}{\Delta t}$ ישאפו לגבולות $\varphi'(t)$ ו- $\psi'(t)$ ולכן נקבל בגבול

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t),\ \psi(t))\ \varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t),\ \psi(t))\ \psi'(t)$$

1.11 נגזרות מסדר שני

תהי $A \subset R^n$ ותהי $f : A \to R$ בעלת נגזרות חלקיות. הנגזרת החלקית של $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ לפי x_j נקראת נגזרת חלקית מסדר שני של f ומסומנת

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j}$ עבור $i \neq j$ ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ עבור $i = j$.

בדומה לנגזרת חלקית מהסדר הראשון נהוג גם לסמן $f_{x_i x_j}$.

דוגמא: $f(x_1,x_2) = 2x_1^2x_2 + 3x_1x_2^3$.

קיים

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=4x_1x_2 + 3x_2^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)= 2x_1^2 + 9x_1x_2^2$$

ולכן

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x)=4x_2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(x)=4x_1 + 9x_2^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(x)=4x_1+ 9x_2^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x)=18x_1x_2$$

ניתן לראות בדוגמה זו כי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(x)$. ישנו משפט הטוען כי בתנאים מסויימים, שוויון זה קיים תמיד.

משפט: (ללא הוכחה). תהי $A \subset R^n$, ותהי $f : A \to \mathbb{R}$. אם ל-f נגזרות חלקיות רציפות אזי לכל $1 \le i,j \le n$ קיים השוויון הבא

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}$$

(השוויון הינו בין פונקציות).

1.12 משפט טיילור

משפט טיילור: (בלי הוכחה). תהי $A \subset R^n$ ותהי $f : A \to R$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד הסדר השני. אזי לכל $x \in A$ ולכן $h \in R^n$ כך ש-$x + h \in A$ יש $0 \le \theta \le 1$ כך ש-

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x + \theta h)\, h_i h_j$$

(הביטוי השני מימין הינו $\nabla f(x) \cdot h$).

משפט טיילור שמושי כדי להעריך את הפונקציה הנידונה בסביבת הנקודה x, כאשר ידיעותינו הינן על ערך הפונקציה ונגזרותיה בנקודה x בלבד.

בדוגמא הבאה נלך בכוון שונה, ומתוך ידיעת ערך הפונקציה בסביבת x, נחלץ את θ של המשפט, ונראה כי הוא אכן בין אפס לאחד.

__דוגמא:__
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$$
$$x = (x_1, x_2) = (1, 1)$$
$$h = (h_1, h_2) = (1, 1)$$

קיים

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2x_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 3x_2^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(x) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = 6x_2$$

כמו כן

$$f(1, 1) = 2$$
$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(2, 2) = 12$$

נחשב עתה את θ. נציב את הערכים הנתונים בשוויון הבא (המתקבל ממשפט טיילור):

$$(x_1 + h_1)^2 + (x_2 + h_2)^3 = x_1^2 + x_2^3 + (2x_1 h_1 + 3x_2^2 h_2) + \tfrac{1}{2}(2h_1^2 + 6(x_2 + \theta h_2) h_2^2)$$

נקבל

$$12 = 2 + (5) + \tfrac{1}{2}(2 + 6(1 + \theta))$$

ומכאן קל לראות כי $\theta = 1/3$.

1.13 __משפט אוילר__

בשמוש לכמה מהמושגים שנסקרו בפרק זה נביא עתה את משפט אוילר (ראה [1], עמ' 102)

__הגדרה:__ יהי $k \geq 0$. $f : R^n \to R$ תקרא **הומוגנית מסדר k** אם לכל $x \in R^n$ ולכל λ ממשי

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$$

f תקרא **הומוגנית לינארית** אם $k = 1$.

<u>דוגמא:</u>

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

f הינה הומוגנית לינארית מכיון שקיים

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 3(\lambda x_1)^{\frac{1}{2}} (\lambda x_2)^{\frac{1}{2}} = 3\lambda^{\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \lambda 3x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \lambda f(x_1, x_2)$$

<u>משפט אוילר:</u> תהי $f : R^n \to R$. אם f הומוגנית לינארית ובעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון, אזי

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot x_n$$

<u>הוכחה:</u> יהא $x = (x_1,\ldots,x_n)$ קבוע. נגדיר פונקצית עזר חדשה $F : R \to R$ כך ש-

$$F(\lambda) = f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

מכאן נקבל

$$F'(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n$$

(לפי המשפט על גזירה מורכבת בסעיף 1.10).

מכיון ש-f הומוגנית לינארית, קיים גם

$$F(\lambda) = \lambda f(x_1,\ldots,x_n)$$

ולכן

$$F'(\lambda) = f(x_1,\ldots,x_n)$$

ומשתי ההצגות ל-$F'(\lambda)$ נקבל כאשר $\lambda = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)x_n = f(x_1,\ldots,x_n)$$

<u>דוגמא:</u>

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + x_3$$

פונקציה זו הומוגנית לינארית. נבדוק עבורה את נכונות משפט אוילר.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \cdot x_3 = \left(\frac{2x_1}{x_2} - \frac{x_2^2}{x_1^2}\right) x_1 +$$
$$+ \left(-\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{2x_2}{x_1}\right) x_2 + x_3 = \frac{2x_1^2}{x_2} - \frac{x_2^2}{x_1} - \frac{x_1^2}{x_2} +$$
$$+ \frac{2x_2^2}{x_1} + x_3 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + x_3 = f(x_1,x_2,x_3)$$

1.14 אכסטרמום של פונקציה

נניח מעתה כי הפונקציות הנידונות הינן בעלות נגזרות רציפות עד הסדר השני.

הגדרה: תהי $x^o \in R^n$. הקבוצה D תקרא **סביבה של** x^o אם קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$D = \{(x_1,\dots,x_n) \in R^n \mid |x_i - x_i^o| < \delta \quad \text{לכל} \quad 1 \le i \le n\}$$

לדוגמא, ב- R סביבה של x^o הינה קטע ש-x^o הוא מרכזו. ב-R^2 סביבה של x^o היא ריבוע ש-x^o הוא מרכזו.

הגדרה: $f : R^n \to R$ מקבלת **מכסימום** (לוקלי) בנקודה x^o אם קיימת סביבה של x^o כך שלכל y בסביבה קיים $f(x^o) \ge f(y)$

באופן דומה מגדירים **מינימום**.

הגדרה: x^o הוא **אכסטרמום** (נקודת קיצון) של f אם x^o הוא מכסימום או מינימום של f.

אם לכל $y \in R^n$ קיים $f(x^o) \ge f(y)$, אזי x^o הינה **מכסימום גלובלי** של f.

משפט: תהי $f : R^n \to R$. אם x^o אכסטרמום של f וקיימות שם ל-f נגזרות חלקיות לפי כל x_i, אזי לכל $1 \le i \le n$ קיים

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^o) = 0$$

הוכחה: נניח x^o הוא מכסימום. נתבונן בפונקציה

$$g(x_1) = f(x_1, x_2^o,\dots,x_n^o)$$

g מקבלת מכסימום ב-x_1^o, כי לכל x_1 מספיק קרוב ל-x_1^o קיים

$$g(x_1) = f(x_1, x_2^o,\dots,x_n^o) \le f(x_1^o,x_2^o,\dots,x_n^o) = g(x_1^o)$$

עבור פונקציות של משתנה אחד ידוע כי בנקודת אכסטרמום הנגזרת מתאפסת (ראה [4], עמ' 238).

לכן $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^o,\dots,x_n^o) = g'(x_1^o) = 0$$

באותו אופן ניתן להוכיח עבור כל $2 \le i \le n$. כאשר x^o הינה מינימום של f, נתבונן ב- $-f$ אשר עבורה x^o הינה מכסימום.

<u>הגדרה</u>: x^o נקודה קריטית של f אם לכל $1 \le i \le n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^o) = 0$$

על פי המשפט האחרון, כל נקודת אכסטרמום הוא נקודה קריטית. לכן כדי לאתר נקודות אכסטרמום נח למצוא נקודות קריטיות ולבדקן.

<u>דוגמאות</u>:

(1 $$f(x_1, x_2) = 6 - (x_1 - 2)^2 - x_2{}^2$$

קיים

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2(x_1 - 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$$

ולכן נקודה קריטית יחידה היא הנקודה $(2,0)$.

זוהי גם נקודת מכסימום (גלובלית) כי ברור שהערך המכסימלי של f הוא 6 ומתקבל רק ב- $(2, 0)$.

(2 $$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

קיים

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$$

ולכן נקודה קריטית היא הנקודה $(0, 0)$.

זו אינה נקודת אכסטרמום כי $f(0, 0) = 0$ אך לכל h קטן כרצוננו קיים $f(h, h) > 0$ וכן $f(h, -h) < 0$.

1.15 משפטי אכסטרמום ב-R^2

<u>משפט</u>: (ללא הוכחה). תהי $f : R^2 \to R$. תנאי הכרחי לכך ש-x^o אכסטרמום של f הוא שקיים

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}\right)^2 \right](x^o) \ge 0$$

<u>משפט:</u> תהי $f : R^2 \to R$. תנאי מספיק לכך ש-x^o תהיה מכסימום לוקלי ל-f הוא:

(1 $$\nabla f(x^o) = (0, 0)$$

(2 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^o) < 0$$

ו-

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}\right)^2\right](x^o) > 0$$

<u>הוכחה:</u> נכתוב את פתוח טיילור של f בסביבת x^o.

$$f(x^o + h) = f(x^o) + \nabla f(x^o)\cdot h + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(x^o + \theta h)h_i\, h_j$$

כאשר $0 \le \theta \le 1$.

מכיוון ש- $\nabla f(x^o) = (0, 0)$ נקבל

$$f(x^o + h) - f(x^o) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(x^o + \theta h)h_i h_j$$

ולכן

$$f(x^o + h) - f(x^o) = \frac{1}{2}\left[f_{x_1x_1}h_1^2 + 2f_{x_1x_2}h_1h_2 + f_{x_2x_2}h_2^2\right](x^o + \theta h) =$$

$$= \frac{1}{2}f_{x_1x_1}\left[\left(h_1 + \frac{f_{x_1x_2}}{f_{x_1x_1}}h_2\right)^2 + \frac{f_{x_1x_1}\cdot f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2}{f_{x_1x_1}^2}h_2^2\right](x^o + \theta h)$$

מכיון שהנגזרות החלקיות רציפות עד הסדר השני נקבל מתנאי (2) כי יש סביבה של x^o כך שלכל x בסביבה $\left[f_{x_1x_1}\, f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2\right](x) > 0$ ו- $f_{x_1x_1}(x) < 0$, ולכן עבור (h_2,h_2) מספיק קרוב ל-0 קיים

$$f(x^o + h) - f(x^o) \le 0.$$

כלומר $$f(x^o) \ge f(x^o + h)$$

ולכן x^o מכסימום של f.

בדומה למשפט הקודם קיים גם המשפט הבא:

משפט: (ללא הוכחה). תהי $f : R^2 \to R$. תנאי מספיק לכך ש-x^o הוא מינימום לוקלי ל-f הוא:

1) $\nabla f(x^o) = (0,\ 0)$

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\ (x^o) > 0$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\ \partial x_2}\right)^2\right](x^o) > 0$$

דוגמא: נמצא מינימום ל- $f(x_1\ ,x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2$.

קיים

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\ (x),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\ (x)\right) = (2x_1,\ 2x_2)$$

ומכאן $\nabla f(x) = 0 \Rightarrow (x_1,x_2) = (0,0)$

לכן נקודת האכסטרמום היחידה האפשרית היא $(0,0)$.

קיים

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(x) = 2$$

ו-

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\ \partial x_2}\ (x) = 0$$

ומכיון ש-

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\ (0,\ 0) = 2 > 0$$

ו-

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\ \partial x_2}\right)^2\right](0,0) = 4 > 0$$

אנו מקבלים כי $(0,\ 0)$ הוא נקודת מינימום.

1.16 משפט אכסטרמום כללי

נביא כאן משפט המכליל את שלושת המשפטים הקודמים.

משפט: (ללא הוכחה). תהי $f : R^n \to R$ ונניח כי ב- $x^o \in R^n$ קיים $\nabla f(x^o) = (0,\ldots,0)$.

תנאי מספיק לכך ש-x^o נקודת מכסימום לוקלית של f הוא שלכל $1 \le i \le n$

$$(-1)^i\ \Delta_i\,(x^o) > 0$$

תנאי מספיק לכך ש-x^o נקודת מינימום לוקלית של f הוא שלכל $1 \le i \le n$

$$\Delta_i(x^o) > 0$$

באשר $\Delta_i(x^o)$ היא הדטרמיננטה הפינתית (החסומה ברבוע) של מטריצת הנגזרות השניות בנקודה x^o:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^o) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_i}(x^o) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_1}(x^o) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^o) \end{matrix}} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_n}(x^o) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_1}(x^o) & \cdots\cdots\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x^o) \end{pmatrix}$$

תנאי הכרחי לכך ש-x^o תהיה מכסימום לוקלי הוא שלכל $1 \le i \le n$

$$(-1)^i\, \Delta_i(x^o) \ge 0$$

תנאי הכרחי לכך ש-x^o תהיה מינימום לוקלי הוא שלכל $1 \le i \le n$

$$\Delta_i(x^o) \ge 0$$

כדי להקל על הקורא, נציג בטבלה הבאה את התנאים המספיקים וההכרחיים למכסימום ולמינימום. כמצויין במשפט, מדובר על נקודות $x^o \in R^n$ עבורן $\nabla f(x^o) = (0,\dots,0)$. התנאים המופיעים בטבלה נדרשים לכל $1 \le i \le n$.

	מכסימום	מינימום
תנאי מספיק	$(-1)^i\Delta_i(x^o) > 0$	$\Delta_i(x^o) > 0$
תנאי הכרחי	$(-1)^i\Delta_i(x^o) \ge 0$	$\Delta_i(x^o) \ge 0$

<u>דוגמאות:</u>

1) נמצא את נקודות האכסטרמום של

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1x_2 + 2x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2$$

לשם כך נחפש את הנקודות x בהן $\nabla g(x) = 0$, כלומר

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 3x_1^2 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = x_1 + 4x_2 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_3} = x_1 + 2x_3 = 0$$

פתרון המערכת של שלושת המשוואות נותן את הנקודות החשודות שהן:

א) $(0, 0, 0)$

ב) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}\right)$

נחשב את מטריצת הנגזרות החלקיות מסדר שני

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\beta^2 g}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא עתה את Δ_i $(1 \le i \le 3)$ עבור שתי הנקודות החשודות

א) בנקודה $(0, 0, 0)$

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 < 0$$

כאן לא מתקיים התנאי ההכרחי למכסימום (שהוא $\Delta_1 \le 0$, $\Delta_2 \ge 0$, $\Delta_3 \le 0$)

או התנאי ההכרחי למינימום (שהוא $\Delta_i \geq 0$ לכל $1 \leq i \leq 3$) ולכן נקודה זו אינה נקודה אכסטרמום.

ב) בנקודה $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}\right)$

$$\Delta_1 = 1.5 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1.5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

תנאי המשפט מתקיימים ולכן נקודה זו הינה נקודת מינימום.

2) בחברה בת n פרטים יש לכל הפרטים פונקצית תועלת זהה u המקיימת לכל x $u'(x) > 0$ ו- $u''(x) < 0$.

את ה"עושר החברתי" K נחלק בין הפרטים באופן שיביא למכסימום את סכום התועלות. עושרם ההתחלתי של הפרטים הינו אפס.

הבעיה היא

$$\max\ u(x_1) + u(x_2) + \ldots + u(x_n)$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = K$$

וניתן להעבירה לצורה השקולה הבאה:

$$\max\ u(x_1) + u(x_2) + \ldots + u(K - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1})$$

נסמן פונקציה זו ב- $F(x_1,\ldots,x_{n-1})$.

תנאי הכרחי למכסימום הוא שלכל $1 \leq i \leq n-1$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = u'(x_i) - u'(K-x_1-\ldots-x_{n-1}) = 0$$

ולכן נקבל

$$u'(x_1) = u'(x_2) = \ldots = u'(K-x_1-\ldots-x_{n-1}).$$

מכיון ש- $u''(x) < 0$ לכל x ולכן u' יורדת ממש, נקבל כי קיים השוויון הבא

$$x_1 = x_2 = \ldots = K-x_1-\ldots-x_{n-1}$$

לכן לכל $1 \leq i \leq n$ $x_i = \frac{K}{n}$. כלומר הנקודה החשודה היחידה היא $\left(\frac{K}{n},\ldots,\frac{K}{n}\right)$.

הנגזרות החלקיות מסדר שני הן

$$(1 \le i \le n-1) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^{\,2}}(x_1,\dots,x_{n-1}) = u''(x_i) + u''(K-x_1-\dots-x_{n-1})$$

$$(1 \le i \le j \le n-1) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_1,\dots,x_{n-1}) = u''(K-x_1-\dots-x_{n-1})$$

ולכן מטריצת הנגזרות החלקיות מסדר שני בנקודה $\left(\frac{K}{n},\dots,\frac{K}{n}\right)$ הוא

$$\begin{pmatrix} 2u''\left(\frac{K}{n}\right) & & u''\left(\frac{K}{n}\right) \\ & \ddots & \\ u''\left(\frac{K}{n}\right) & & 2u''\left(\frac{K}{n}\right) \end{pmatrix}$$

כלומר זו מטריצה בה באלכסון מופיע $2u''\left(\frac{K}{n}\right)$ ובאשר המקומות $u''\left(\frac{K}{n}\right)$.

לכן בנקודה $\left(\frac{K}{n},\dots,\frac{K}{n}\right)$ קיים

$$\Delta_1 = 2u''\left(\frac{K}{n}\right) < 0$$

$$\Delta_2 = \left[u''\left(\frac{K}{n}\right)^2\right]\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \left[u''\left(\frac{K}{n}\right)\right]^2 \cdot 3 > 0$$

ובאופן כללי

$$\Delta_j = \left[u''\left(\frac{K}{n}\right)\right]^j \begin{vmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 2 \end{vmatrix}.$$

מכיון שקיים (הוכח)

$$\begin{vmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 2 \end{vmatrix} > 0$$

נובע כי מתקיים התנאי המספיק למכסימום. לכן החלוקה השוויונית היא האופטימלית.

פרק 2 - משפט הפונקציות הסתומות

2.1 הפונקציה הסתומה

הצורה המוכרת להגדרת פונקציה ממשית הינה ביטוי אשר הצבת מספר בו נותנת את ערך הפונקציה במספר המסויים.

דוגמא: הביטוי $f(x) = x^3 + 2$ מגדיר את הפונקציה f, באשר אם נציב בביטוי מספר כלשהו a נקבל את ערך הפונקציה בנקודה a - $a^3 + 2$.

לא תמיד צורת הגדרה זו אפשרית, ולפעמים נתקשה להגיע אליה למרות שאנו מכירים ביטוי ש"מגדיר" את הפונקציה.

דוגמא: נתבונן במשוואה $y^5 + y^3 + y + x = 0$.

נראה שלכל x קיים y יחיד המקיים את המשוואה, ולכן המשוואה מגדירה פונקציה ממשית באופן שלכל x יותאם אותו ערך יחיד המקיים את המשוואה. למרות זאת ידוע מתורת האלגברה (וההוכחה חורגת מתחומי חוברת זו) שלא קיים ביטוי בו משתמשים בסימני הפעולות ה"רגילות" (לרבות שורשים) ואשר מגדיר פונקציה זו.

כדי להראות שלכל x מתאים y יחיד המקיים את המשוואה נגדיר

$$F(x,y) = y^5 + y^3 + y + x$$

ואז בעיה שקולה היא להראות שלכל x יש y יחיד המאפס את F.

עבור x_o קבוע

$$\frac{\partial F(x_o, y)}{\partial y} = 5y^4 + 3y^2 + 1 > 0$$

ולכן הפונקציה במשתנה y - $F(x_o,\cdot)$ הינה פונקציה עולה ממש. ($F(x_o,\cdot)$ הינה פונקציה המקיימת לכל y עבורו $F(x_o, y)$. מוגדר: $(F(x_o,\cdot)(y) = F(x_o, y)$. עבור y מספיק גדול $F(x_o,y) > 0$ ועבור y מספיק קטן $F(x_o,y) < 0$. F רציפה, ולכן (ראה [4], עמ' 167) יש y_o יחיד כך ש-

$$F(x_o, y_o) = 0$$

בהמשך נדון בביטויים מהצורה $F(x,y) = 0$ ונשאל האם קיימת פונקציה $f : D \to R$ המקיימת $F(x, f(x)) = 0$ לכל $x \in D$ באשר D הינו קטע.

דוגמאות:

1) $$F(x, y) = y^3 - x - 1 = 0$$

נגדיר $f(x) = (x+1)^{1/3}$. אזי

$$F(x, f(x)) = f(x, (x+1)^{1/3}) = ((x+1)^{1/3})^3 - x - 1 = 0$$

ולכן קיימת פונקציה $f : R \to R$ כנ"ל.

2) למונופוליסט פונקצית יצור $y : R^+ \to R$ המקיימת לכל $a > 0$ $y'(a) > 0$ $y''(a) < 0$.

פונקצית הביקוש העומדת לפניו היא p_y ומקיימת לכל $y > 0$ $\frac{dp_y}{dy}(y) < 0$.

המונופוליסט מביא למכסימום את הרווח π באשר

$$\pi(a) = p_y(y(a)) \cdot y(a) - p_a \cdot a$$

תנאי סדר ראשון למכסימום הוא

$$\pi'(a) = \frac{dp_y}{dy}(y(a)) \cdot y'(a) \cdot y(a) + p_y(y(a)) \cdot y'(a) - p_a = 0$$

נניח כי בנקודות ה"חשודות" מתקיים התנאי המספיק למכסימום $\pi''(a) < 0$.

השאלה המענינת אותנו היא האם המשואה

$$F(p_a, a) = \frac{dp_y}{dy}(y(a))\ y'(a)\ y(a) + p_y(y(a))\ y'(a) - p_a = 0$$

(שהיא המשוואה $\pi'(a) = 0$) מגדירה פונקציה $a(p_a)$ שמשמעותה - כמות גורם היצור האופטימלי a בה ישתמש המונופוליסט אם מחיר גורם היצור הוא p_a.

אנו נראה בהמשך כי קיום התנאי המספיק למכסימום (בהנחות רציפות נוספות) קובע את קיומה של הפונקציה הנ"ל.

כמו כן נעמוד גם על סימן הנגזרת $\frac{da}{dp_a}$.

2.2 משפט הפונקציות הסתומות עבור $F(x, y) = 0$

משפט: תהיינה נתונות נקודה (x_o, y_o) ופונקציה $F : R^2 \to R$ המקיימת את התנאים הבאים:

1) $F(x_o, y_o) = 0$

2) F רציפה ובעלת נגזרות חלקיות F_x, F_y רציפות.

3) $F_y(x_o, y_o) \neq 0$

אזי: 1) קיימת סביבה של (x_0, y_0) (רבוע שמרכזו (x_0, y_0)), כך שעבור כל x בצלע רבוע זה קיים y יחיד, כך ש- (x, y) בסביבה, באופן ש- $F(x, y) = 0$.

נגדיר עתה פונקציה f כך שלכל x בצלע הרבוע הנ"ל $f(x)$ הינו הערך היחיד המקיים $F(x, f(x)) = 0$. אזי

2) f רציפה.

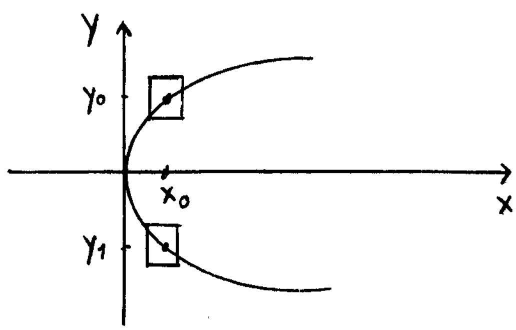
3) f גזירה ומקיימת
$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

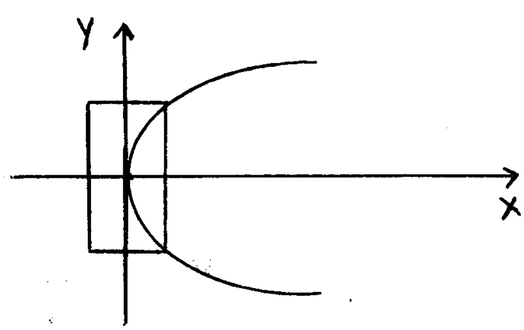
<u>דוגמא:</u> לפני הוכחת המשפט נבדוק את המשוואה

$$F(x, y) = y^2 - x = 0$$

נבחין בין 2 מקרים:

1) $x_0 > 0$. נסמן $y_0 = \sqrt{x_0}$, $y_1 = -\sqrt{x_0}$. קיים $F_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$ וכן $F_y(x_0, y_1) = 2y_1 \neq 0$. על הקרן החיובית של ציר ה-x-ים מוגדרות שתי פונקציות $\sqrt{x}$ ו- $-\sqrt{x}$ המקיימות $F(x, \sqrt{x}) = 0$ $F(x, -\sqrt{x}) = 0$ לכל $x > 0$ (ראה שרטוט). אולם בכל אחת מהסביבות של (x_0, y_0) ו- (x_0, y_1) קיימת פונקציה f יחידה המקיימת $F(x, f(x)) = 0$.





2) $x_0 = y_0 = 0$. במקרה זה קיים $F_y(0, 0) = 0$. תנאי המשפט אינם מתקיימים ואומנם בכל סביבה של $(0, 0)$ קיימים x-ים עבורם יש 2 ערכים y המקיימים $F(x, y) = 0$ ומאידך קיימים x-ים עבורם לא קיים אף ערך y המקיים $F(x,y) = 0$ (ראה שרטוט)

<u>הוכחת המשפט:</u> נוכיח תחילה את 1).

א) מכיון ש- $F_y(x_o\ ,y_o) \neq 0$ ניתן להניח כי $F_y(x_o\ ,y_o) > 0$ (אחרת נדון במשוואה $-F(x\ ,y) = 0$).

ב) מרציפות F_y נובע שיש סביבה של $(x_o\ ,y_o)$ כך שלכל $(x\ ,y)$ בסביבה $F_y(x\ ,y) > 0$. נתיחס מעתה רק לנקודות בסביבה זו.

ג) לכל $\bar{x}$ בסביבה, $F(\bar{x}\ ,\cdot)$ פונקציה מונוטונית עולה ממש ב-y.

ד) בפרט $F(x_o\ ,\cdot)$ פונקציה מונוטונית עולה ממש ב-y.

ה) מכיון ש- $F(x_o\ ,y_o) = 0$, קיים β כך ש- $F(x_o\ ,y_o + \beta) > 0$ ו- $F(x_o\ ,y_o - \beta) < 0$.

ו) הפונקציות $F(\cdot\ ,y_o + \beta)$ $F(\cdot\ ,y_o - \beta)$ רציפות בגלל רציפות F. לכן יש $\delta_1,\delta_2 > 0$ כך שלכל $|x - x_o| < \delta_1$ קיים $F(x\ ,y_o + \beta) > 0$ ולכל $|x - x_o| < \delta_2$ קיים $F(x\ ,y_o - \beta) < 0$.

ז) נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ואזי לכל $\bar{x}$ המקיים $|\bar{x} - x_1| < \delta$ קיים $F(\bar{x}\ ,y_o + \beta) > 0$ ו- $F(\bar{x}\ ,y_o - \beta) < 0$.

ח) היות ו- $F(\bar{x}\ ,\cdot)$ רציפה ומונוטונית עולה נובע כי קיים $\bar{y}$ יחיד כך ש- $F(\bar{x}\ ,\bar{y}) = 0$.

לא נוכיח כאן את 2) ונסתפק בהוכחת 3).

א) יהי x בקטע בו מוגדרת f, ויהי $y = f(x)$. לכל "תוספת" Δx ל-x קיים Δy כך ש-

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

ב) לפי הגדרת f

$$F(x + \Delta x,\ \ y + \Delta y) = 0$$

ג) F דיפרנציאבילית (ראה פרק 1 סעיף 1.9) ולכן

$$F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x,\ y) = F_x(x,\ y)\ \Delta x + F_y(x,\ y)\ \Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

באשר α , β הן פונקציות של Δx ו-Δy המקיימות

$$\Delta x,\ \Delta y \to 0 \Rightarrow \alpha(\Delta x,\ \Delta y),\ \beta(\Delta x,\ \Delta y) \to 0$$

ד) מכיון ש-

$$F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = F(x,\ y) = 0$$

נקבל

$$[F_y(x,\ y) + \beta]\Delta y = -[F_x(x,\ y) + \alpha]\Delta x$$

ה) $F_y(x_o, y_o) \neq 0$ ולכן בסביבה מספיק קרובה ל- (x_o, y_o) קיים $F_y(x, y) \neq 0$.

ו) לכן באותה סביבה

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x,\ y) + \alpha}{F_y(x,\ y) + \beta}$$

ז)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x,\ y)}{F_y(x,\ y)}$$

ח) מכאן נקבל

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,\ f(x))}{F_y(x,\ f(x))}$$

נוכל עתה להשלים את דוגמא 2 (הדנה במונופוליסט) שבסעיף 1 בפרק זה.

המשוואה הנתונה היתה $F(p_a,\ a) = \pi'(a) = 0$

נניח כי F רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות. כדי שיתקיימו תנאי משפט הפונקציות הסתומות נותר להראות כי

$$F_a(p_a,\ a) \neq 0$$

ואמנם

$$F_a(p_a,\ a) = \pi''(a) < 0$$

על סמך הנחה קודמת. לכן קיימת פונקציה $a(p_a)$ כנדרש.

נבדוק את סימן הנגזרת $\frac{da}{dp_a}$:

$$\frac{da}{dp_a}(p_a) = -\frac{F_{p_a}(p_a,\ a(p_a))}{F_a(p_a,\ a(p_a))} = -\frac{-1}{\pi''(a)} < 0$$

כלומר גידול ב-p_a יקטין את כמות a האופטימלית בה ישתמש המונופוליסט.

2.3 משפט הפונקציות הסתומות - נוסח רחב

נביא כאן ללא הוכחה את הנוסח הרחב של משפט הפונקציות הסתומות.

המשפט שהוכח בסעיף הקודם מהווה מקרה פרטי של משפט זה.

משפט: תהיינה $F_1,\dots,F_n$ פונקציות מ- R^{m+n} ל- R המקיימות:

1) לכל $1 \le i \le n$ $F_i(x_1^o,\dots,x_m^o, y_1^o,\dots,y_n^o) = 0$

2) לכל $1 \le i \le n$ F_i רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות.

3)

$$\left|\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\right| (x_1^o,\dots,x_m^o,\ y_1^o,\dots,y_n^o) \neq 0$$

באשר

$$\left|\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

אזי:

1) בסביבת $(x_1^o,\dots,x_m^o)$ קיימות n פונקציות $f_i:R^m \to R$ (אשר ערכיהן בסביבת $(y_1^o,\dots,y_n^o)$) כך שלכל $1 \le i \le n$ קיים

$$F_i(x_1,\dots,x_m,\ f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)) = 0$$

2) לכל $1 \le i \le n$ f_i רציפה.

3) לכל $1 \le i \le n$ ולכל $1 \le k \le m$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1,\dots,x_m) =$$

$$= -\frac{\left|\frac{\partial(F_1,\dots\dots\dots\dots,F_n)}{\partial(y_1,\dots,y_{i-1},\ x_k,\ y_{i+1},\dots,y_n)}\right|}{\left|\frac{\partial(F_1,\dots\dots\dots\dots,F_n)}{\partial(y_1,\dots\dots\dots\dots,y_n)}\right|} (x_1,\dots,x_m,f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m))$$

נביא עתה 3 שימושים כלליים למשפט הפונקציות הסתומות.

2.4. המודל הקיינסיאני

(השווה את הדיון ל-[2], עמ' 153-155. שים לב שדיוננו מכליל את הדיון שם בכך שאיננו מצטמצמים לפונקציות ביקוש ליניאריות).

נדון במשק סגור עם ממשלה. במשק קיימת פונקצית ביקוש לצריכה התלויה בהכנסה הפנויה Y_d והיא מהצורה $C_o + C(Y_d)$ באשר $C_o \geq 0$ ו-C פונקציה גזירה ברציפות המקיימת לכל x $0 < C'(x) < 1$.

מוטל מס בשיעור $0 \leq t < 1$ מן ההכנסה Y והממשלה מקיימת תקציב מאוזן.

משוואת שווי המשקל הינה

$$Y = C_o + C((1-t)Y) + tY$$

או בצורה אחרת

$$C_o + C((1-t)Y) + (t-1)Y = 0$$

על מנת לקבל את הקשר בין C_o ו-Y (בשווי משקל) נשתמש במשפט הפונקציות הסתומות תוך הגדרת

$$F(C_o, Y) = C_o + C((1-t)Y) + (t-1)Y$$

לפי המשפט יובטח קיומה של Y כפונקציה של C_o באם הנגזרת החלקית $\frac{\partial F}{\partial Y}$ אינה מתאפסת. ואמנם

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(C_o, Y) = (1-t)C'((1-t)Y) + (t-1) = (t-1)[1 - C'((1-t)Y)]$$

וגודל זה שונה מאפס כי $t < 1$ ולכל x $C'(x) < 1$.

לפי משפט הפונקציות הסתומות קיים

$$\frac{dY}{dC_o}(C_o) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial C_o}(C_o, Y(C_o))}{\frac{\partial F}{\partial Y}(C_o, Y(C_o))} = -\frac{1}{(t-1)[1 - C'((1-t)\,Y(C_o))]} > 0$$

ולמרות שאיננו מסוגלים לחלץ באופן מפורש את Y, הצלחנו להסיק לגבי סימן הנגזרת של הפונקציה (שים לב שהביטוי בצד ימין מכיל את $Y(C_o)$).

אם נרצה לבדוק את קשר בין Y של שווי משקל לבין שעור המס t, נכתוב את המשוואה המגדירה

$$F(t, Y) = C_o + C((1-t)Y) + (t-1)Y$$

(זוהי אותה משוואה שהופיעה במקרה הקודם, אלא שכאן המשתנים הם t, Y ולא Y, C_o).

קיים Y כפונקציה של t מובטח הודות לכך ש- $\frac{\partial F}{\partial Y}(t, Y) \neq 0$.

לפי משפט הפונקציות הסתומות

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t, Y(t))}{\frac{\partial F}{\partial Y}(t, Y(t))} = -\frac{-Y(t) \cdot C'[(1-t)\, Y(t)] + Y(t)}{(1-t)C'[(1-t)\, Y(t)] + (t-1)} =$$

$$= -\frac{Y(t)[1 - C'[(1-t)\, Y(t)]]}{(t-1)[1 - C'[(1-t)\, Y(t)]]} = \frac{Y(t)}{1-t} > 0$$

2.5 יצור עם 2 גורמי יצור

נתבונן ביצרן המייצר מוצר יחיד באמצעות שני גורמי יצור. ליצרן פונקצית יצור f קעורה חזק (ראה פרק 3, סעיף 3.2) ובעלת נגזרות חלקיות רציפות וחיוביות.

נסמן ב-a,b את גורמי היצור וב- f(a,b) את התפוקה המתאימה.

p_y, p_a ו-p_b יציינו את מחירי התפוקה וגורמי היצור בהתאמה (מחירים אלו קבועים מנקודת ראות היצרן).

היצרן מבצע את המכסימיזציה הבאה

$$\max_{a,b}\; p_y \cdot f(a, b) - p_a \cdot a - p_b \cdot b$$

תנאים הכרחיים למכסימום הם

$$\left.\begin{aligned} H_1(a, b) &= p_y\, f_a(a, b) - p_a = 0 \\ H_2(a, b) &= p_y\, f_b(a, b) - p_b = 0 \end{aligned}\right. \qquad (*)$$

מטריצת הנגזרות של H_1 ו-H_2 היא

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial a} & \frac{\partial H_1}{\partial b} \\ \frac{\partial H_2}{\partial a} & \frac{\partial H_2}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_y\, f_{aa} & p_y\, f_{ab} \\ p_y\, f_{ba} & p_y\, f_{bb} \end{pmatrix}$$

ההנחה ש-f קעורה חזק (ראה פרק 3, סעיף 3.2) מבטיחה כי לכל a ,b

$$\Delta_1 = p_y f_{aa}(a, b) < 0$$

$$\Delta_2 = p_y^2 [f_{aa} f_{bb} - f_{ab}^2] \quad (a, b) > 0$$

(שים לב שממשפט בפרק 1 סעיף 1.11 נובע כי $f_{ab} = f_{ba}$).

מכאן שכל פתרון של המערכת (*) חייב נקודת מכסימום (ראה פרק 1 סעיף 1.15).

אנו מתעניינים ב-a,b האופטימלים כפונקציות של p_y, p_b, p_a. קיומן של פונקציות $a(p_a, p_b, p_y)$ $b(p_a, p_b, p_y)$ המקיימות באופן סימולטני את המשוואות (*) מובטח ממשפט הפונקציות הסתומות (נוסח רחב), מכיון שבהגדירנו

$$F_1(p_a, p_b, p_y, a, b) = p_y f_a(a, b) - p_a = 0$$

$$F_2(p_a, p_b, p_y, a, b) = p_y f_b(a, b) - p_b = 0$$

נקבל

$$\left|\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(a, b)}\right| (p_a, p_b, p_y, a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \end{vmatrix} (p_a, p_b, p_y, a, b) =$$

$$= \begin{vmatrix} p_y f_{aa} & p_y f_{ab} \\ p_y f_{ba} & p_y f_{bb} \end{vmatrix} (a, b) = p_y^2 [f_{aa} f_{bb} - f_{ab}^2] (a, b) > 0$$

בעזרת משפט הפונקציות הסתומות נוכל לחשב את סימן הנגזרת $\frac{\partial a}{\partial p_a}$.

$$\frac{\partial a}{\partial p_a}(p_a, p_b, p_y) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \end{vmatrix}}(p_a, p_b, p_y, a(p_a, p_b, p_y), b(p_a, p_b, p_y)) =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} -1 & p_y f_{ab} \\ 0 & p_y f_{bb} \end{vmatrix}}{\Delta_2}(a(p_a, p_b, p_y), b(p_a, p_b, p_y)) = \frac{p_y f_{bb}}{\Delta_2}(\cdot , \cdot) < 0$$

נחפש את סימן הנגזרת $\frac{\partial a}{\partial p_b}$

$$\frac{\partial a}{\partial p_b}(p_a, p_b, p_y) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_b} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_b} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \end{vmatrix}}{\Delta_2}(p_a, p_b, p_y, a(\cdot,\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot,\cdot)) =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 0 & p_y f_{ab} \\ -1 & p_y f_{bb} \end{vmatrix}}{\Delta_2}(a(\cdot,\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot,\cdot)) = \frac{-p_y f_{ab}}{\Delta_2}(\cdot,\cdot)$$

ואנו רואים כי סימן הנגזרת תלוי בסימן f_{ab}, כלומר בהיותם של גורמי היצור מסייעים או מתחרים.

אם גורמי היצור מסייעים (לכל a, b $\;f_{ab}(a, b) > 0$) אזי $\frac{\partial a}{\partial p_b} < 0$

אם גורמי היצור מתחרים (לכל a, b $\;f_{ab}(a, b) < 0$) אזי $\frac{\partial a}{\partial p_b} > 0$.

2.6 מודל ISLM

(השווה לדיונים שב-[3], עמ' 159-164, וב-[5], פרק 19).

נסמן ב- $E_o + E(Y, r)$ את הביקוש המצרפי לסחורות התלוי בהכנסה הלאומית Y ובשער הרבית r, כאשר E_o הינו החלק האוטונומי של הביקוש המצרפי.

$L(Y, r)$ יסמן את הביקוש לכסף ו-M את היצע הכסף במשק.

2 משואות שווי המשקל הן

$$E_o + E(Y, r) - Y = 0$$

$$L(Y, r) - M = 0$$

נניח שלכל a,b $\quad 0 < E_Y(a, b) < 1 \qquad E_r(a, b) < 0$

$$L_Y(a, b) > 0 \qquad L_r(a, b) < 0$$

אנו מתענינים ב-Y ו-r של שווי משקל כפונקציות של E_o ו-M. קיומן של פונקציות כאלה המקיימות סימולטנית את המערכת

$$F_1(E_o, M, Y, r) = E_o + E(Y, r) - Y = 0$$

$$F_2(E_o, M, Y, r) = L(Y, r) - M = 0$$

נובע ממשפט הפונקציות הסתומות היות ו-

$$\left|\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(Y, r)}\right| (E_o, M, Y, r) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial r} \end{vmatrix} (E_o, M, Y, r) =$$

$$= \begin{vmatrix} E_Y - 1 & E_r \\ L_Y & L_r \end{vmatrix} (Y, r) = [L_r(E_Y - 1) - L_Y E_r] (Y, r) > 0$$

משפט הפונקציות הסתומות נותן לנו מושג לגבי סימן הנגזרות החלקיות של Y ו-r כפונקציה של E_o ו-M.

לדוגמא

$$\frac{\partial Y}{\partial E_o}(E_o,M) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial E_o} & \frac{\partial F_1}{\partial r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial E_o} & \frac{\partial F_2}{\partial r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial r} \end{vmatrix}} (E_o, r, Y(E_o,M), r(E_o,M)) = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & E_r \\ 0 & L_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_Y - 1 & E_r \\ L_Y & L_r \end{vmatrix}} (Y,r) =$$

$$= \frac{-L_r}{L_r(E_Y - 1) - L_Y E_r}(Y, r) > 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial M}(E_o,M) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial M} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial M} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial r} \end{vmatrix}} (E_o, M, Y(\cdot,\cdot), r(\cdot,\cdot)) = -\frac{\begin{vmatrix} E_Y - 1 & 0 \\ L_Y & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_Y - 1 & E_r \\ L_Y & L_r \end{vmatrix}} (Y, r) =$$

$$= \frac{E_Y - 1}{L_r (E_Y - 1) - L_Y E_r} (Y, r) < 0$$

פרק 3 - קבוצות קמורות

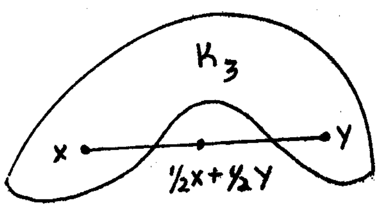
3.1 הקבוצה הקמורה - תכונות יסודיות

<u>הגדרה:</u> קבוצה $K \subset R^n$ תקרא **קמורה** אם לכל $x,y \in K$ ולכל $0 < \lambda < 1$ קיים

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K$$

המשמעות הגאומטרית של קמירות קבוצה הוא שכל קטע המחבר שתי נקודות בקבוצה מוכל אף הוא בה.

<u>דוגמאות:</u> הקבוצות K_1, K_2 (מוכלות ב-R^2) הינן קמורות



הקבוצה K_3 (גם היא מוכלת ב-R^2) אינה קמורה.
זאת מכיון שלא כל הקטע המחבר בין הנקודות
x,y מוכל ב-K_3 (למשל $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \notin K$)

נוכיח עתה 2 טענות הדנות בפעולות על קבוצות ה"משמרות" את תכונת הקמירות. באמצעות טענות אלו יקל עלינו לעיתים להוכיח קמירותן של קבוצות.

ראשית נגדיר את פעולת החיבור של 2 קבוצות.

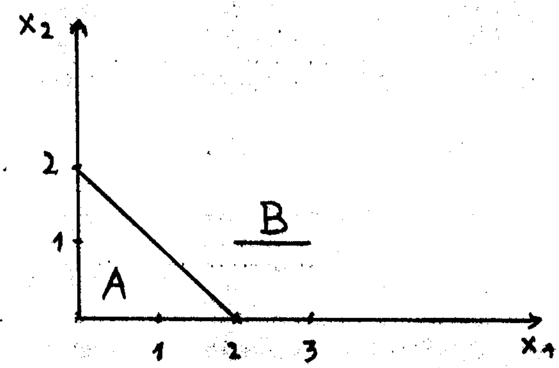
<u>הגדרה:</u> תהיינה $A,B \subset R^n$. **הסכום** של A ו-B הינו הקבוצה הבאה

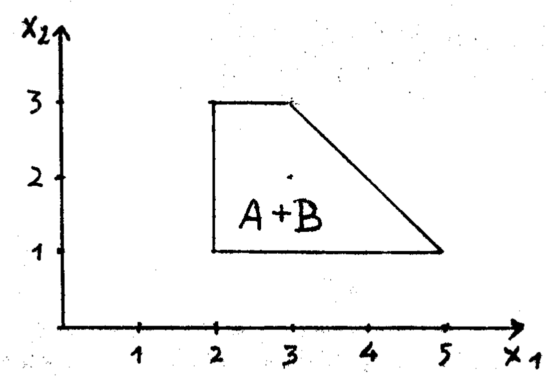
$A + B = \{\zeta \mid$ יש $a \in A$ ו- $b \in B$ כך ש- $\zeta = a + b\}$

<u>דוגמא:</u> תהיינה

$$A = \{(x_1,x_2) \in R^2 \mid x_1 + x_2 \le 2,\ \ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0\}$$
$$B = \{(x_1, 1) \in R^2 \mid 2 \le x_1 \le 3\}$$

בשרטוט הבא מוצגות הקבוצות B , A בצד שמאל, והקבוצה $A + B$ בצד ימין.





לדוגמא $(3, 2) \in A + B$ כי

$$(3, 2) = (2.5, 1) + (0.5, 1)$$

ו- $(0.5, 1) \in A$ $(2.5, 1) \in B$.

נשים לב להבדל בין פעולת החיבור לבין פעולות אחרות על קבוצות. עבור הדוגמא הנ"ל קיים $A \cap B = \phi$ ואילו הקבוצה $A \times B$ (המכפלה הקרטזית של A ו-B) הינה קבוצה של זוגות סדורים (שרכיביהם זוגות סדורים) וניתנת לזיהוי כקבוצה חלקית של R^4 עם

$$\{(x_1, x_2, x_3, 1) \in R^4 \mid x_1 + x_2 \le 2, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad 2 \le x_3 \le 3\}$$

<u>טענה 1</u>: תהיינה A , B קבוצות קמורות. אזי $A + B$ קבוצה קמורה.

<u>הוכחה</u>: תהיינה $z^1, z^2 \in A + B$. לכן יש $x^1, x^2 \in A$ $y^1, y^2 \in B$ כך ש-

$$z^1 = x^1 + y^1 \qquad z^2 = x^2 + y^2$$

עלינו להוכיח כי לכל $0 \le \lambda \le 1$ קיים

$$\lambda z^1 + (1-\lambda) z^2 \in A + B$$

מקמירות A נובע כי

$$\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in A$$

מקמירות B נובע כי

$$\lambda y^1 + (1-\lambda) y^2 \in B$$

לכן

$$\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 + \lambda y^1 + (1-\lambda) y^2 \in A + B$$

על-ידי שינוי סדר האברים נקבל

$$\lambda(x^1 + y^1) + (1-\lambda)(x^2 + y^2) \in A + B$$

מכאן

$$\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 \in A + B$$

<u>טענה 2</u>: תהיינה A, B קבוצות קמורות. אזי $A \cap B$ קבוצה קמורה.

<u>הוכחה</u>: תהיינה $x, y \in A \cap B$. מכיון ש- $A \cap B \subset A$ נובע כי $x, y \in A$.

בגלל קמירות A נקבל שלכל $0 \le \lambda \le 1$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

באופן דומה נקבל

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in B$$

ולכן

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A \cap B$$

<u>הערה</u>: ניתן להרחיב ולהוכיח שחיבור וחיתוך של מספר כלשהו של קבוצות קמורות נשאר קמור. יש לשים לב לכך שאחוד של קבוצות קמורות איננו בהכרח קמור (התבונן בקבוצות A, B שבדוגמא האחרונה).

<u>הגדרה</u>: וקטור $x \in R^n$ יקרא **קומבינציה קמורה** של הוקטורים $x^1,\dots,x^m \in R^n$ אם קיימים $\lambda^1,\dots,\lambda^m \ge 0$ המקיימים $\sum_{i=1}^{m} \lambda^i = 1$ כך ש-

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i x^i$$

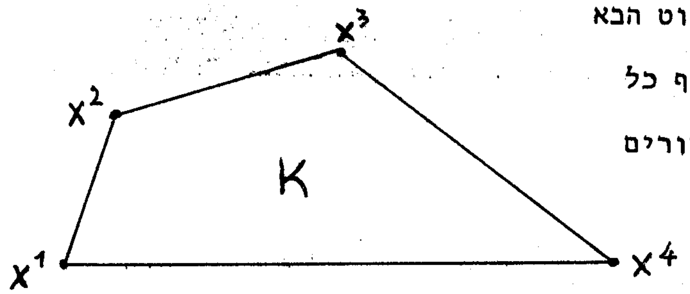
<u>דוגמא</u>: הוקטור $(4, 2, 2) \in R^3$ הינו קומבינציה קמורה של הוקטורים

$$(4, 2, 0), (2, 3, 1), (8, 0, 6) \in R^3$$

מכיוון שקיים

$$(4, 2, 2) = \tfrac{1}{4}(4, 2, 0) + \tfrac{1}{2}(2, 3, 1) + \tfrac{1}{4}(8, 0, 6)$$

<u>הגדרה</u>: קבוצה $K \subset R^n$ תקרא **פוליטופ** אם קיימים $x^1,\dots,x^m \in R^n$ כך ש-K הינו אוסף כל הקומבינציות הקמורות שלהם.



<u>דוגמא</u>: הקבוצה K (מוכלת ב-R^2) שבשרטוט הבא הינה פוליטופ מכיון שהיא אוסף כל הקומבינציות הקמורות של הוקטורים x^1, x^2, x^3, x^4.

<u>טענה 3</u>: כל פוליטופ הינו קבוצה קמורה.

<u>הוכחה</u>: יהי $K \subset R^n$ פוליטופ. לפיכך קיימים $x^1,\ldots,x^m \in R^n$ כך ש-K הינו אוסף כל הקומבינציות הקמורות שלהם.

תהיינה $y, z \in K$. אזי יש $\eta^1,\ldots,\eta^m \geq 0$ $\left(\sum_{i=1}^{m} \eta^i = 1\right)$ ו- $\mu^1,\ldots,\mu^m \geq 0$ $\left(\sum_{i=1}^{m} \mu^i = 1\right)$ כך ש-

$$z = \sum_{i=1}^{m} \mu^i x^i \qquad y = \sum_{i=1}^{m} \eta^i x^i$$

לכל $0 \leq \lambda \leq 1$ קיים

$$\lambda y + (1-\lambda) z = \lambda \sum_{i=1}^{m} \eta^i x^i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \mu^i x^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\lambda \eta^i + (1-\lambda)\mu^i) x^i$$

קיים לכל i

$$\lambda \eta^i + (1-\lambda)\mu^i \geq 0$$

וכן

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda \eta^i + (1-\lambda)\mu^i = \lambda \sum_{i=1}^{m} \eta^i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \mu^i = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

לכן לפי הגדרת K

$$\lambda y + (1-\lambda) z \in K$$

ומכאן K קמורה.

<u>טענה 4</u>: לכל $a \in R^n$ ו- $b \in R$ הקבוצה

$$K = \{x \in R^n \mid a \cdot x \leq b\}$$

הינה קבוצה קמורה.

<u>הוכחה:</u> תהיינה $x,y \in K$. בגלל תכונות המכפלה הפנימית (ראה פרק 1 סעיף 1.2) קיים (לכל $0 \leq \lambda \leq 1$)

$$a \cdot (\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda(a \cdot x) + (1-\lambda)(a \cdot y)$$

מכיון ש- $x,y \in K$ קיים

$$a \cdot x \leq b \qquad\qquad a \cdot y \leq b$$

ולכן

$$\lambda(a \cdot x) + (1-\lambda)(a \cdot y) \leq \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

לפיכך קיים

$$a \cdot (\lambda x + (1-\lambda)y) \leq b$$

ולכן

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K$$

<u>דוגמא:</u> יהי $p \in R^n$ וקטור מחירים, ויהי $I \geq 0$ הכנסה. נראה כי קבוצת התקציב

$$B = \{x \in R^n_+ \mid p \cdot x \leq I\}$$

הינה קבוצה קמורה.

(נזכיר כי $R^n_+ = \{(x_1,\ldots,x_n) \in R^n \mid x_i \geq 0 \text{ לכל } i\}$)

כדי להראות ש-B קמורה יש לשים לב לכך ש- R^n_+ קמורה (הוכח) ולכך ש-

$$B = R^n_+ \cap \{x \in R^n \mid p \cdot x \leq I\}$$

ולכן קמירות B נובעת מטענות 4 ו-2.

<u>3.2 פונקציות קעורות וקמורות</u>

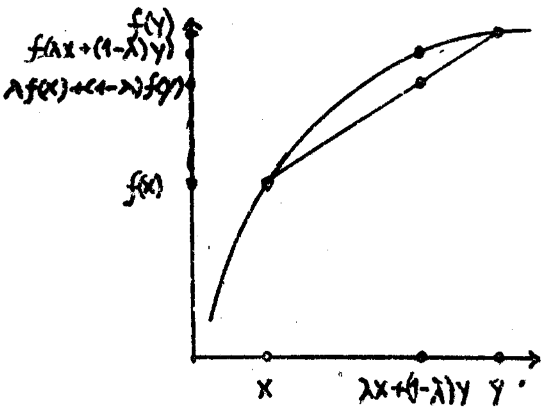
הקורא נתקל ודאי בעבר בהגדרת פונקציה ממשית קעורה (קמורה) באמצעות סימן הנגזרת השניה. בסעיף זה נביא הגדרות כלליות יותר שאינן דורשות את גזירות הפונקציה ונראה את שקילות ההגדרות במקרה שהפונקציה גזירה. כמו כן, ההגדרות שנביא נכונות לפונקציות על R^n.

<u>הגדרה:</u> יהי A תחום קמור ב-R^n. פונקציה $f:A \to R$ תקרא **קעורה** אם לכל $x,y \in A$ ולכל $0 \leq \lambda \leq 1$ קיים

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

פונקציה $f : A \to R$ תקרא קעורה חזק אם לכל $0 < \lambda < 1$ מתקיים אי שוויון חד.

עבור $n = 1$ ניתן להבין את ההגדרה באמצעות הפרוש הגאומטרי.



הנקודה $\lambda x + (1-\lambda)y$ שייכת לקטע המחבר את הנקודות x ו- y ומהווה "שקלול" מסויים שלהן. משמעות הדרישה בהגדרה היא שערך הפונקציה בנקודה זו יהיה לפחות כמו השקלול של ערכי הפונקציה בקצות הקטע, כלומר יהיה לא "מתחת" לקטע המחבר בין $(x, f(x))$ ו- $(y, f(y))$. המצב מודגם בשרטוט.

<u>הגדרה:</u> יהי $A \subset R^n$ תחום קמור. פונקציה $f : A \to R$ תקרא קמורה אם לכל $x,y \in R^n$ ולכל $0 \le \lambda \le 1$ קיים

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

פונקציה $f : A \to R$ תקרא קמורה חזק אם לכל $0 < \lambda < 1$ מתקיים אי שוויון חד.

<u>הערה:</u> f קמורה אם ורק אם $-f$ קעורה.

<u>דוגמה:</u> פונקציה $f:R^n \to R$ מהטפוס $f(x) = tx + s$ $(t \in R^n)$ הינה קעורה וקמורה כי לכל $x,y \in R^n$ ולכל $0 \le \lambda \le 1$ קיים

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= t(\lambda x + (1-\lambda)y) + s = \\ &= \lambda tx + (1-\lambda)ty + \lambda s + (1-\lambda)s = \\ &= \lambda(tx + s) + (1-\lambda)(ty + s) = \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y) \end{aligned}$$

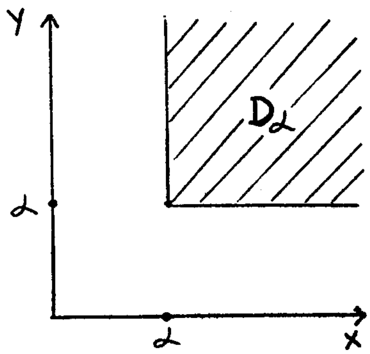
<u>הגדרה:</u> יהי $A \subset R^n$ תחום קמור. פונקציה $f : A \to R$ תקרא קוואזי קעורה אם לכל $\alpha \in R$, $\{x \in R^n \mid f(x) \ge \alpha\}$ הינה קבוצה קמורה.

דוגמא: תהי $f : R^2 \to R$ המוגדרת על-ידי

$$f(x, y) = \text{Min}\ \{x, y\}$$

f קוואזי קעורה כי לכל $\alpha \in R$, $D_\alpha = \{(x, y)\ |\text{Min}\ \{x,y\} \geq \alpha\}$ הינה קבוצה קמורה.

קבוצה זו מוצגת בשרטוט הבא.



הערה: הנחת הקמירות כלפי הראשית של עקומות אדישות ועקומות שוות תפוקה שקולה להנחת הקוואזי קעירות של פונקציות התועלת והתפוקה.

טענה: יהי $A \subset R^n$ תחום קמור ו- $f : A \to R$ קעורה. אזי f קוואזי קעורה.

הוכחה: יהי נתון α ויהיו x,y המקיימים $f(y) \geq \alpha$, $f(x) \geq \alpha$. יש להראות כי לכל $0 \leq \lambda \leq 1$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \alpha$$

ואמנם בגלל קעירות f מתקיים

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)\ f(y) \geq \lambda\alpha + (1-\lambda)\ \alpha\ = \alpha$$

דוגמא: לא כל פונקציה קוואזי קעורה היא גם קעורה. למשל $f : R_+^2 \to R$ הניתנת על-ידי

$$f(x, y) = x^2\ y^2$$

f קוואזי קעורה כי לכל $\alpha \geq 0$ $x^2\ y^2 \geq \alpha$ אם ורק אם $xy \geq \sqrt{\alpha}$ ולכן

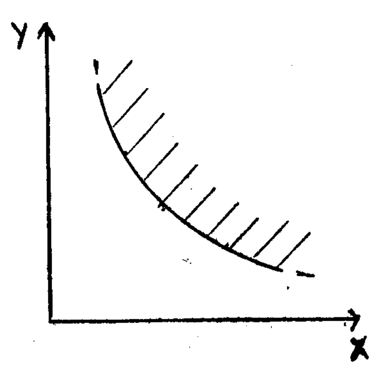
$$\{(x, y)\,|\,f(x, y) \geq \alpha\}$$

הינה קבוצה מהטפוס

$$\{(x, y)\,|\,xy \geq \beta\}$$

שהיא השטח "מעלי" היפרבולה.

ניתן להראות כי קבוצה זו קמורה ולהמחשה גרפית (בלבד) מובא השרטוט הבא.



עבור $\alpha < 0$ נקבל

$$\{(x, y) | f(x, y) \geq \alpha\} = R_+^2$$

ולכן אף היא קמורה.

מצד שני f אינה קעורה כי קיים

$$\tfrac{1}{2}f(0, 0) + \tfrac{1}{2}f(1, 1) = \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 = \tfrac{1}{2}$$

בעוד ש-

$$f(\tfrac{1}{2}(0, 0)) + \tfrac{1}{2}(1, 1)) = f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{16}$$

נראה עתה שעבור פונקציות גזירות פעמיים המוגדרות על הישר הממשי, מזדהה מושג הקעירות כפי שהוגדר בסעיף זה עם המושג המוכר מקודם.

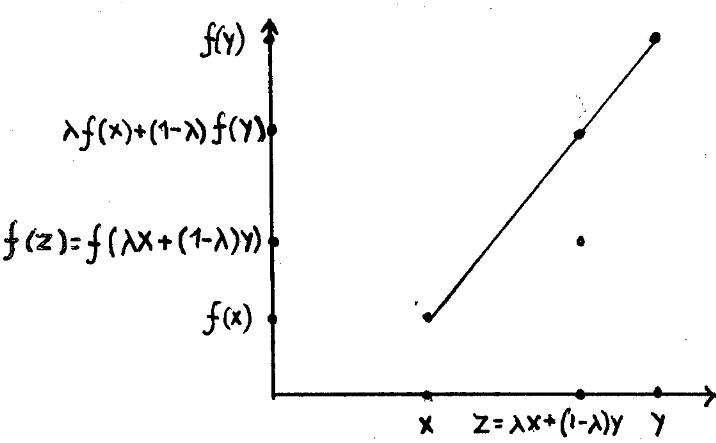
<u>טענה:</u> תהי $f : R \to R$ גזירה פעמיים, אזי f קעורה אם ורק אם לכל x $f''(x) \leq 0$.

<u>הוכחה:</u> א. נניח כי לכל x $f''(x) \leq 0$, ונוכיח כי f קעורה. ההוכחה תעשה בדרך השלילה. נניח כי f אינה קעורה ונגיע מכאן לסתירה לכך ש-f' הינה פונקציה לא עולה (כלומר לכך שלכל x $f''(x) \leq 0$).

אם f אינה קעורה אזי יש $x, y \in R$ $(y > x)$ ו- $0 < \lambda < 1$ כך ש-

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

המצב מתואר בשרטוט הבא.



נסמן $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

לכן קיים

$$f(z) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

מכאן ניתן לקבל (הוכחה בסוגרים בסוף הוכחת חלק א') כי

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} > \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

לפי משפט הערך הממוצע (ראה[4], עמ' 240) קיימות u,v כך ש- $x < v < z$ ו- $z < u < y$ המקיימות

$$f'(u) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \qquad f'(v) = \frac{f(z) - f(x)}{x - z}$$

מכאן $f'(u) > f'(v)$

אבל $u > v$ וקבלנו סתירה לכך ש-f' פונקציה לא עולה.

נוכיח כי)

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} > \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

מכך ש- $\lambda f(x) + (1-\lambda)\ f(y) > f(z)$

נקבל $\lambda f(x) + (1-\lambda)\ f(y) > \lambda f(z) + (1-\lambda)\ f(z)$

לכן $\dfrac{f(y) - f(z)}{\lambda} > \dfrac{f(z) - f(x)}{1 - \lambda}$

מכיון ש- $y - x > 0$ נקבל

$$\frac{f(y) - f(z)}{\lambda(y - x)} > \frac{f(z) - f(x)}{(1-\lambda)(y - x)}$$

ובעזרת השוויונים $z - x = (1-\lambda)(y - x)$, $y - z = \lambda(y - x)$

נקבל

$$\left(\frac{f(y) - f(z)}{y - z} > \frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right.$$

ב. נניח כי f קעורה ונוכיח כי לכל x $f''(x) \le 0$, כלומר. נוכיח כי f' הינה פונקציה לא עולה. יהיו x,y המקיימות $y > x$.

מכך ש-f קעורה נובע כי לכל $0 < \lambda < 1$ קיים

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda)\ f(y) \qquad (*)$$

מכאן נקבל

$$f(y + \lambda(x - y)) \ge f(y) + \lambda(f(x) - f(y))$$

ואם נעביר אגף את $f(y)$ ונחלק ב- $\lambda(x - y)$ (זהו מספר שלילי) נקבל

$$\frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda(x - y)} \le \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

מכיון שאי השוויון מתקיים לכל $\lambda > 0$ הרי שאם נשאיף את λ לאפס נקבל

$$f'(y) \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

(באגף הימני המונה והמכנה הוכפלו ב-(1-)).

באופן דומה ניתן לקבל מ-(*) כי

$$f(x + (1-\lambda)(y - x)) \geq f(x) + (1-\lambda)(f(y) - f(x))$$

ולכן

$$\frac{f(x + (1-\lambda)(y - x)) - f(x)}{(1-\lambda)(y - x)} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

ועל-ידי השאפת λ לאחד נקבל

$$f'(x) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

לכן קיבלנו כי לכל x,y כך ש- $y > x$ קיים

$$f'(x) \geq f'(y)$$

ולכן f' הינה פונקציה לא עולה.

נסיים את הסעיף בטענה ללא הוכחה הנותנת אפיון חשוב לפונקציות קעורות חזק.

<u>טענה</u>: $f : R^n \to R$ קעורה חזק אם ורק אם המינורים הראשיים של מטריצת הנגזרות מסדר שני מחליפים סימן, כלומר אם ורק אם לכל $x \in R^n$

$$f_{11}(x) < 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}(x) > 0, \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}(x) > 0$$

(באשר f_{ij} הינה הנגזרת השניה של f לפי x_i ואחר כך לפי x_j, כלומר $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$).

<u>3.3 משפטי הפרדה</u>

כזכור ישר במישור R^2 הוא קבוצה מהטיפוס

$$\{(x_1, x_2) \mid a_1x_1 + a_2x_2 = r\}$$

באשר $a_1, a_2, r \in R$. ניתן לכתוב את הקבוצה גם בצורה

$$\{x \in R^2 \mid (a_1, a_2) \cdot (x_1, x_2) = r\}$$

באשר הכפל הוא המכפלה הפנימית של הוקטורים.

באופן דומה, מישור ב-R^3 הינו קבוצה מהטפוס

$$\{x \in R^3 \mid (a_1, a_2, a_3) \cdot (x_1, x_2, x_3) = r\}$$

באשר $r \in R$, a_1, a_2, a_3.

את המושגים של ישר ב-R^2 ומישור ב-R^3 ניתן להכליל ל-R^n

<u>הגדרה</u>: **על מישור** ב-R^n הינו קבוצה מהטפוס

$$\{x \in R^n \mid a \cdot x = b\}$$

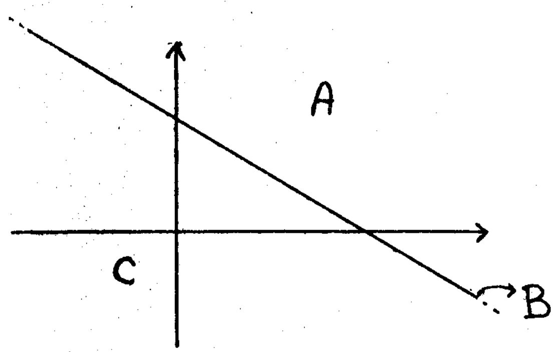
באשר $a \in R^n$ ו- $b \in R$.

כל על מישור ב-R^n מחלק את המרחב לשלוש קבוצות זרות (וקמורות):

$$A = \{x \in R^n \mid a \cdot x > b\}$$

$$B = \{x \in R^n \mid a \cdot x = b\}$$

$$C = \{x \in R^n \mid a \cdot x < b\}$$



לדוגמא, בשרטוט מופיעות הקבוצות כאשר $n = 2$.

<u>הגדרה</u>: הקבוצות $K, L \subset R^n$ **ניתנות להפרדה** אם יש על מישור

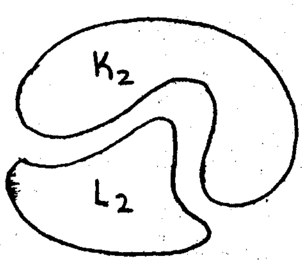
$$\{x \in R^n \mid a \cdot x = b\}$$

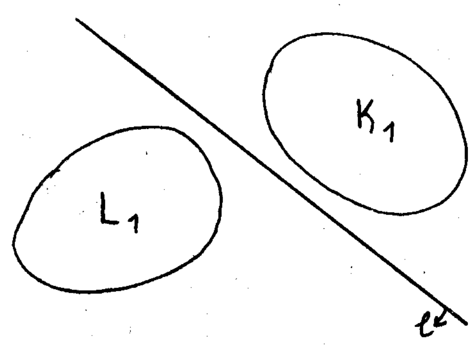
כך ש- $L \subset \{x \in R^n \mid a \cdot x \le b\}$

וכן $K \subset \{x \in R^n \mid a \cdot x \ge b\}$

K, L **ניתנות להפרדה ממש** אם יש אי שוויונות חדים.

<u>דוגמא</u>: K_1 ו- L_1 ניתנות להפרדה ממש (על-ידי ℓ) אך K_2 ו- ℓ_2 אינן ניתנות להפרדה.





משפט: תהי $K \subset R^n$ קמורה וסגורה ותהי $x \in R^n$ כך ש- $x \notin K$. אזי יש וקטור $a \in R^n$, $a \neq 0$ כך שלכל $z \in K$

$$a \cdot x > a \cdot z$$

(במלים אחרות, K ו-$\{x\}$ ניתנות להפרדה ממש).

הוכחה: א) נסמן ב-y נקודה קרובה ביותר ל-x מבין נקודות K. כלומר לכל $z \in K$ קיים

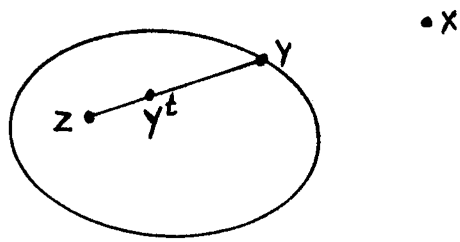
$$||x - y|| \leq ||x - z||$$

ב) תהי z נקודה כלשהי ב-K.

ג) מקמירות K נובע שלכל $0 \leq t < 1$

$$y^t = ty + (1 - t)\, z \in K$$

המצב מתואר בשרטוט.



ד) מ- א) נובע כי

$$||x - y|| \leq ||x - y^t||$$

ולכן

$$(x - y) \cdot (x - y) \leq (x - y^t) \cdot (x - y^t)$$

ה) בעזרת שימוש בתכונות המכפלה הפנימית נקבל

$$(x - y^t) \cdot (x - y^t) = (x - y + y - y^t) \cdot (x - y + y - y^t) =$$
$$= (x - y) \cdot (x - y) + (y - y^t) \cdot (y - y^t) + 2(x - y) \cdot (y - y^t)$$

ו) מ- ד) ומ- ה) נובע כי

$$0 \leq (y - y^t) \cdot (y - y^t) + 2(x - y) \cdot (y - y^t)$$

ז) מהגדרת y^t ב- ג) נובע

$$0 \leq ((1 - t)y - (1 - t)z) \cdot ((1 - t)y - (1 - t)z) +$$
$$+ 2(x - y) \cdot ((1 - t)y - (1 - t)z) =$$
$$= (1 - t)^2||y - z||^2 + 2(1 - t)((x - y) \cdot (y - z))$$

ח)   נחלק ב- $1 - t$ $(t < 1)$ ונקבל

$$0 \le (1 - t)\ ||y - z||^2 + 2((x - y) \cdot (y - z))$$

ט)   נשאיף את t ל-1 ונקבל

$$0 \le (x - y) \cdot (y - z)$$

י)   לכן $(x - y) \cdot z \le (x - y) \cdot y$

יא) $x \ne y$ ולכן מתכונות המכפלה הפנימית (פרק 1 סעיף 1.2) נובע כי

$$0 < (x - y) \cdot (x - y)$$

יב) לכן $(x - y) \cdot y < (x - y) \cdot x$

יג) מ- י) ומ- יב) נקבל

$$(x - y) \cdot z < (x - y) \cdot x$$

יד. נסמן $a = x-y$ וקבלנו את הדרוש.

<u>דוגמא:</u> $K = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 18\}$, $x = (4, 4)$

במקרה זה הנקודה הקרובה ביותר ל-x מבין נקודות K הינה $(3, 3)$.

מישור מפריד הינו למשל

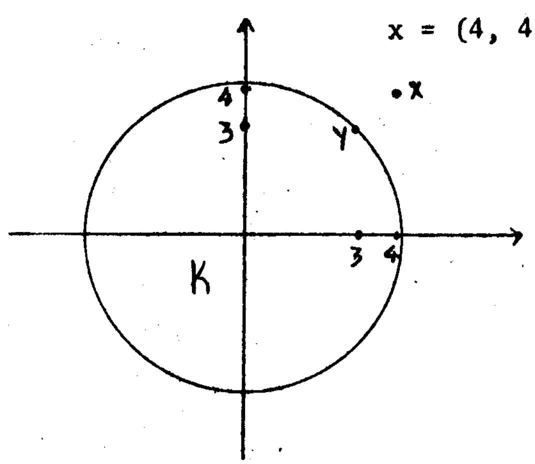
$\{(x_1,x_2) \mid (1,1) \circ (x_1,x_2) = 6\}$,

וניתן לראות כי לכל

$(z_1, z_2) \in K$

קיים

$$(1, 1)(4, 4) > 6 \ge (1, 1)(z_1, z_2)$$



קיימים עוד מישורים מפרידים, ולדוגמא:

$$\{(x_1, x_2 \mid (3, 4)\ (x_1, x_2) = 24\}$$

נביא ללא הוכחה 2 משפטי הפרדה נוספים.

משפט: תהי $C \subset R^n$ קבוצה קמורה בעלת נקודה פנימית. אם x נמצאת על שפת C אזי יש וקטור $a \in R^n$, $a \neq 0$, כך שלכל $z \in C$ קיים

$$a \cdot x \geq a \cdot z$$

משפט: תהיינה C ו- D קבוצות קמורות וזרות המוכלות ב- R^n. אם לפחות לאחת מהן יש נקודה פנימית אזי קיים וקטור $a \in R^n$, $a \neq 0$, כך שלכל $x \in C$ ולכל $z \in D$ קיים

$$a \cdot x \geq a \cdot z$$

3.4 הלמה של פרקש

בעזרת משפטי ההפרדה ניתן להוכיח את המשפט הבא.

משפט (הלמה של פרקש): יהיו $b \in R^n$, $a_1, \dots, a_m$. אזי

$$\left[\text{לכל } x \in R^n \quad \left.\begin{array}{l} a_1 \cdot x \geq 0 \\ a_2 \cdot x \geq 0 \\ \vdots \\ a_m \cdot x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b \cdot x \geq 0\right]$$

אם ורק אם יש $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ כך ש-

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$$

דוגמא: נתבונן בוקטורים הבאים השייכים ל-R^2:

$$(3, 2) \quad , \quad (3, 4) \quad , \quad (4, 6)$$

הוקטור $(4, 5)$ הינו קומבינציה אי שלילית שלהם כי קיים

$$(4, 5) = \tfrac{1}{3}(3, 2) + \tfrac{1}{3}(3, 4) + \tfrac{1}{2}(4, 6)$$

כיוון ה"אם" במשפט אומר שלכל (x_1, x_2) כך ש-

$$(3, 2) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$$

$$(3, 4) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$$

וכן
$$(4, 6) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$$
מתקיים גם
$$(4, 5) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$$
דבר זה ברור מכיון ש-
$$(4, 5) \cdot (x_1, x_2) = \tfrac{1}{3}(3, 2) \cdot (x_1, x_2) + \tfrac{1}{3}(3, 4) \cdot (x_1, x_2) + \tfrac{1}{2}(4, 6) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$$
(מפני שכל אחד מהמחוברים הינו אי שלילי).

כוון ה"רק אם" אומר שאם לכל (x_1, x_2) כך ש-
$$(3, 2) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$$
$$(3, 4) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$$
$$(4, 6) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$$
מתקיים גם
$$(4, 5) \cdot (x_1, x_2) \geq 0$$
אזי יש $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ (במקרה שלנו $\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}$)
כך ש-
$$(4, 5) = \lambda_1(3, 2) + \lambda_2(3, 4) + \lambda_3(4, 6)$$

<u>הוכחת המשפט:</u>

א. אם קיימים $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ כך ש- $b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$
אזי
$$b \cdot x = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i\right) \cdot x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i \cdot x)$$
ולכן אם לכל i $a_i \cdot x \geq 0$, מתקיים גם $b \cdot x \geq 0$.

ב. נניח שהתנאי שבסוגרים המרובעות מתקיים, נגדיר
$$K = \{a \in R^n \mid a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \text{ כך ש- } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0 \text{ יש}\}$$
K הינה קבוצה קמורה כי אם
$$c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \qquad d = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i$$

ולכל i $\lambda_i, \eta_i \geq 0$, אזי לכל $0 \leq \mu \leq 1$

$$\mu c + (1-\mu)d = \mu \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + (1-\mu) \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\mu\lambda_i + (1-\mu)\eta_i)a_i$$

ומכיון שלכל i $\mu\lambda_i + (1-\mu)\eta_i \geq 0$ נובע $\mu c + (1-\mu)d \in K$.

נניח בשלילה כי $b \notin K$. לכן לפי משפט ההפרדה שהוכח בסעיף הקודם יש $x \in R^n$, $x \neq 0$, כך שלכל $a \in K$

$$a \cdot x > b \cdot x$$

מכיון שהנקודה $(0,\ldots,0) \in R^n$ שייכת ל-K (ניתן לקחת $\lambda_i = 0$ לכל i) נקבל

$$0 = (0,\ldots,0) \cdot x > b \cdot x$$

נניח עתה כי יש i עבורו $a_i \cdot x < 0$. לכל $t > 0$ $ta_i \in K$ ועבור t מספיק גדול יתקיים

$$(ta_i) \cdot x = t(a_i \cdot x) < b \cdot x$$

וזה בסתירה להפרדה שבצענו.

לכן לכל i $a_i \cdot x \geq 0$.

כלומר מצאנו $x \in R^n$ כך שלכל i $a_i \cdot x \geq 0$ אבל $b \cdot x < 0$, וזה בסתירה להנחה שהתנאי בסוגרים המרובעות מתקיים.

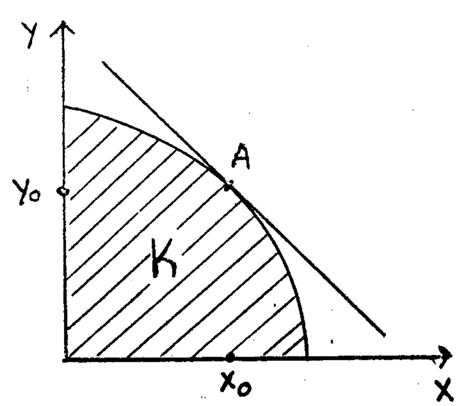
לכן $b \in K$. כלומר יש $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$ כך ש-

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i.$$

נביא עתה 2 שימושים כלכליים למשפטי ההפרדה.

3.5 מחירי יעילות

הקבוצה שבשרטוט הבא הינה קבוצת אפשרויות היצור של משק מסויים, ונניח כי הממשלה רוצה להביא את המשק ליצור בנקודה $A = (x_o, y_o)$



נניח כמו כן, כי במשק יש יצרן יחיד.

הממשלר יכולה לבצע את רצונה על-ידי צווים ופיקוח על רמת היצור של הפירמה, אך אם K קמורה יש דרך פחות מכבידה.

על הממשלה למצוא וקטור מחירים (p_x, p_y) ש"יפריד" את A מ-K, כלומר שיקיים לכל $(x, y) \in K$

$$p_x x_o + p_y y_o \geq p_x x + p_y y$$

ביחס מחירים זה הפירמה עצמה תגיע לידי יצור בנקודה A, באם תמכסם את רווחיה.

ניתן למצוא יחס מחירים כזה על-פי משפט הפרדה שהובא בסעיף 3.3.

3.6 משפט שווי משקל

במודל המובא בסעיף זה יש שלושה צרכנים ושתי סחורות. לצרכן i יש פונקציה תועלת $u_i : R^2 \to R$ רציפה, בעלת נגזרות חלקיות רציפות, וקוואזי קעורה. כמו כן, לכל (x_1, x_2) קיים $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}(x_1, x_2) > 0$, $\frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1, x_2)$.

לצרכן i יש סל התחלתי $(w_1{}^i, w_2{}^i)$ איתו הוא בא לשוק, ונניח כי הוקטור

$$w = (w_1{}^1, w_2{}^1) + (w_1{}^2, w_2{}^2) + (w_1{}^3, w_2{}^3)$$

(שהוא סך הסחורות במשק) חיובי בשני רכיביו.

<u>הגדרה</u>: $\tilde{x} = ((x_1{}^1, x_2{}^1), (x_1{}^2, x_2{}^2), (x_1{}^3, x_2{}^3))$ הוא **חלוקה פרטו אופטימלית** אם קיים

1. $\tilde{x}$ אפשרית, כלומר

$$(x_1{}^1, x_2{}^1) + (x_1{}^2, x_2{}^2) + (x_1{}^3, x_2{}^3) = (w_1{}^1, w_2{}^1) + (w_1{}^2, w_2{}^2) + (w_1{}^3, w_2{}^3)$$

2. אין חלוקה אפשרית אחרת

$$\tilde{y} = ((y_1{}^1, y_2{}^1), (y_1{}^2, y_2{}^2), (y_1{}^3, y_2{}^3))$$

כך שלכל $1 \leq i \leq 3$

$$u_i(y_1{}^i, y_2{}^i) \geq u_i(x_1{}^i, x_2{}^i)$$

ויש j עבורו

$$u_j(y_1{}^j, y_2{}^j) > u_j(x_1{}^j, x_2{}^j)$$

$\tilde{x}$ הינו וקטור ששלושת רכיביו הם נקודות ב-R^2 הנותנות את הצריכות הסופיות של שלושת הצרכנים.

$\tilde{x}$ הוא חלוקה פרטו אופטימלית אם הוא חלוקה מחדש של סך הסלים ההתחלתיים כך שבכל חלוקה אפשרית אחרת לא ניתן לשפר ממש את מצבו של אחד הפרטים בלי לפגוע בשאר.

הגדרה: יהי $p = (p_1, p_2)$ וקטור מחירים. חלוקה אפשרית

$$\tilde{x} = ((x_1^{\ 1},x_2^{\ 1}),\ (x_1^{\ 2},x_2^{\ 2}),\ (x_1^{\ 3},x_2^{\ 3}))$$

היא **שווי משקל ביחס ל-p** אם לכל $1 \le i \le 3$

$$u_i(x_1^{\ i},x_2^{\ i}) \ \ge\ u_i(y_1,\ y_2)$$

לכל $(y_1,\ y_2)$ בקבוצת התקציב של i

$$\{(y_1,y_2) \in R_+^2 \mid p_1y_1 + p_2y_2 \ \le\ p_1x_1^{\ i} + p_2x_2^{\ i}\}$$

כלומר לכל i $(x_1^{\ i},x_2^{\ i})$ הוא הסל המועדף בקבוצת כל הסלים אשר ערכם אינו עולה על שלו.

משפט שווי המשקל: אם $\tilde{x} = ((x_1^{\ 1},x_2^{\ 1}),(x_1^{\ 2},x_2^{\ 2}),(x_1^{\ 3},x_2^{\ 3}))$ הוא חלוקה פרטו אופטימלית אזי קיים $p = (p_1,p_2)$ כך ש-$\tilde{x}$ שווי משקל ביחס ל-p.

הוכחה: א) לכל $1 \le i \le 3$ נגדיר

$$G_i = \{y \in R_+^2 \mid u_i(y) \ > \ u_i(x_1^{\ i},x_2^{\ i})\}$$

G_i קמורה מכיון ש-u_i הינה קוואזי קעורה (ראה סעיף 3.2).

ב) תהי

$$G = \sum_{i=1}^{3} G_i$$

מטענה 1 בסעיף 3.1 נובע כי G קמורה.

טענת עזר: $w \notin G$ (באשר $w = (w_1^{\ 1},w_2^{\ 1}) + (w_1^{\ 2},w_2^{\ 2}) + (w_1^{\ 3},w_2^{\ 3})$)

הוכחת הטענה: אם $w \in G$ אזי ניתן היה לפרקו לשלושה וקטורים y^1,y^2,y^3 כך ש-

$$y^1 + y^2 + y^3 = w$$

וכן לכל $1 \le i \le 3$

$$u_i(y^i) > u^i(x_1{}^i, x_2{}^i)$$

וקבלנו סתירה לכך ש-$\tilde{x}$ פרטו אופטימלית.

<u>המשך ההוכחה:</u>

ג) לפי משפט הפרדה בסעיף 3.3 יש $p = (p_1,p_2) \neq 0$ כך שלכל $y \in G$ קיים $p \circ y \geq p \circ w$.

ד) $p_1,p_2 \geq 0$. נראה למשל כי $p_1 \geq 0$. הוקטור $(1\ ,0) + w$ שייך ל-G כי אם נוסיף לכל $(x_1{}^i\ ,x_2{}^i)$ את הוקטור $(0,\ 1/3)$ נקבל (בגלל ההנחה $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}(x_1,x_2) > 0$) כי

$$(x_1{}^i,\ x_2{}^i) + (1/3,\ 0) \in G_i$$

ולכן $(1\ ,0) + w$ (שהוא סכומם) שייך ל-G.

לפי ג) קיים

$$p \cdot (w + (1,\ 0)) \geq p \cdot w$$

או

$$p \cdot w + p_1 \geq p \cdot w$$

ולכן $p_1 \geq 0$

ה) $p_1,p_2 > 0$. לא נוכיח זאת אך נעיר כי ההוכחה מסתמכת על רציפות u_i, ועל כך ש-w חיובי בשני רכיביו.

נראה עתה כי לכל i $\quad u_i(x_1{}^i\ ,x_2{}^i) \geq u_i(y)$ לכל y בקבוצה

$$\{y \in R_+^2 \mid p \cdot y \leq p_1x_1{}^i + p_2x_2{}^i\}$$

ו) נניח בשלילה כי יש j ו-y כך ש-

$$u_j(y) > u^j(x_1{}^j,\ x_2{}^j)$$

וכן

$$p \cdot y \leq p_1x_1{}^j + p_2x_2{}^j$$

ז) בגלל רציפות u יש z קרוב ל-y כך ש-

$$u_j(z) > u_j(x_1{}^j,\ x_2{}^j)$$

וכן

$$p \cdot z < p_1x_1{}^j + p_2x_2{}^j$$

ח) נגדיר $\tilde{z} = (z^1, z^2, z^3)$ על-ידי

$$z^i = \begin{cases} \ddot{z} & i = j \\ (x_1{}^i, x_2{}^i) + \varepsilon(1, 0) & i \neq j \end{cases}$$

כאשר $\varepsilon > 0$ ומספיק קטן כך שיתקיים

$$p \cdot \sum_{i=1}^{3} z^i < p \cdot (x_1{}^1 + x_1{}^2 + x_1{}^3, x_2{}^1 + x_2{}^2 + x_2{}^3) = p \cdot w$$

ט) לכל $1 \le i \le 3$ $z^i \in G_i$, ולכן אי השוויון האחרון הינו בסתירה ל- ג).

י) לכן לכל i $u_i(x_1{}^i, x_2{}^i) \ge u_i(y)$ לכל y בקבוצה

$$\{ y \in R_+^2 \mid p \cdot y \le p_1 x_1{}^i + p_2 x_2{}^i \}$$

ולכן $\tilde{x}$ הינו שווי משקל ביחס ל-p.

פרק 4 - משפט קון טאקר וכופלי לגרנז'

4.1 בעית התכנון הלא לינארי

בעית התכנון הלא לינארי הינה בעיה בה אנו מבקשים למצוא מכסימום לפונקציה f ($f : R^n \to R$) מתוך הערכים המתקבלים בקבוצת הנקודות המקיימות לכל $1 \le i \le m$ $g_i(x) \ge 0$, באשר $g_i : R^n \to R$.

הפונקציה f נקראת פונקצית המטרה ואי השוויונים $g_1(x) \ge 0,\dots,g_m(x) \ge 0$ נקראים אילוצי הבעיה.

נניח כי f ו- g_i $(i = 1,\dots,m)$ הינן גזירות ברציפות.

ההצגה הסטנדרטית של הבעיה היא:

$$\left[\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{s.t} & g_1(x) \ge 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \ge 0 \end{array}\right] \qquad (*)$$

<u>הגדרה</u>: $x \in R^n$ יקרא **פתרון אפשרי** ל-(*) אם לכל $1 \le i \le m$ קיים $g_i(x) \ge 0$.

$x \in R^n$ יקרא **פתרון אופטימלי** ל-(*) אם הוא פתרון אפשרי, ולכל y פתרון אפשרי קיים $f(x) \ge f(y)$.

בפרק זה נתרכז בהוכחת תנאי הכרחי לכך ש- $x^* \in R^n$ הוא פתרון אופטימלי ל-(*), ונצטט משפט הנותן לכך גם תנאי מספיק.

<u>דוגמא</u>: בעית הפרט במשק עם 2 מוצרים ניתנת להצגה כבעית תכנון לינארי באופן הבא:

$$\begin{array}{ll} \max & u(x_1, x_2) \\ \text{s.t} & I - p_1x_1 - p_2x_2 \ge 0 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{array}$$

4.2 משפט קון טאקר

ההגדרה הבאה הינה יסודית בהוכחת המשפט המרכזי של פרק זה:

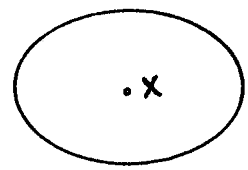
הגדרה: $d \in R^n$ יקרא **כוון אפשרי** ב- x אם יש ε' כך שלכל $0 \le \varepsilon \le \varepsilon'$ $x + \varepsilon d$ הוא פתרון אפשרי.

במילים אחרות, d הינו כוון אפשרי ב-x אם יש קטע מ-x בכוון הוקטור d השייך כולו לקבוצת הפתרונות האפשריים.

סימון: את קבוצת הכוונים האפשריים ב-x נסמן ב-$D(x)$.

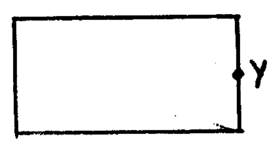
דוגמאות: (בדוגמאות הבאות הקבוצות המוצגות בשרטוטים הינן קבוצות הפתרונות האפשריים).

.1



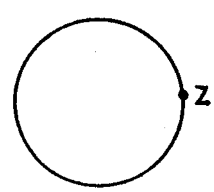
במקרה זה $D(x) = R^2$. ניתן לנוע מ-x בכל כוון כך שאם התזוזה מספיק קטנה עדיין נשאר בקבוצה הנתונה.

.2



כאן נקבל $D(y) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \le 0\}$

.3



קיים $D(z) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0\}$. להבדיל מ-(2), לא ניתן לנוע בכוון $(0, x_2)$ עבור x_2 כלשהו, מבלי לצאת מהקבוצה.

טענה: אם x^* פתרון אופטימלי של (*) אזי לכל $d \in D(x^*)$

קיים $\nabla f(x^*) \cdot d \le 0$

לתזכורת, $\nabla f(x)$ הוא הגרדיאנט של f בנקודה x:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

<u>הוכחה</u>: לפי משפט מפרק 1 סעיף 1.9 קיים

$$\nabla f(x^*) \cdot d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x^* + \varepsilon d) - f(x^*)}{\varepsilon}$$

נניח בשלילה כי יש $\bar{d} \in D(x^*)$ עבור $\nabla f(x^*) \cdot \bar{d} > 0$.

לכן

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x^* + \varepsilon\bar{d}) - f(x^*)}{\varepsilon} > 0$$

ולכן יש $\hat{\varepsilon}$ כך שלכל $0 < \varepsilon \le \hat{\varepsilon}$ קיים

$$\frac{f(x^* + \varepsilon\bar{d}) - f(x^*)}{\varepsilon} > 0$$

מכאן שלכל $0 < \varepsilon \le \hat{\varepsilon}$

$$f(x^* + \varepsilon\bar{d}) - f(x^*) > 0$$

$\bar{d}$ כוון אפשרי ב-x^* ולכן יש ε' כך שלכל $0 \le \varepsilon \le \varepsilon'$ $f(x^* + \varepsilon\bar{d})$ פתרון אפשרי.

נקח $0 < \varepsilon < \min\{\hat{\varepsilon}, \varepsilon'\}$ ואזי

(1) $f(x^* + \varepsilon\bar{d})$ פתרון אפשרי.

(2) $f(x^* + \varepsilon\bar{d}) > f(x^*)$

וקבלנו סתירה לכך ש-x^* פתרון אופטימלי.

<u>טענה</u>: יהי x פתרון אפשרי ו- $d \in D(x)$. אם $g_i(x) = 0$ עבור i מסויים אזי $\nabla g_i(x) \cdot d \ge 0$.

<u>הוכחה</u>: d כוון אפשרי לכן יש $\hat{\varepsilon}$ כך שלכל $0 \le \varepsilon \le \hat{\varepsilon}$ $x + \varepsilon d$ פתרון אפשרי ולכן

$$g_i(x + \varepsilon d) \ge 0$$

מכאן שעבור $0 < \varepsilon \le \hat{\varepsilon}$

$$\frac{g_i(x + \varepsilon d) - g_i(x)}{\varepsilon} \ge 0$$

ובהשאיפנו את ε לאפס נקבל

$$\nabla g_i(x) \cdot d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g_i(x + \varepsilon d) - g_i(x)}{\varepsilon} \geq 0$$

נניח בהמשך שהפונקציות של האילוצים מקיימות גם את התנאי ההפוך. כלומר עבור x פתרון אפשרי אם $d \in R^n$ מקיים $\nabla g_i(x) \cdot d \geq 0$ לכל i עבורו $g_i(x) = 0$ אזי $d \in D(x)$.

פרוט התנאים לקיום הנחה זו הינו מעבר לחומר החוברת, אך נציין כי המקרים בהם אינה מתקיימת הינם "בלתי שגרתיים".

יהי x^* פתרון אופטימלי. נסמן

$$A = \{i \mid g_i(x^*) = 0\}$$

בלי הגבלת הכלליות נניח כי

$$k \leq m, \qquad A = \{1,\ldots,k\}$$

לפי ההנחה והטענה הראשונה מתקיים לכל $d \in R^n$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla g_1(x^*) \cdot d \geq 0 \\ \vdots \\ \nabla g_k(x^*) \cdot d \geq 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad -\nabla f(x^*) \cdot d \geq 0$$

כי אם d מקיים את התנאים שבצד שמאל אזי לפי ההנחה d כוון אפשרי ב-x^* ולכן לפי הטענה הנ"ל $\nabla f(x^*) \cdot d \leq 0$.

בעזרת הלמה של פרקש (פרק 3 סעיף 3.4) נקבל כי קיימים $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \geq 0$ כך ש-

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x^*)$$

ולכן

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

(באשר ה-0 הינו וקטור האפס ב-R^n).

הדיון האחרון מוביל אותנו למשפט קון טאקר.

<u>משפט</u> (קון טאקר): תנאי הכרחי לכך ש-x^* יהיה פתרון אופטימלי של בעית התכנון הלא לינארי המוצגת בצורה (*) הוא שיהיו קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$ כך ש-

(1) $$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

(2) לכל $1 \leq i \leq m$ $$\lambda_i g_i(x^*) = 0$$

<u>הוכחה:</u> יהי x^* פתרון אופטימלי.

מהדיון שנעשה לפני המשפט ידוע כי לכל $1 \leq i \leq k$ (עבורו כאמור $g_i(x^*) = 0$) יש $\lambda_i \geq 0$ כך ש-

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

לכל $k+1 \leq i \leq m$ (עבורו $g_i(x^*) > 0$) נגדיר $\lambda_i = 0$ ואזי תנאי (1) מתקיים כי

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

תנאי (2) מתקיים כי לכל $1 \leq i \leq k$ $g_i(x^*) = 0$ ולכל $k+1 \leq i \leq m$ $\lambda_i = 0$.

נעיר כאן כי תנאי קון טאקר אינם תמיד תנאים מספקים, והקורא מופנה לדוגמא שבסעיף הבא.

המשפט הבא נותן תנאי **מספיק** לפתרון בעית תכנון לא לינארי.

<u>משפט:</u> (ללא הוכחה). אם f ו-g_i $(i = 1,\dots,m)$ קעורות וקיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$ כך ש-

(1) $$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

(2) לכל $1 \leq i \leq m$ $$\lambda_i g_i(x^*) = 0$$

אזי x^* הינו פתרון אופטימלי ל-(*).

4.3 דוגמא חשובית

נפתור את הבעיה

$$\max \quad x_1 \cdot x_2$$
$$\text{s.t} \quad 1 - x_1 - x_2 \ge 0$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

לפי משפט קון טאקר, פתרון אופטימלי צריך לקיים את תנאי קון טאקר (כלומר את התנאים המופיעים במשפט).

נחפש לכן את הנקודות (x_1, x_2) עבורן יש $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0$ כך ש-

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וכן

$$\lambda_1(1 - x_1 - x_2) = 0$$
$$\lambda_2 \cdot x_1 = 0$$
$$\lambda_3 \cdot x_2 = 0$$

לכן יש לפתור את המערכת

$$x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$x_1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1(1 - x_1 - x_2) = 0$$
$$\lambda_2 \cdot x_1 = 0$$
$$\lambda_3 \cdot x_2 = 0$$

באשר $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 \ge 0$.

מערכת משוואות מסוג זה נח לפתור על-ידי הפרדה למקרים:

א. אם $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ אזי צריך להתקיים $1 - x_1 - x_2 = 0$

וכן $x_1 = 0$ ו- $x_2 = 0$.

אבל מצב כזה לא יתכן.

ב. אם $\lambda_1 = 0$ אזי $x_2 = -\lambda_2$ ו- $x_1 = -\lambda_3$. אבל מתקיים $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ וכן $-\lambda_3 \leq 0$, $-\lambda_2 \leq 0$ ולכן $x_1 = x_2 = 0$ ו- $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. מכאן $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$ פתרון למערכת ולפיכך $(0, 0)$ מועמד להיות פתרון אופטימלי.

ג. נניח $\lambda_1 \neq 0$. מ-2 המשוואות הראשונות נקבל

$$\lambda_1 - x_2 = \lambda_2$$
$$\lambda_1 - x_1 = \lambda_3$$

מכאן ומ-2 המשוואות האחרונות נקבל

$$(\lambda_1 - x_2)x_1 = 0$$
$$(\lambda_1 - x_1)x_2 = 0$$

לכן

$$\lambda_1 x_1 = x_1 x_2 = \lambda_1 x_2$$

ומכיון ש- $\lambda_1 \neq 0$ נקבל $x_1 = x_2$.
מהמשוואה השלישית נקבל $x_1 + x_2 = 1$ ולכן $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. מכאן $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ פתרון למערכת ולפיכך גם $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ מועמד להיות פתרון אופטימלי.

מפרק 1 סעיף 1.6 נובע שלמערכת יש פתרון אופטימלי. לפי משפט קון טאקר כל פתרון צריך לקיים את תנאי קון טאקר.
לפיכך רק $(0, 0)$ ו- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ יכולים להיות פתרונות אופטימלים. ברור כי $(0, 0)$ איננו פתרון אופטימלי (ומכאן דוגמא שתנאי קון טאקר הינם תנאים הכרחיים בלבד) ולכן $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ הינו הפתרון האופטימלי.

4.4 כופלי לגרנז'

בעזרת משפט קון טאקר ניתן להוכיח את המשפט השימושי הבא.

<u>משפט (כופלי לגרנז')</u>: תהיינה $f, g_i : R^n \to R$ $(i = 1,\dots,m)$ גזירות ברציפות.

תנאי הכרחי לכך ש-x^* יהיה פתרון אופטימלי לבעיה

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.t} \quad & g_1(x) = 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) = 0 \end{aligned}$$

הוא שיש $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ (לאו דווקא אי שליליים) כך ש-

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

<u>הוכחה</u>: הבעיה הנתונה שקולה לבעיה

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.t} \quad & g_1(x) \ge 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \ge 0 \\ & -g_1(x) \ge 0 \\ & \vdots \\ & -g_m(x) \ge 0 \end{aligned}$$

לפי משפט קון טאקר יש $\lambda_1',\ldots,\lambda_m',\lambda_1'',\ldots,\lambda_m'' \ge 0$ כך ש-

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i'' \nabla - g_i(x^*) = 0 \qquad (1)$$

נגדיר לכל i $\lambda_i = \lambda_i' - \lambda_i''$ ונקבל

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

(סימנם של ה-λ_i איננו ידוע משום שכל λ_i הינו הפרש של 2 מספרים אי שליליים)

ה-λ-ים נקראים **כופלי לגרנז'**.

נביא עתה 2 שימושים כלכליים למשפט קון טאקר.

4.5 "חלוקה צודקת"

נתונים שני פרטים הצריכים לחלק ביניהם רכוש משותף שמורכב מכמות $a > 0$ של מוצר x וכמות $b > 0$ של מוצר y. לפרט 1 פונקציות תועלת $u : R^2 \to R$ ולפרט 2 פונקציות תועלת $v : R^2 \to R$. u ו-v גזירות פעמיים ברציפות ובעלות נגזרות חלקיות חיוביות ממש. כיצד נגיע ל"חלוקה צודקת?"

אחת מן הפרוצדורות הבאות בחשבון מוצגת להלן.

נניח כי החלוקה מתבצעת באופן הבא. פרט 1 מכריז על סל (x, y) ופרט 2 יכול לבחור בין (x, y) לבין משלימו $(a - x, b - y)$.

נניח גם כי פרט 1 מכיר את העדפותיו של פרט 2 ולכן יודע באילו מבין שני הסלים הוא יבחר. מכאן שהסלים האפשריים לפרט 1 הם אלו שבהכרזתם פרט 2 יבחר את המשלים.

כלומר (x, y) אפשרי לפרט 1 אם

$$v(a - x, b - y) \geq v(x, y)$$

(כל זאת מלבד המגבלות הנוספות של גודל הרכוש).

לכן הבעיה היא

$$\begin{array}{ll} \max & u(x, y) \\ 0 \leq x \leq a & \\ 0 \leq y \leq b & \\ & \\ \text{s.t} & v(a - x, b - y) \geq v(x, y) \end{array}$$

נעביר את הבעיה לצורה (*)

$$\max \quad u(x, y)$$
$$\text{s.t} \quad v(a - x, b - y) - v(x, y) \geq 0$$
$$x \geq 0$$
$$a - x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$b - y \geq 0$$

תנאי קון טאקר לאופטימום יהיו

$$u_x(x,y) + \lambda_1[-v_x(a - x,b - y) - v_x(x,y)] + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3(-1) = 0$$

$$u_y(x,y) + \lambda_1[-v_y(a - x,b - y) - v_y(x,y)] + \lambda_4 \cdot 1 + \lambda_5(-1) = 0$$
$$\lambda_1(v(a - x, b - y) - v(x, y)) = 0$$
$$\lambda_2 x = 0$$
$$\lambda_3 (a - x) = 0$$
$$\lambda_4 y = 0$$
$$\lambda_5 (b - y) = 0$$

באשר $\lambda_i \geq 0$ לכל $1 \leq i \leq 5$.

נוכיח כי פרט 1 יכריז על סל (x, y) כך שפרט 2 אדיש בינו לבין הסל המשלים, כלומר באופטימום מתקיים

$$v(a - x, b - y) = v(x, y)$$

קיומו של סל אופטימלי מובטח על סמך משפט מפרק 1 סעיף 1.6. לפי משפט קון טאקר, סל אופטימלי צריך לקיים את תנאי קון טאקר.

נניח בשלילה כי (x, y) סל אופטימלי וכי

$$v(a - x, b - y) - v(x, y) > 0$$

לפיכך מתקיים $\lambda_1 = 0$.

כמו כן $(a - x, b - y) \neq (0, 0)$ כי לא יתכן ש-

$$v(0, 0) > v(a, b)$$

(מכיון ש- $a, b > 0$ ו- $v_x, v_y > 0$)

נניח כי $a - x > 0$. אזי $\lambda_3 = 0$

מהאילוץ הראשון נקבל עתה

$$u_x + \lambda_2 = 0$$

או

$$u_x = -\lambda_2$$

אבל $u_x > 0$ ו- $-\lambda_2 \le 0$ ולכן

$$0 < u_x = -\lambda_2 \le 0$$

וקבלנו סתירה.

לכן תנאי קון טאקר אינם מתקיימים עבור סל כזה ומכאן שאינו סל אופטימלי.

4.6 מחירי צל

נתבונן בבעיתו של יצרן שלרשותו כמויות קבועות b_i של m גורמי יצור ואשר פונקצית הרווח שלו הינה f. עבור $1 \le i \le m$ הפונקציה g_i מתאימה לכל כמות תפוקה x. את כמות גורם היצור i הדרושה כדי ליצרו.

הבעיה היא

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.t} \quad & g_1(x) \le b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \le b_m \end{aligned}$$

כמות התפוקה האופטימלית (בהנחה שהיא יחידה) תלויה בוקטור $b = (b_1, \ldots, b_m)$, ולכן נסמנה ב-$x(b)$. $f(x(b))$ הינו הרווח האופטימלי. נניח כי הפונקציה x גזירה ברציפות וכן נניח שאם אילוץ מסויים מתקיים, כלומר $g_i(x(b)) = b_i$, אזי אותו אילוץ ימשיך להתקיים אם נזיז מעט את b ל-b' (כלומר יתקיים $g_i(x(b')) = b_i'$).

<u>טענה</u>: יהי λ_k כופל לגרנז' המתאים לאילוץ $g_k(x) \le b_k$ שבבעיה הנ"ל. אזי קיים

$$\frac{\partial f(x)}{\partial b_k}(b) = \lambda_k$$

<u>הוכחה:</u> $x(b)$ פתרון אופטימלי. לכן מתקיימים תנאי קון טאקר:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(b)) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x}(x(b)) \tag{1}$$

(2) לכל $1 \le i \le m$ $\quad \lambda_i(b_i - g_i(x(b)) = 0$

קיים

$$\frac{\partial f(x)}{\partial b_k}(b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(b)) \frac{\partial x}{\partial b_k}(b)$$

מתנאי (1) נקבל

$$\frac{\partial f(x)}{\partial b_k}(b) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x}(x(b))\right) \frac{\partial x}{\partial b_k}(b) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x}(x(b)) \frac{\partial x}{\partial b_k}(b)$$

נחשב את הביטוי האחרון.

א. אם האילוץ ה-j מתקיים, כלומר $g_j(x(b)) = b_j$, אזי לפי ההנחה שלפני הטענה הוא ימשיך להתקיים גם בסביבת b. לכן אם b_j משתנה אזי גם $g_j(x(b))$ ישתנה בהתאם וקיים

$$\frac{\partial g_j(x)}{\partial b_j}(b) = 1$$

כמו כן אם $k \ne j$ ורק b_k משתנה, $g_j(x(b))$ אינו מושפע ונשאר שווה ל-b_j ולכן

$$\frac{\partial g_j(x)}{\partial b_k}(b) = 0$$

מכאן שנקבל

$$\frac{\partial g_j(x)}{\partial b_j}(b) = \frac{\partial g_j}{\partial x}(x(b)) \frac{\partial x}{\partial b_k}(b) = \delta_{jk}$$

באשר

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב. אם האילוץ ה-j אינו מתקיים, כלומר $g_j(x(b)) < b_j$, אזי שינוי קטן ב-b ישאיר את אי השוויון.

לכן מתנאי (2) נקבל $\lambda_j = 0$.

נציב עתה את מה שקבלנו בביטוי אותו אנו מחשבים ונקבל

$$\frac{\partial f(x)}{\partial b_k}(b) = \sum_{\substack{\text{האילוץ ה-}j\\ \text{מתקיים}}} \lambda_j \delta_{jk} + \sum_{\substack{\text{האילוץ ה-}j\\ \text{אינו מתקיים}}} 0 \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x}(x(b))\frac{\partial x}{\partial b_k}(b) = \lambda_k$$

מהטענה נובע כי ניתן לחשב את השינוי בערך הפתרון האופטימלי המתרחש עם שינוי ב-b_k, מבלי לפתור בעית תכנון לא לינארי חדשה.

נוהגים לקרוא ל-λ_i-ים גם בשם מחירי צל.

לא נעמוד כאן על מלוא משמעותו של שם זה. נציין רק את ההגיון הכלכלי בכך שכאשר לא מנוצל כל מלאי b_k הנתון (כלומר כאשר $g_k(x(b)) < b_k$) מחיר הצל של b_k הינו אפס (כי אז מתנאי קון טאקר $\lambda_k = 0$).

פרק 5 - משוואות דיפרנציאליות

5.1 משוואה דיפרנציאלית - המושג

משוואה דיפרנציאלית רגילה הינה ביטוי פורמלי בה מופיע סימן השוויון וסימני משתנים x, y, y', y'' וכו'.

__דוגמאות:__

$$y' = 2x^3 + 3$$

$$y' + y - 1 = 0$$

$$x^2y'' + 2y' = e^x$$

__הגדרה:__ **הסדר של המשוואה הדיפרנציאלית** הינו הסדר של הנגזרת הגבוהה ביותר שסימנה מופיעה במשוואה.

בפרק זה נדון בדרך כלל במשוואות מסדר 1 בלבד.

__הגדרה:__ פונקציה ממשית $f : R \to R$ **פותרת** את המשוואה אם ההצבה של f במקום הסמל y, f' במקום y', f'' במקום y'', וכו', משווה בין שני אגפי המשוואה.

__דוגמא:__ הפונקציה $f(x) = 3x + 2$ פותרת את המשוואה

$$y' + xy - 3x^2 = 2x + 3$$

שכן לכל $x \in R$

$$(3x + 2)' + x(3x + 2) - 3x^2 = 2x + 3$$

בהמשך נסמן, כמקובל, את הפונקציה הפותרת של משוואה דיפרנציאלית באות y, ועל הקורא להבחין מתי y הינו פונקציה ומתי הוא סמל מתמטי (המהווה חלק של משוואה דיפרנציאלית).

למשוואה דיפרנציאלית יש בדרך כלל אינסוף פתרונות, אולם לעתים קרובות נדרוש מהפתרון שיקיים תנאי נוסף. התנאי הוא קבלת ערך מסויים בנקודה מסוימת, כלומר שעבור x_o, y_o נתונים יתקיים

$$y(x_o) = y_o .$$

דרישה כזו נקראת **תנאי התחלה**.

דוגמא: לכל $c \in R$, $y_c(x) = cx^2$ הינו פתרון למשוואה

$$xy'' - y' = 0$$

אם נדרוש ש- $y(1) = 2$ אזי צריך להתקיים

$$c \cdot 1^2 = 2$$

ולכן מקבוצת הפתרונות נותר $y(x) = 2x^2$.

תורת המשוואות הדיפרנציאליות הינה תורה סבוכה. לא תמיד ניתן להביע את הפתרון בצורה אלמנטרית ויש צורך בקרובים נומרים המחושבים בעזרת מחשב.

בחוברת זו נצטמצם בלימוד פתרון מספר סוגים פשוטים של משוואות דיפרנציאליות ונציג שימושים של התורה בכלכלה.

5.2 פתרון משוואה מהצורה $y' = f(x)$

בסעיף זה נמצא פתרון למערכת מהצורה:

$$y' = f(x)$$
$$y(x_o) = y_o$$

באשר f הינה פונקציה ממשית, רציפה בקטע נתון.

ממשפט הפונקציות הקדומות (ראה [4], עמ' 340) הפתרון היחיד למערכת הנ"ל הינו

$$y(x) = \int_{x_o}^{x} f(t)\, dt + y_o$$

לשם הבהרה, נראה כי f הוא אמנם פתרון למשוואה הדיפרנציאלית:

$$y'(x) = \left(\int_{x_o}^{x} f(t)\, dt + y_o\right)' = f(x) + 0 = f(x)$$

$$y(x_o) = \int_{x_o}^{x_o} f(t)\, dt + y_o = 0 + y_o = y_o$$

<u>דוגמא:</u> הפתרון למשוואה $y' = e^x$

עם תנאי ההתחלה $y(0) = 3$

הינו

$$y(x) = \int_0^x e^t\,dt + 3 = e^t \Big|_0^x + 3 = e^x - 1 + 3 = e^x + 2$$

5.3 פתרון משוואה מהצורה $y' = g(y)$

בסעיף זה נמצא את הפתרון של מערכת מהצורה

$$y' = g(y)$$
$$y(x_o) = y_o$$

באשר g הינה פונקציה רציפה שאינה מתאפסת ברווח נתון I_y הכולל את הנקודה y_o.
יהא y פתרון של המערכת (ברווח מתאים I_x, והמקבל ערכים ב-I_y) אזי הפונקציה הנגזרת y' מקיימת שלכל $x \in I_x$

$$y'(x) = g(y(x)) \neq 0.$$

y' רציפה, ולכן יש 2 אפשרויות:

1) $y'(x) > 0$ לכל $x \in I_x$.

2) $y'(x) < 0$ לכל $x \in I_x$.

לא יתכן שיהיו x_1, x_2 כך ש- $y'(x_2) < 0$ ו- $y'(x_1) > 0$, כי אם כן היינו מקבלים לפי משפט (ראה [4], עמ' 167, משפט עזר) שקיימת x_3 (בין x_1 ו-x_2) כך ש- $y'(x_3) = 0$.
בכל אחד מ-2 המקרים, y הינה פונקציה מונוטונית. במקרה (1 היא עולה ממש ובמקרה (2 יורדת ממש. לכן יש לה פונקציה הפוכה (ראה [4], עמ' 174) בקטע I_y שנסמנה ב-x.
הפונקציה x מקיימת:

לכל $y \in I_y$
$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{g(y)}$$

וכן
$$x(y_o) = x_o$$

לפיכך נפתור את המערכת

$$x'(y) = \frac{1}{g(y)}$$
$$x(y_o) = x_o.$$

קבלנו כאן משוואה מהסוג שניתן בסעיף 5.2 (ההבדל היחיד הוא שמות המשתנים).

הפתרון של מערכת כזו כבר ידוע לנו, והוא

$$x(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} \, dt + x_0$$

נגדיר פונקציית עזר G

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} \, dt$$

ולכן קיים

$$x(y) - x_0 = G(y).$$

גם G פונקציה מונוטונית (כי לפונקציה $\frac{1}{g(t)}$ יש תמיד אותו סימן) ולכן יש לה פונקציה הפוכה - G^{-1}.

מכאן נקבל

$$G^{-1}(x(y) - x_0) = G^{-1}(G(y)) = y$$

והפונקציה y הפותרת את המשוואה בתנאי ההתחלה הינה

$$y(x) = G^{-1}(x - x_0).$$

<u>דוגמא:</u>

$$y' = y$$

$$y(1) = e$$

(בסימוני המקרה הכללי $g(y) = y$, $x_0 = 1$, $y_0 = e$) נחשב את G

$$G(y) = \int_{e}^{y} \frac{1}{t} \, dt = \ln t \Big|_{e}^{y} = \ln y - 1$$

נמצא את הפונקציה ההפוכה G^{-1}.

אם $G(y) = \ln y - 1 = x$

אזי $\ln y = x + 1$

ומכאן $y = e^{x+1}.$

לכן נקבל $G^{-1}(x) = e^{x+1}$

ומכאן הפתרון

$$y(x) = G^{-1}(x - 1) = e^{(x-1) + 1} = e^{x}$$

נציג שיטה נוספת לפתרון המשוואה שבדוגמא. במקרים רבים שיטה זו נוחה יותר.

במקום המשוואה $y' = y$ נכתוב משוואה שקולה

$$\frac{y'}{y} = 1$$

או בצורה אחרת שקולה

$$(\ln y)' = 1$$

(המשוואות שקולות במובן שכל פונקציה שהיא פתרון של משוואה אחת הינה גם פתרון של השניה).

על-ידי אינטגרציה של שני האגפים נקבל

$$\ln y = x + c$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = e^{x+c} = e^c \cdot e^x.$$

כדי לקיים את תנאי ההתחלה צריך להתקיים

$$y(1) = e^c \cdot e^1 = e$$

לכן $e^c = 1$ והפתרון היחיד הוא

$$y(x) = e^x.$$

5.4 פתרון משוואה מהצורה $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$

נמצא כאן את הפתרון של מערכת מהצורה

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

$$y(x_0) = y_0$$

באשר f רציפה בקטע I_x, g רציפה בקטע I_y ואינה מתאפסת שם.

משוואה מסוג זה נקראת משוואה ניתנת להפרדה. שיטת הפתרון שלה דומה לשיטה שהודגמה בסוף הסעיף הקודם.

נעבור למשוואה שקולה

$$g(y) \cdot y' = f(x)$$

נסמן $G(y) = \int_{y_0}^{y} g(t)\, dt$ ונטפל במשוואה השקולה

$$(G(y))' = f(x)$$

על-ידי אינטגרציה נקבל

$$G(y) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c$$

G מונוטונית (כי לכל $y \in I_y$ $g(y) \neq 0$ ולכן g חד-סימנית ב-I_y) ומכאן שיש לה פונקציה הפוכה G^{-1}.

לכן נקבל

$$y(x) = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c\right)$$

כאשר הקבוע c תלוי בתנאי ההתחלה.

<u>דוגמא:</u>

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$y(1) = 1$$

(כאשר $I_x = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ו- I_y הינו קטע סביב 1 שאינו מכיל את האפס).

נעבור למשוואה שקולה

$$y \cdot y' = -x$$

וממנה למשוואה הבאה

$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = -x \,.$$

נקבל על-ידי אינטגרציה

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

או

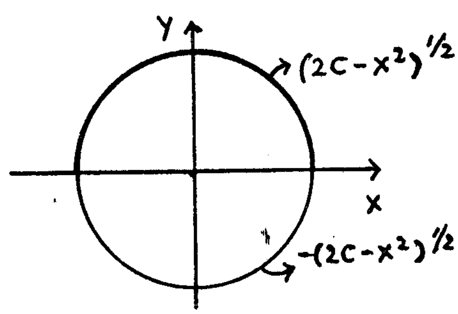
$$y^2 = 2c - x^2$$

עבור c נתון יש שתי אפשרויות:

(1) $$y(x) = (2c - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

(2) $$y(x) = -(2c - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

שתי הפונקציות הן שני חצאי המעגל המופיע בשרטוט.



בגלל תנאי ההתחלה $y(1) = 1 > 0$, יתכן רק הפתרון (1).

כדי למצוא את c נציב בתנאי ההתחלה

$$y(1) = (2c - 1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

ונקבל $c = 1$.

לכן הפתרון היחיד הוא $y(x) = (2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

5.5 משפט קיום ויחידות

לשלמות הדיון נביא כאן ללא הוכחה משפט המציין את התנאים לקיום פתרון למשוואה דיפרנציאלית $y' = F(x,y)$. (כל סוגי המשוואות בהם דנו נכללים בהצגה זו). תנאי המשפט מבטיחים לא רק את קיומו של הפתרון אלא גם את יחידותו.

משפט: (ללא הוכחה). תהי $F(\cdot,\cdot)$ פונקציה רציפה במלבן

$$K = \{(x, y) \mid |x - x_o| \le a, |y - y_o| \le b\}$$

ונניח כי הפונקציה $F_y(\cdot,\cdot)$ קיימת ורציפה ב-K. אזי למשוואה הדיפרנציאלית $y' = F(x, y)$ קיים פתרון אחד ויחיד ברווח מסוים סביב x_o המקיים $y(x_o) = y_o$. (הרווח הוא $\{x \mid |x - x_o| \le a'\}$ באשר $a' = \min\{a, b/M\}$ ו-$M = \max_{(x,y)\in K} |F(x, y)|$).

הדוגמא הבאה מראה שאם דורשים רק את רציפות F, לא ניתן להבטיח קיום פתרון יחיד.

דוגמא: נגדיר

$$F(x, y) = \begin{cases} \sqrt{y} & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

נתבונן במשוואה $y' = F(x, y)$

עם תנאי התחלה $y(0) = 0$.

למשוואה יש 2 פתרונות המקיימים את תנאי ההתחלה:

(1) $y(x) \equiv 0$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad (2)$$

נשים לב שלפונקציה F אין ב-0 נגזרת חלקית לפי y.

בסעיפים הבאים נציג שימושים כלכליים לתורת המשוואות הדיפרנציאליות.

5.6 השתנות בקצב קבוע

"קצב הצמיחה של התל"ג במשק-קבוע". מה נוכל להסיק מאמירה זו על פונקצית התל"ג? על מנת לתאר את הבעיה באופן מתמטי עלינו ל"תרגם" תחילה את המושג "קצב צמיחה". הצמיחה מזמן t לזמן t + h הינה

$$\frac{\Delta y}{y(t)} = \frac{y(t + h) - y(t)}{y(t)}$$

קצב הצמיחה הינו

$$\frac{y(t + h) - y(t)}{y(t)} \Big/ h = \frac{y(t + h) - y(t)}{h} \Big/ y(t)$$

בהשאיפנו את h ל-0, נקבל את הביטוי $\frac{y'(t)}{y(t)}$.

מכאן שניתן ל"תרגם" את המשפט "קצב צמיחה קבוע" למשוואה הדיפרנציאלית

$$\frac{y'}{y} = k$$

נוסיף את תנאי ההתחלה $y(0) = y_o$.

קבלנו משוואה מהסוג $y' = g(y)$. נפתור אותה בעזרת השיטה שהודגמה בסעיף 5.3.

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = k$$

לכן

$$\ln y = k \cdot t + c$$

או

$$y(t) = e^{kt+c} = e^c \cdot e^{kt}$$

נציב בתנאי ההתחלה ונקבל

$$y(0) = e^c = y_o$$

ולכן הפתרון היחיד הוא

$$y(t) = y_o\, e^{kt}.$$

קבלנו איפוא את האפיון המתמטי לפונקציות בעלות קצב צמיחה קבוע.

5.7 גמישות הביקוש

גמישות הביקוש של פונקצית הביקוש Q יחסית למחיר p מוגדרת בדרך כלל על-ידי הנוסחא

$$\eta(p) = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \;/\; \frac{Q(p)}{p}$$

הגדרה זו תלויה בבחירת הערך Δp ולכן אינה חד ערכית. כדי להתגבר על בעיה זו נגדיר את גמישות הביקוש באופן הבא

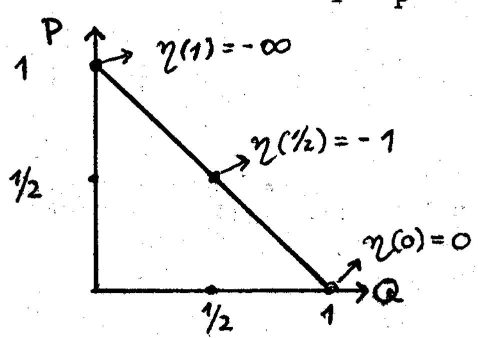
$$\eta(p) = Q'(p)/\frac{Q(p)}{p} = \frac{Q'(p) \cdot p}{Q(p)}$$

יש לשים לב שגמישות הביקוש הינה ערך נקודתי, התלוי רק ב-p.

<u>דוגמא</u> אם $Q(p) = 1 - p$ אזי

$$\eta(p) = \frac{-1 \cdot p}{1 - p} = \frac{p}{p - 1}$$

בשרטוט הבא ניתן לראות כיצד הגמישות משתנה לאורך הגרף של Q.



נאפין עתה את פונקציות הביקוש בעלות גמישות יחידתית (קבועה). לשם כך יש לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית

$$\frac{Q' \cdot p}{Q} = -1$$

או

$$Q' = -\frac{Q}{p}$$

וקבלנו משוואה ניתנת להפרדה (סעיף 5.4).

איננו דורשים תנאי התחלה מכיון שאנו רוצים לאפיין את כל הפונקציות בעלות התכונה הנ"ל.

נעבור למשוואות שקולות

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{1}{p}$$

או

$$(\ln Q)' = -\frac{1}{p}$$

נקבל

$$\ln Q = -\ln p + c$$

ולכן

$$Q(p) = e^{-\ln p + c} = \frac{1}{p}e^{c} = \frac{d}{p}$$

באשר $d = e^{c}$ הוא מספר חיובי כלשהו.

לכן הפתרון הינו אוסף כל הפונקציות מהצורה $\frac{d}{p}$ עבור $d > 0$, כלומר אוסף של היפרבולות.

5.8 רבית רציפה

אם r הינו שער הרבית ליחידת זמן אזי ערכה של השקעה ראשונית בגודל K כעבור t יחידות זמן הינו

$$V(t) = K(1 + r)^{t}$$

בחשוב זה יש שרירותיות בבחירת יחידת הזמן, המשפיעה על ערך ההשקעה.

אנו מעונינים בנוסחא לחשוב ערך ההשקעה כך שעבור כל $h > 0$ קטן כרצוננו יתקיים

$$V(t + h) = V(t)(1 + rh)$$

או

$$\frac{V(t + h) - V(t)}{h} = r \cdot V(t)$$

נוסחא כזו לא ניתנת להשגה אך נוכל להגיע לנוסחא מקורבת אם נמצא פתרון למשוואה ה"גבולית" המתקבלת מהנ"ל כאשר משאיפים את h ל-0, והיא

$$V' = r \cdot V$$

קיים גם תנאי ההתחלה

$$V(0) = K.$$

פתרון המשוואה הוא

$$V(t) = Ke^{rt}.$$

פתרון זה מתקבל בצורה דומה לקבלת הפתרונות עבור הבעיות הקודמות.

הנוסחא שהתקבלה ידועה בתור נוסחת החשוב של רבית רציפה באשר היא מציגה את ערך הקרן בכל זמן באופן רציף.

5.9 התכנסות לשווי משקל

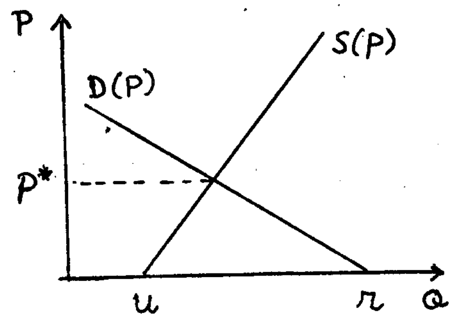
בשוק למוצר יחיד פונקציות הביקוש וההיצע הן

$$D(p) = r - sp$$

$$S(p) = u + vp$$

כאשר v, u, s, r הינם קבועים אי שליליים ו- $u < r$.

פונקציות הביקוש וההיצע הנ"ל מודגמות בשרטוט הבא.



נקודת שווי המשקל היא הנקודה בה קיים $D(p) = S(p)$, ובאופן מפורש נקודה זו הינה

$p^* = \dfrac{r - u}{s + v}$.

במודל שנציג נניח קשר מסויים בין השתנות המחיר על פני הזמן לבין עודף הביקוש, ותחת הנחה זו נבדוק האם המשק "ינוע" לכיוון שווי המשקל.

הקשר בין השתנות המחיר ועודף הביקוש הינו קיומו של קבוע חיובי K כך ש-

$$p'(t) = K[D(p(t)) - S(p(t))]$$

באשר $p(t)$ הוא המחיר בזמן t.

עבור פונקציות הביקוש וההיצע שהנחנו נקבל

$$p'(t) = K[r - u + (-s - v)p(t)] =$$
$$= K(r - u) - K(s + v)p(t)$$

וכדי לקבל את השתנות המחיר על פני זמן יש לפתור את המשוואה

$$p' = -K(s + v)p + K(r - u)$$

עם תנאי ההתחלה

$$p(0) = p_o$$

המשוואה שקבלנו הינה מהסוג $y' = ay + b$ אשר כלול בדיון שנעשה בסעיף 5.3.

הפתרון הכללי של משוואה מסוג זה הינו

$$y(x) = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}$$

ולכן הפתרון של המשוואה בה אנו דנים יהיה

$$p(t) = \frac{K(r - u)}{K(s + v)} + ce^{-K(s + v)t}$$

או

$$p(t) = \frac{r - u}{s + v} + ce^{-K(s + v)t}$$

נציב בתנאי ההתחלה

$$p(0) = \frac{r - u}{s + v} + c = p_o$$

ונקבל

$$c = p_o - \frac{r - u}{s + v}$$

לכן הפתרון היחיד יהיה

$$p(t) = \frac{r - u}{s + v} + (p_o - \frac{r - u}{s + v})e^{-K(s + v)t}$$

אם נשאיף את t לאינסוף נקבל כי

$$p(t) \to \frac{r - u}{s + v} = p^*$$

ולכן המחיר ישאף עם הזמן לנקודת שווי המשקל.

פרק 6 - **חשבון וריאציות**

6.1 מ ב ו א

בעיות המכסימיזציה בהן עסקנו עד עתה היו מהטיפוס

$$\max_{x \in A} H(x)$$

באשר $A \subseteq R^n$ ו- $H:A \to R$. זוהי בעית מכסימיזציה של פונקציה ממשית ב- n משתנים, על פני קבוצה נתונה. פתרון בעיה כזו התאפשר על-ידי פתרון מערכת של n משוואות ב- n נעלמים - $\nabla H(x) = (0,\ldots,0)$.

<u>הערה:</u> למרות ש- x מוגבל לקבוצה A, אנו מתייחסים לבעיה כאילו היא בעית מכסימום ללא אילוצים. התייחסות כזו אפשרית במידה ו- A הינה קבוצה פתוחה.

בנוסף, כל מה שנאמר בפרק זה על מכסימום יכול להיות מיוחס גם למינימום.

מטרת פרק זה היא להכליל את הידוע לנו ולהציג דרך לפתרון בעיות מהטיפוס

$$\max_{y \in A} H(y)$$

באשר A הינה קבוצת <u>פונקציות</u> ו- $H:A \to R$,

לפונקציה H נוהגים לקרוא בשם <u>פונקציונל</u>.

<u>דוגמה:</u> $A = \{y|y:[0,1] \to R\ ,0 \le y(x) \le 1$ לכל x, רציפה y$\}$

$H(y) =$ הערך המינימלי של y בקטע $[0,1]$

הפונקציה בה H מקבלת את הערך המכסימלי היא הפונקציה המקיימת $y(x) \equiv 1$.

ברצוננו להגיע בפרק זה לתנאי שיהיה תנאי הכרחי לכך שפונקציה מסוימת $\hat{y}$ היא מכסימום לוקלי של הבעיה הנתונה (בדומה לתנאי $f'(x) = 0$ לגבי פונקציות במשתנה אחד). לשם כך יש צורך בהגדרת <u>סביבה</u> בקבוצת פונקציות. ודבר זה מחייב את הגדרת <u>המרחק</u> בין שתי פונקציות.

<u>הגדרה:</u> תהא $c = \{f|f:[x_0,x_1] \to R$ רציפה f$\}$

<u>המרחק</u> בין הפונקציות $f,g \in C$ מסומן על-ידי $d(f,g)$

ומקיים

$$d(f,g) = \max_{x_0 \le x \le x_1} |f(x) - g(x)|$$

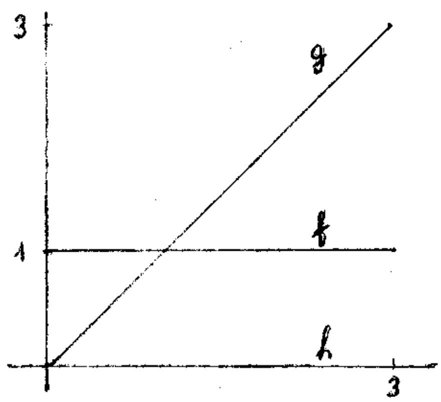
הגדרה זו "טובה" מכיוון שלכל f ו- g רציפות בקטעי גם $|f - g|$ רציפה בקטע ולכן מקבלת שם ערך מכסימלי. פונקצית המרחק d מקיימת את התכונות הנדרשות בדרך כלל ממושג המרחק (הוכח!):

(1) $d(f,g) = 0$ אםם $f = g$

(2) $d(f,g) = d(g,f)$

(3) אי שוויון המשולש: $d(f,h) \le d(f,g) + d(g,h)$

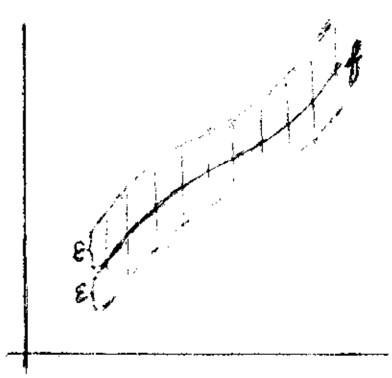
<u>דוגמה:</u> $f,g,h:[0,3] \to R$



קיים $d(f,g) = 2$, $d(g,h) = 3$

$d(f,h) = 1$

<u>הגדרה:</u> סביבה מגודל ε של פונקציה f היא קבוצת כל הפונקציות ב- C אשר מרחקן (כפי שהוגדר לעיל) מ- f קטן מ- ε.



בשרטוט אלה כל הפונקציות ב- C אשר הגרף שלהן עובר בשטח המסומן סביב לגרף של f.

<u>הגדרה:</u> $\hat{y}$ היא <u>מכסימום</u> (לוקלי) של H ב- A אם יש $\varepsilon > 0$ כך שלכל y ב- A המקיימת $d(y,\hat{y}) < \varepsilon$ קיים

$$H(y) \le H(\hat{y})$$

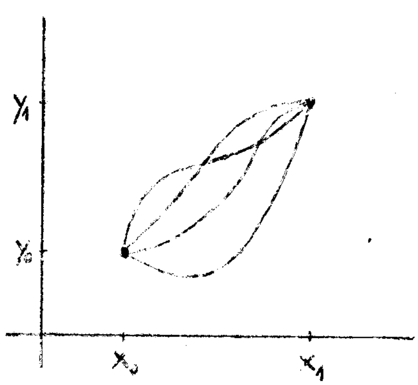
כלומר, קיימת סביבה מגודל ε של $\hat{y}$ (חלקית ל- A) כך שהערך המכסימלי של H בסביבה זו מתקבל ב $\hat{y}$.

6.2 משוואת אוילר

בסעיף זה נדון בפתרון בעיות מהצורה:

$$\max_{y\in A} H(y) = \max_{y\in A} \int_{x_0}^{x_1} F(x\ y(x)\ ,\ y'(x))dx$$

$$A = \left\{ y \;\middle|\; \begin{array}{c} y,\ y:[x_0,x_1] \to R \text{ גזירה ברציפות} \\ y(x_0) = y_0\ ,\ y(x_1) = y_1 \end{array} \right\} \tag{1}$$



הקבוצה הינה קבוצת הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע x_0,x_1 אשר "אחוזות" בקצותיהן (ראה שרטוט).

<u>משפט:</u> אם $\hat{y} \in A$ מכסימום לוקלי של (1) אזי לכל $x_0 \le x \le x_1$:

$$F_y(x,\hat{y}(x)\ ,\ \hat{y}'(x)) = \left[F_{y'}(u,\hat{y}(u)\ ,\ \hat{y}'(u))\right]'(x)$$

משוואה זו נקראת משוואת אוילר. באגף שמאל מופיעה הנגזרת החלקית של F לפי המשתנה השני בנקודה $(x,\hat{y}(x)\ ,\ \hat{y}'(x))$. שים לב כי $\hat{y}$ קבועה ולכן המשתנה היחידי הוא x. כדי לקבל אגף ימין מבצעים גזירה של F ביחס למשתנה השלישי, מציבים את $(u,\hat{y}(u)\ ,\ \hat{y}'(u))$ וגוזרים שוב בנקודה x. ניתן לכתוב משוואה זו גם בצורה

$$F_y = \frac{d}{dx} F_{y'}.$$

דוגמאות תובאנה בהמשך.

להוכחת המשפט נעזר בטענה הבאה, אותה נביא ללא הוכחה.

__טענה:__ תהיינה f ו- g פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[x_0,x_1]$. אם לכל פונקציה גזירה פעמיים, h, המקיימת $h(x_0) = h(x_1) = 0$, מתקיים

$$\int_{x_0}^{x_1} (f\cdot h + g\cdot h')dx = 0$$

אזי $f = g'$.

__הוכחת המשפט:__ תהא h פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[x_0,x_1]$ המקיימת $h(x_0) = h(x_1) = 0$.
נגדיר פונקציה חד-משתנית ϕ על-ידי

$$\phi(t) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\hat{y}(x) + t\cdot h(x)\ ,\hat{y}'(x) + t\cdot h'(x))dx = H(\hat{y} + th)$$

הפונקציה $\hat{y} + th$ שייכת ל A כי בנקודות הקצה מתקיים

$$(\hat{y} + th)(x_0) = \hat{y}(x_0) + t\cdot h(x_0) = \hat{y}(x_0) + t\cdot 0 = y_0$$

וכן

$$(\hat{y} + th)(x_1) = y_1$$

עבור t מספיק קרוב לאפס, $\hat{y} + th$ נמצאת בסביבה מגודל ε של y, בה מתקיים לכל y - $H(y) \le H(\hat{y})$.

לכן, לכל t קרוב מספיק לאפס, $\phi(t) \le \phi(0)$.

מכאן שהבקודה 0 היא מכסימום לוקלי של ϕ ומתקיים

$$\phi'(0) = 0$$

לפי כלל זה

$$\phi'(t) = \int_{x_0}^{x_1} \Big[F_y(x,\hat{y}(x) + t\cdot h(x),\ y'(x) + t\cdot h'(x))\cdot h(x) +$$

$$+ F_{y'}(x,\hat{y}(x) + t\cdot h(x),\ \hat{y}'(x) + t\cdot h'(x))\cdot h'(x)\ dx\Big]$$

ולכן

$$0 = \phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \Big[F_y(x,\hat{y}(x),\ \hat{y}'(x))\cdot h(x) + F_{y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))\cdot h'(x)\ dx\Big]$$

השוויון שלעיל מתקיים לגבי <u>כל</u> פונקציה גזירה פעמיים בקטע הנתון והמקיימת $h(x_0) = h(x_1) = 0$. לכן מתקיימים תנאי הטענה, והמשפט נובע ישירות ממנה (כאשר F_y הוא f, ו- F_y' הוא g).

הפתרונות של משוואת אוילר נקראים <u>אקסטרמלים</u>, וברור כי פתרון הבעיה (1) הוא אחת מן הפונקציות האלה. לכן, כדי לפתור בעיה מסוג (1), עלינו להציב את משוואת אוילר ולפותרה. אחד מן האקסטרמלים שיתקבלו הוא הפתרון לבעיה (אם אכן יש לה פתרון).

<u>דוגמה:</u> נתונה הבעיה $\max\limits_{y} \int_0^1 ((y')^2 + 12xy)dx$

כאשר $y:[0,1] \to R$ צריכה לקיים $y(0) = 0$, ו- $y(1) = 1$, וכן את תנאי הגזירות. קיים $F_y = 12x$; $F_{y'} = 2y'$

ולכן משוואת אוילר היא $12x = 2y''$, או $y'' - 6x = 0$.

הפתרונות של משוואה זו הם מהצורה $x^3 + C_1x + C_2$, אך מהתנאים על y נקבל כי $C_1 = C_2 = 0$, והאקסטרמל היחיד הוא

$y(x) = x^3$.

לכן, אם יש לבעיה פתרון הרי שהוא הפונקציה x^3.

פתרון המשוואה הדיפרנציאלית שבמשוואת אוילר קשה ברוב המקרים, מכיוון שמתקבלת משוואה דיפרנציאלית מסדר שני. למרות זאת, בשלושה מקרים חשובים ניתן לכתוב את המשוואה בצורה של משוואה פשוטה מסדר ראשון:

<u>מקרה א:</u> F בלתי תלויה ב y' . במקרה זה נקבל משוואה מסדר ראשון

$$F_y = 0$$

<u>מקרה ב:</u> F בלתי תלויה ב-y. משוואת אוילר תהפוך למשוואה $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, ולכן יש קבוע c כך ש-

$$F_{y'} = c$$

ושוב קבלנו משוואה מסדר ראשון.

<u>מקרה ג:</u> F בלתי תלויה ב-x. במקרה זה מתקיים

$$\frac{d}{dx}F = F_y \cdot y'(x) + F_{y'} \cdot y''(x)$$

ועל-סמך משוואת אוילר זה יהיה שווה ל-

$$\left(\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\cdot y' + F_{y'}\cdot y'' = \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\cdot y'\right)$$

לכן מקבלים

$$F = y'\cdot F_{y'} + c$$

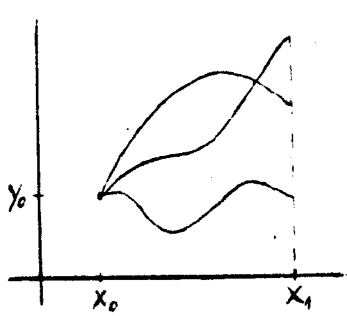
וגם זו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון.

6.3 <u>תנאי הטרנסוורסליטי (Transversality conditious)</u>

בסעיף זה נתייחס לשתי בעיות אופטימיזציה נוספות, הדומות במבנן לבעיה (1). בשני בעיות אלה "אחוזות" הפונקציות שבקבוצה A רק בקצה השמאלי.
הבעיה הראשונה היא

$$\max_{y\in A} H(y) = \max_{y\in A} \int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x)\ ,\ y'(x))dx \qquad (2)$$

$$A = \{y \mid y(x_0) = y_0 \quad ,\text{גזירה } y\ ,\ y:[x_0,x_1] \to R\}$$



בבעיה (2), חופשי הקצה הימני של הפונקציות ויכול לנוע לאורך הישר $x \equiv x_1$. הקצה השמאלי, כמו בבעיה (1), קבוע בנקודה (x_1,y_0).

<u>משפט:</u> אם $\hat{y} \in A$ היא מקסימום לוקלי של (2) אזי (בנוסף למשוואת אוילר) מתקיים

$$F_{y'}(x_1,\hat{y}(x_1),\ \hat{y}'(x_1)) = 0$$

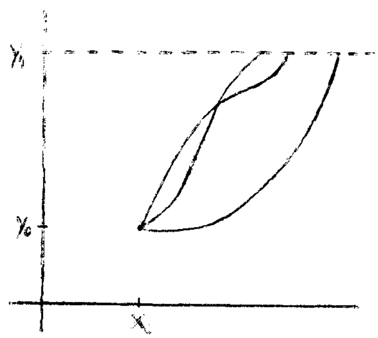
ובכתיבה אחרת -

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0$$

הבעיה השניה היא -

$$\max_{x_1,y\in A} H(y) = \max_{x_1,y\in A} \int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),\ y'(x))\,dx \qquad (3)$$

$$A = \{y \mid y(x_1) = y_1, y(x_0) = y_0\ ,\ \text{גזירה ברציפות}\ y,\ y:[x_0,x_1] \to R\}$$



בבעיה (3) שוב חופשי הקצה הימני של הפונקציות, והוא יכול לנוע לאורך הישר $y \equiv y_1$. יש לשים לב כי בבעית המכסימום אנו מחפשים, בנוסף ל- y, גם את x_1.

<u>משפט:</u> אם $\hat{y} \in A$ מקסימום לוקלי של (3) אזי (בנוסף למשוואת אוילר) מתקיים

$$F(x_1,y(x_1),\ \hat{y}'(x_1)) - \hat{y}'(x_1)\cdot F_{y'}(x_1,\ \hat{y}(x_1),\ \hat{y}'(x_1)) = 0$$

ובכתיבה שונה

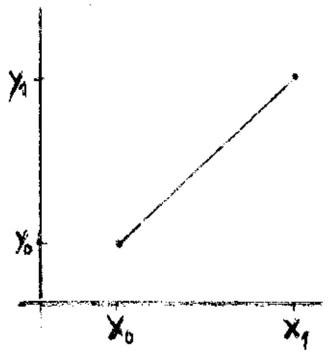
$$\left(F - \hat{y}'\cdot F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1} = 0$$

בבעיות בהן חופש הבחירה קיים לגבי הקצה השמאלי בלבד, התנאים יהיו אותם תנאים כשבמקום x_1 נרשום x_0.

6.4 דוגמאות

1.בעית אורך. אורך קו המיוצג על-ידי גרף של פונקציה $y(x)$ בקטע $[x_0;x_1]$ הוא

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$$



נמצא מהו הקו הקצר ביותר המחבר את הנקודות (x_0,y_0) ו- (x_1,y_1).

הבעיה שלפנינו היא

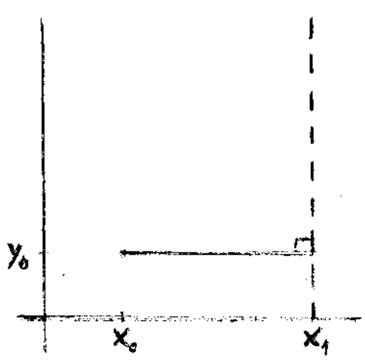
$$\min_y \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$$

$$\text{s.t} \quad y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$$

וזו בעיה מסוג (1), מקרה ב. לפי משוואת אוילר הפתרון צריך לקיים

$$0 = \frac{d}{dx}\ \frac{2\ y'(x)}{2\sqrt{1 + y'^2(x)}}$$

לכן (בדוק) $y'(x) \equiv c$, והפונקציה y מתארת קו ישר.



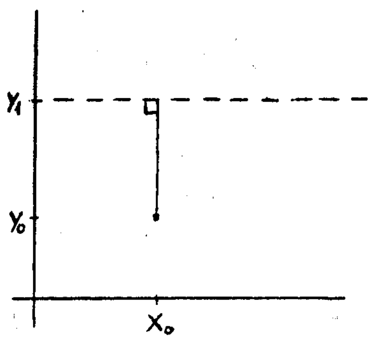
נמצא עתה מהו הקו הקצר ביותר המחבר את (x_0,y_0) עם נקודה כלשהי על הישר $x \equiv x_1$. זוהי בעיה מסוג (2), שכן קיים רק האילוץ $y(x_0) = y_0$.

לפי תנאי הטרנסוורסליטי צריך להתקיים

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1} = 0$$

ולכן $y'(x_1) = 0$. מכיון ש y' פונקציה קבועה, נקבל $y'(x) \equiv 0$

ולכן $y(x) \equiv y_0$.



ננסה לענות עתה על השאלה מהו הקו הקצר ביותר (המתואר על-ידי פונקציה) המחבר את (x_0,y_0) עם נקודה כלשהי על הישר $y \equiv y_1$.

זוהי בעיה מסוג (3) ולפי תנאי הטרנסוורסליטי צריך להתקיים

$$\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=x_1} = 0$$

אך אגף שמאל שווה ל - $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ וזה גודל חיובי.

לכן אין פתרון לבעיה זו (והסיבה היא שהקו הקצר ביותר איננו ניתן לתאור על-ידי פונקציה).

2. <u>בעיית חיסול המלאי</u> (Hotelling).

לבעל מכרה יש חומר גלם, בכמות k אותו עליו להפיק במשך פרק הזמן $[0,T]$. הפונקציה f (קעורה חזק) מיצגת את רווחיו של בעל המכרה, אשר תלויים בכמות המופקת בכל יחידת זמן. את כלל הכמות המופקת מייצגת הפונקציה y, ועל בעל המכרה למצוא את "נתיב ההפקה" האופטימלי. לכן הבעיה היא:

$$\max \int_0^T f(y'(t))dt$$

$$\text{s.t.} \quad y(0) = 0 \ , \ y(T) = k$$

לפי משוואת אוילר צריך להתקיים

$$\frac{d}{dt} f'(y'(t)) \equiv 0$$

לכן יש c כך ש- $f'(y'(t)) \equiv c$

בגלל הקעירות החזקה של f קיים d כך ש- $y'(t) \equiv d$

ולכן $y(t) = d \circ t + e$

ומהאילוצים נקבל

$$.y(t) = \frac{k}{T} \cdot t$$

אם לא נגביל את היצרן במשך זמן ההפקה, נקבל בעיה מסוג (3) והתנאי הנוסף יהיה

$$f(y') - y' \cdot f'(y') \Big|_{t=t_1} = 0$$

ממשוואת אוילר $y'(t) \equiv \frac{k}{t_1} = d$ ולכן d צריך לקיים

$$f(d) - d \cdot f'(d) = 0$$

או

$$.f'(d) \ / \ \frac{f(d)}{d} = 1$$

לכן גמישות f ב- d הינה 1, ו- t_1 צריך לקיים $.t_1 = \frac{k}{d}$