אקדמון
בית ההוצאה של הסתדרות הסטודנטים של האוניברסיטה העברית

מתמטיקה לכלכלנים א'

ד"ר אריאל רובינשטיין
עוזי סגל

ירושלים, תש"ם

הקדמה

חוברת זו מיועדת בראש ובראשונה לתלמידי הרמה המתקדמת בקורס מתמטיקה לכלכלנים א', אולם אנו מקווים שאף תלמידי הרמה הרגילה והחלשה יוכלו להעזר בה, הן בשנת לימודיהם הראשונה, והן כספר עזר בשנת לימודיהם השניה.

על מנת להתאים את החוברת לתלמידי הכלכלה, השתדלנו ככל האפשר להרבות בדוגמאות כלכליות, ולהביא רק אותם המשפטים וההגדרות הדרושים לתלמיד במחלקה.

תודתינו נתונה ליהונתן מונין שעבר על החוברת, והעיר הערות חשובות ומועילות, הן מצד התוכן, והן מצד הסגנון.

בהכנת השרטוטים סייעה רינת גורודבצ'יק.

תמיכתה של המחלקה לכלכלה איפשרה את הוזלת מחיר החוברת, ועל כך אנו, ויש לקוות שאף הקוראים, מודים לה.

א.ר. , ע.ס.

ירושלים, חנוכה תש"ם

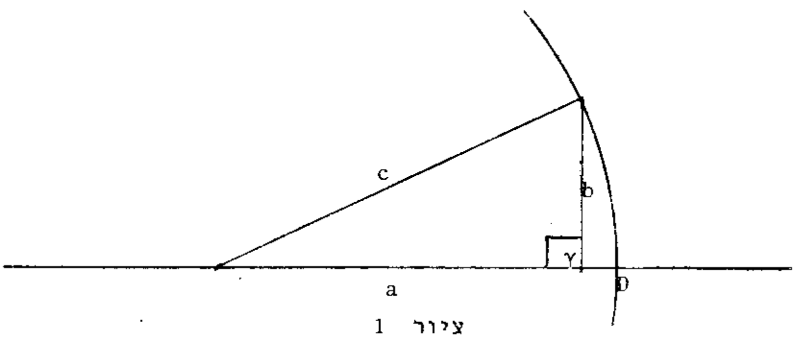
ת ו כ ן   ה ע נ י נ י ם

פרק א' : סדרות

סעיף 1: מספרים ממשיים

בבית הספר היסודי הכרנו את המספרים הטבעיים ,...,1,2,3 , ומאוחר יותר גם את המספרים הרציונליים, היינו כל המספרים מהצורה $\frac{a}{b}$ כאשר a ו b מספרים שלמים, ו $b \neq 0$. מתעוררת השאלה, האם בכך מיצינו את ציר המספרים, או שמא קיימים עליו מספרים נוספים?

בציור 1 $a = 2$ $b = 1$ ו $\gamma = 90^0$. לפי משפט פיתגורס $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. הנקודה D נמצאת על ציר המספרים ועל מעגל שמרכזו באפס ואשר הרדיוס שלו שווה ל $\sqrt{5}$. נראה עתה כי המספר המתאים ל D איננו רציונלי, או במילים אחרות ש $\sqrt{5}$ איננו מספר רציונלי.



ציור 1

הוכחה: נניח שקיים מספר רציונלי $\frac{a}{b}$ מצומצם (כלומר, לא קיים מספר שלם c כך ש a וגם b מתחלקים בו) כך ש $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$.

אזי

(הכפלה ב b)	$\sqrt{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow$ *
(העלאה ברבוע)	$\sqrt{5}b = a \Rightarrow$
(חלוקה ב 5)	$5b^2 = a^2 \Rightarrow$
	$b^2 = \frac{a^2}{5}$

---

* שורה זאת נקראת באופן הבא: השוויון $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ גורר ע"י הכפלה ב b את השוויון שבשורה הבאה $(\sqrt{5}b = a)$

כלומר, a^2 מתחלק ב 5. אבל אם מספר בעל שורש שלם מתחלק במספר ראשוני, גם השורש שלו מתחלק באותו מספר, ולכן גם a מתחלק ב 5.

נסמן: $k = \frac{a}{5}$ (k שלם).

$$k = \frac{a}{5} \Rightarrow$$
$$5k = a \Rightarrow$$
$$25k^2 = a^2$$

נציב זאת בשוויון $5b^2 = a^2$ ונקבל

$$25k^2 = 5b^2 \Rightarrow$$
$$5k^2 = b^2$$

ומאותם שקולים כמקודם נקבל שגם b מתחלק ב 5, ולכן אפשר לצמצם את $\frac{a}{b}$ ב 5, בסתירה להנחה ש $\frac{a}{b}$ הינו שבר מצומצם.

המספרים שאינם רציונליים ייקראו בשם מספרים אי-רציונליים. המספרים הרציונליים והאי-רציונליים ייקראו בשם מספרים ממשיים.

טענה 1: א. אם x ו y הם מספרים רציונליים אזי גם $x + y$ ו $x - y$ הם מספרים רציונליים.

הוכחה: נניח ש $x = \frac{a}{b}$ ו $y = \frac{c}{d}$ כאשר a,b,c,d הם מספרים שלמים, ואז

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$$

ומאחר שהמספרים $ad + cb$, $ad - cb$ ו bd הם מספרים שלמים הרי ש $x + y$ ו $x - y$ הם מספרים רציונליים.

ב. אם x הוא מספר רציונלי, ו y הוא מספר אי-רציונלי אזי $x + y$ ו $x - y$ הם מספרים אי רציונליים.

הוכחה: נסמן: $z_1 = x + y$, $z_2 = x - y$. אם z_1 הוא מספר רציונלי, אזי לפי א', מאחר ש x הוא מספר רציונלי, הרי שגם $z_1 - x$ הוא מספר רציונלי. אבל אם $z_1 = x + y$ אזי $y = z_1 - x$, וקבלנו סתירה להנחה ש y הוא מספר אי רציונלי.

אם z_2 הוא מספר רציונלי אזי לפי חלק א' גם $x - z_2$ הוא מספר רציונלי. אבל אם $z_2 = x - y$ אזי $y = x - z_2$, בסתירה להנחה ש y הוא מספר אי רציונלי.

ג. אם x הוא מספר אי רציונלי אזי לכל מספר שלם n גם $\frac{x}{n}$ הוא מספר אי רציונלי.

הוכחה: נניח ש $\frac{x}{n}$ הוא מספר רציונלי, למשל $\frac{a}{b}$, כאשר a ו b הם מספרים שלמים. אם $\frac{x}{n} = \frac{a}{b}$ אזי $x = \frac{na}{b}$, ומאחר ש na ו b הם מספרים שלמים הרי שקבלנו סתירה להנחה ש x הוא מספר אי רציונלי.

<u>הערה:</u> סכום של שני מספרים אי רציונליים איננו בהכרח אי רציונלי, שהרי לפי ב' $2 + \sqrt{5}$ וכן $2 - \sqrt{5}$ הם שניהם מספרים אי רציונליים, אבל סכומם הוא

$$2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4$$

שהוא כמובן מספר רציונלי.

<u>סעיף 2: מרחק</u>

<u>סמון:</u> $a > b$ פירושו a גדול ממש מ b. $a \geq b$ פירושו שמתקיים אחד משני המקרים הבאים:

א. a גדול מ b.

ב. a שווה ל b.

מטרתנו בסעיף זה הינה להגדיר בצורה מדויקת את מושג המרחק על הישר הממשי.

לשם כך נפתח ונגדיר:

הגדרה 2: הערך המוחלט של מספר ממשי x יסומן ב $|x|$, ויוגדר בצורה הבאה:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

הגדרה זו הינה הגדרה מותנית,ויש להבינה באופן הבא: אם $x \geq 0$ אזי $|x| = x$,

ואם $x < 0$ אזי $|x| = -x$.

דוגמה 3:

$$|5| = 5$$

$$|-3| = -(-3) = 3$$

$$|0| = 0$$

טענה 4: לכל מספר ממשי x

א. $-|x| \leq x \leq |x|$

ב. $|x| \geq 0$

ג. $|x| = 0$ אם ורק אם $x = 0$

ד. $|-x| = |x|$

הוכחה: א. נבחין בין שני מקרים

1) $x \geq 0$

2) $x < 0$.

1) אם $x \geq 0$ אזי $|x| = x$, ובפרט, $x \leq |x|$. אי-השוויון השמאלי מתקבל מכך ש $-|x| = -x$, ומאחר ש $-x \leq 0$ הרי ש $-|x| \leq 0$, ולכן $-|x| \leq 0 \leq x \Leftarrow x \geq -|x|$.

2) אם $x < 0$ אזי $|x| = -x$ ועל-ידי הכפלה ב -1 נקבל $x = -|x|$
ובפרט $x \geq -|x|$. אי-השוויון השמאלי מתקבל מכך ש
$x < 0 \Leftarrow -x > 0 \Leftarrow |x| > 0$ (שהרי $|x| = -x$) ולכן $x \leq |x| \Leftarrow x < 0 < |x|$.

ב-ג. ההוכחה נובעת מההבחנה הבאה

אם $x > 0$ אזי $|x| = x > 0$

אם $x < 0$ אזי $|x| = -x > 0$

אם $x = 0$ אזי $|x| = x = 0$

ד. אם $x \geq 0$ אזי $-x \leq 0$ ולכן

$$|-x| = -(-x) = x = |x|$$

אם $x < 0$ אזי $|x| = -x$, ואילו $-x > 0$ ולכן

$$|-x| = -x = |x|$$

□

<u>סמון</u>: $\sqrt{t}$ הינו המספר האי שלילי כך שרבועו שווה ל t $(t \geq 0)$.

<u>טענה 5</u>: לכל זוג מספרים ממשיים x ו y

א. $|xy| = |x||y|$

ב. $|x - y| = |y - x|$

ג. $\sqrt{x^2} = |x|$

ד. $|x + y| \leq |x| + |y|$

ה. $|x - y| \geq |x| - |y|$

ו. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

הוכחה:

א. נבחין בין ארבעה מקרים:

1) $x \geq 0$, $y \geq 0$

2) $x \geq 0$, $y < 0$

3) $x < 0$, $y \geq 0$

4) $x < 0$, $y < 0$

1) $xy \geq 0$ ולכן $|xy| = xy = |x||y|$

2) $xy \leq 0$ ולכן $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$

3) $xy \leq 0$ ולכן $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$

4) $xy > 0$ ולכן $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

ב. מטענה 4 ד' נקבל

$$|x - y| = |-(x - y)| = |y - x|$$

ג. לפי טענה 4 ב' $|x| \geq 0$. מטענה 5 א' נובע כי $|x^2| = |x||x| = |x|^2$,
ומאחר ש $x^2 \geq 0$ הרי ש $|x^2| = x^2$, ולכן

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{|x^2|} = \sqrt{|x|^2} = |x|$$

ד. לפי טענה 4 א' $x \leq |x|$, $y \leq |y|$ ולכן $x + y \leq |x| + |y|$.
לפי טענה 4 א' $-x \leq |x|$ (על-ידי הכפלת אי-השוויון
שבטענה ב -1), וכן $-y \leq |y|$, ולכן

$$-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$$

כלומר, בין אם $x + y \geq 0$ ובין אם $x + y < 0$ $|x + y| \leq |x| + |y|$,
שהרי $|x + y|$ שווה תמיד או ל $x + y$ או ל $-(x + y)$.

ה. מד' נקבל

$$|x| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y| \Rightarrow$$

$$|x| - |y| \le |x - y|$$

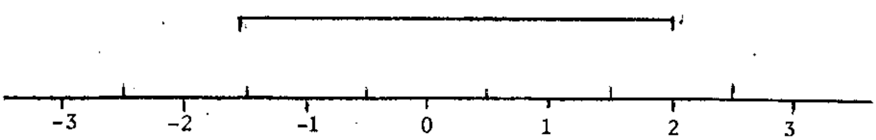
ו. $-(|x| - |y|) = |y| - |x| \le |y - x| = |x - y|$

ומאחר ש $||x| - |y||$ שווה תמיד או ל $|x| - |y|$ או ל $-(|x| - |y|)$
הרי ש $||x| - |y|| \le |x - y|$. □

נעבור עתה להגדרת מושג המרחק על הישר הממשי.

<u>הגדרה 6</u>: המרחק בין שני מספרים ממשיים x ו y יסומן ב $d(x,y)$ ויוגדר על-ידי $d(x,y) = |x - y|$.

<u>דוגמה 7</u>: $d(-1.5,2) = |(-1.5)-2| = |-3.5| = 3.5$



ציור 2

<u>טענה 8</u>: א. לכל זוג מספרים ממשיים x ו y מתקיים $d(x,y) \ge 0$, ו $d(x,y) = 0$ אם ורק אם $x = y$.

ב. לכל זוג מספרים ממשיים x ו y מתקיים $d(x,y) = d(y,x)$.

ג. לכל שלשה מספרים ממשיים x,y,z מתקיים $d(x,y) + d(y,z) \ge d(x,z)$.

הוכחה:

א. לפי טענה 4 ב' $|x - y| \geq 0$, ולכן $d(x,y) \geq 0$. לפי טענה 4 ג' $|x - y| = 0$, אם ורק אם $x - y = 0$, כלומר אם ורק אם $x = y$, ולכן $d(x,y) = 0$ אם ורק אם $x = y$.

ב. לפי טענה 5 ב' $d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$

ג. לפי טענה 5 ד'

$$d(x,y) + d(y,z) = |x - y| + |y - z| \geq |(x - y) + (y - z)| =$$
$$= |x - z| = d(x,z)$$

□

<u>דוגמה 9</u>:

א. $d(1,3) + d(3,4) = |1 - 3| + |3 - 4| = |-2| + |-1| =$
$$= 2 + 1 = 3 = |-3| = |1 - 4| = d(1,4)$$

ב. $d(1,3) + d(3,-4) = |1 - 3| + |3 - (-4)| = |-2| + |7| =$
$$= 2 + 7 = 9 > 5 = |5| = |1 - (-4)| = d(1,-4)$$

ג. $d(8.5,6.3) \leq d(8.5,0) + d(0,6.3) = |8.5 - 0| + |0 - 6.3| =$
$$= |8.5| + |-6.3| = |8.5| + |6.3|$$

ובמקרה הכללי $d(x,y) \leq |x| + |y|$

<u>סעיף 3: דוגמאות המובילות להכרת מושג הגבול</u>

<u>דוגמה 10</u>:

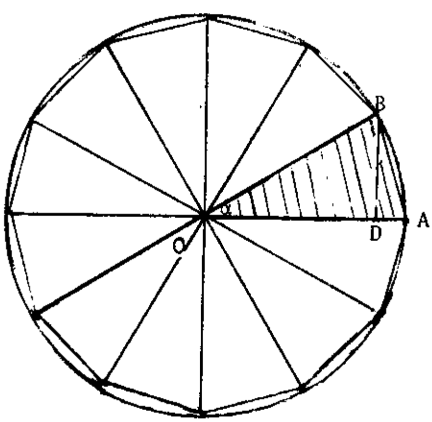
חומר רדיו אקטיבי מתפרק כך שמידי שנה מתפרקת חצי מהכמות שהיתה ממנו בתחילת השנה. נניח שהכמות ההתחלתית של החומר היא 1 ק"ג. בטבלה הבאה מופיעות כמויות החומר אחרי כמה תקופות זמן.

שנה	כמות נותרת בק"ג
1	0.5
2	0.25
3	0.125
10	0.00098
100	$7.9\cdot10^{-31}$
1000	$9.33\cdot10^{-302}$

אחרי "הרבה מאד" זמן תלך הכמות הנותרת מהחומר ותשאף לאפס, אך היא אף פעם לא תגיע לגודל זה. למען הדיוק, אחרי n שנים תהיה כמות החומר הנותרת שווה ל $\frac{1}{2^n}$ ק"ג.

דוגמה 11: כידוע, אי אפשר לחלק את העגול לצורות פשוטות כגון משולשים ומרובעים, ולפיכך מתעוררת השאלה איך ניתן לחשב את שטחו. ננסה לפתור בעיה זו באופן הבא. נניח שרדיוס העגול הוא 1, ונחלק את העגול ל n גזרות שוות (ציור 3). נחשב את שטחו של משולש בודד, למשל AOB (מקווקו).

מאחר ש $OA = 1$, הרי שאורכו של הגובה היורד מנקודה A לנקודה D הוא $\sin\alpha$, ולכן שטח המשולש AOB הוא $\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin\alpha$. נציב במקום α $\frac{360}{n}$, ונקבל ששטחו של משולש אחד הוא $\frac{1}{2}\sin\frac{360}{n}$, ואילו שטחם של n משולשים יהיה $S_n = \frac{n}{2}\sin\frac{360}{n}$. ככל שמספר המשולשים יהיה יותר גדול, כך ילך סכום שטחם ויתקרב לשטח העגול. בטבלה הבאה מופיעים כמה ערכים של S_n המתקבלים עבור ערכים שונים של n.



ציור 3

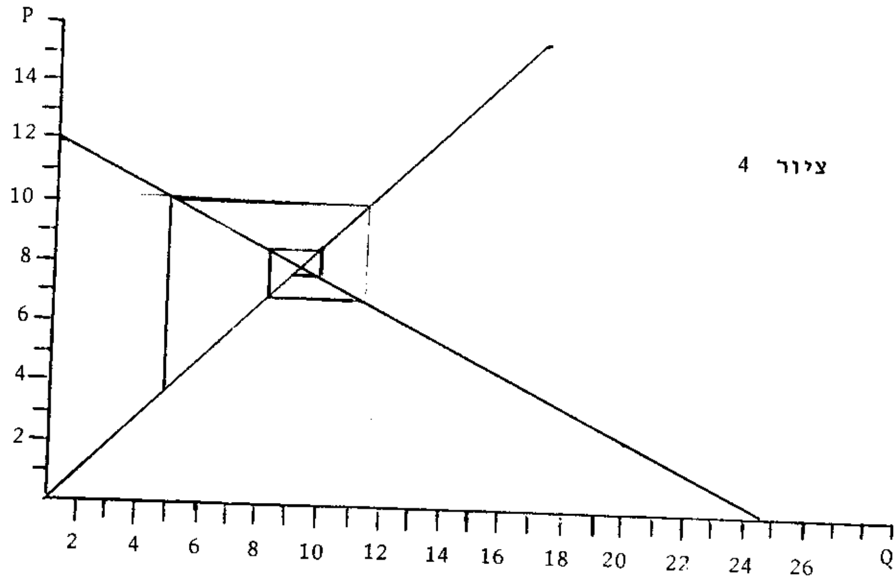
S_n	n
2	4
2.828	8
3.090	20
3.140	100
3.141	200

האם נגיע למספר כלשהו? האם נשאף למספר כלשהו?

דוגמה 12: נניח משק בו קיים מוצר יחיד. ככל שמחיר מוצר זה יורד, גדלה כמות המוצר המבוקשת ע"י הצרכנים. במקרה שלנו נניח שהכמות המבוקשת בכל מחיר ומחיר נתונה ע"י $Q = 24 - 2P$ כאשר P הוא המחיר ליחידה בלירות, ו Q היא הכמות המבוקשת. אנו רואים שכאשר מחיר המוצר הוא 12 ל"י תהיה הכמות המבוקשת אפס, כאשר המחיר הוא 10 ל"י תהיה הכמות המבוקשת 4 יחידות, (כלומר, סך הכמות שהצרכנים שבמשק יהיו מוכנים לקנות במחיר זה היא 4 יחידות), כאשר המחיר שווה ל 6 ל"י תהיה הכמות המבוקשת 12 יחידות, וכאשר המחיר ירד לאפס תהיה הכמות המבוקשת שווה ל 24 יחידות.

בניגוד לכמות המבוקשת, היורדת ככל שמחיר המוצר עולה, הרי שהכמות המוצעת מהמוצר תלך ותגדל ככל שמחירו יעלה, ובמקרה שלנו נניח שהכמות המוצעת בכל מחיר ומחיר נתונה ע"י $Q = P$.

מחיר ששוי משקל יוגדר כמחיר בו הכמות המבוקשת שווה לכמות המוצעת. במקרה שלנו - מאחר ש $Q = 24 - 2P$ הרי ש $P = 12 - \frac{Q}{2}$, ולכן $Q = 12 - \frac{Q}{2} \Leftarrow Q = 8$ וכן $P = 8$ (ציור 4).



ציור 4

נניח שהמחיר ההתחלתי הוא 4 ל"י. במחיר כזה ירצו הצרכנים לקנות 16 יחידות, אבל היצרנים ייצרו רק 4. תמורת 4 יחידות יסכימו הצרכנים לשלם 10 ל"י ליחידה. במחיר כזה, יחליטו פירמות נוספות שכדאי להן לייצר (או לחילופין,הפירמות שמיצרות יחליטו שכדאי להן להגדיל את יצורן), וסך הכל ייוצרו 10 יחידות, תמורתן יסכימו הצרכנים לשלם רק 7 ל"י ליחידה.

תהליך זה ימשך כמתואר בציור 4 ובטבלה הבאה:

$P_0 = 4$

$P_1 = 10$

$P_2 = 7$

$P_3 = 8.5$

$P_4 = 7.75$

$P_5 = 8.125$

$P_6 = 7.9375$

$P_7 = 8.03125$

.
.
.

$P_n = 8 + (-1)^{n+1} . 2^{2-n}$

מה יקרה ב"סוף"? האם יתכנס המחיר למחיר שווי המשקל? האם הוא יהיה שווה בדיוק למחיר שווי המשקל?

סעיף 4: גבול של סדרה

בשם "סדרה" נתכוון לסדרה אין סופית (להבדיל מסופית) של מספרים ממשיים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ כאשר a_n הוא המספר העומד במקום מספר n בסדרה. את הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ נסמן ב $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. במילים: a_n, n הולך מ 1 עד אינסוף.

דוגמה 13: א. הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ הינה הסדרה $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$.

ב. נסמן ב $[x]$ את הערך השלם של המספר x, כלומר, המספר השלם המכסימלי שאיננו גדול מ x. לדוגמה:

$[2.1] = 2$, $[\pi] = 3$, $[-1.1] = -2$.

הסדרה $\{[\sqrt{n}]\}_{n=1}^{\infty}$ הינה הסדרה

$1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,4,\dots$

ג. הסדרה $\left\{(-1)^n \cdot \frac{3}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ הינה הסדרה $-3, \frac{3}{2}, -1, \frac{3}{4}, -\frac{3}{5}, \dots$

הגדרה 14: המספר a הוא גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם לכל מספר חיובי ε קיים מספר טבעי N_ε, כך שלכל מספר טבעי n המקיים $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$.

הערה: שים לב שלכל ε קיים N_ε משלו.

הגדרה 14 ניתנת לנסוח גם באופן הבא:

a הינו גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מקום N_ε בסדרה כך שהמרחק בין a לבין כל המספרים בסדרה הנמצאים מאותו מקום והלאה קטן מ ε.

סמון: אם a הוא גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אזי נסמן $a_n \to a$ או $\lim a_n = a$.

הגדרה 15: "סדרה מתכנסת" היא סדרה שיש לה גבול. סדרה שאינה מתכנסת תקרא בשם "סדרה מתבדרת".

דוגמה 16:

א. $a_n = c$ לכל n ‏(c - מספר ממשי כלשהו).

טענה: $a_n \to c$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נסמן: $N_\varepsilon = 1$. לכל n כך ש $n \ge N_\varepsilon$ (כלומר, לכל $n \ge 1$) מתקיים:

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

הערה: במקרה זה N_ε איננו תלוי ב ε.

ב. $a_n = \frac{1}{n}$

טענה: $a_n \to 0$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נסמן: $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. יהי $n \ge N_\varepsilon$, כלומר, $n \ge \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ הוא המספר השלם המכסימלי שאיננו גדול מ $\frac{1}{\varepsilon}$. $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, n שלם, ולכן $n > \frac{1}{\varepsilon}$, או $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ולכן לכל $n \ge N_\varepsilon$ מתקיים

$$\left|a_n - 0\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ג. $a_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

טענה: $a_n \to 2$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נסמן $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$. יהי $n \ge N_\varepsilon$, כלומר $n \ge \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$.
מאותם שקולים שבדוגמה הקודמת $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. נעלה את שני האגפים ברבוע ונקבל $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, או $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, ולכן לכל $n \ge N_\varepsilon$ מתקיים

$$\left|a_n - 2\right| = \left|2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} - 2\right| = \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}\right| =$$

$$= \left|(-1)^n\right| \left|\frac{1}{n^2}\right| = 1 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

ד. $a_n = \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 + 2n + 1}$

טענה: $a_n \to \frac{1}{3}$.

הוכחה: $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n^2 + n + 1}{3n^2 + 2n + 1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3n^2 + 3n + 3 - 3n^2 - 2n - 1}{9n^2 + 6n + 3}\right| =$

$$= \left|\frac{n + 2}{9n^2 + 6n + 3}\right| = \frac{n + 2}{9n^2 + 6n + 3} < \frac{n + 2}{n^2 + 2n} = \frac{n + 2}{n(n + 2)} = \frac{1}{n}$$

ואם נבחר עתה $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ נקבל כמקודם שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $\frac{1}{n} < \varepsilon$

ולכן $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

<u>הערה:</u> בדוגמה ד' בחרנו ל $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $N_{\frac{1}{2}} = 3$, וזאת למרות שגם עבור $n = 1$ מתקיים $\left|a_1 - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3}{6} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{2}$, וגם עבור $n = 2$ מתקיים $\left|a_2 - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{7}{17} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{2}$.
אין בכך כל פסול, וזאת משום שבהגדרה 14 לא דרשנו ש N_ε יהיה דוקא המספר הקטן ביותר כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$ יתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$.

נבדוק עתה מתי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת, או במלים אחרות, מתי אין לה גבול.
לפי הגדרה 14 הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת לגבול a אם לא לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε מתאים. או במלים אחרות, אם קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל מספר N קיים מספר $n \geq N$ כך ש $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$.

<u>דוגמה 17:</u>

א. $a_n = n$

טענה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מתבדרת.

הוכחה: נניח שקיים לסדרה גבול, נסמנו ב a. יהי $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. לכל N קיים $n \geq N$ כך ש $a_n = n \geq [a] + 2$. עבור n זה מתקיים

$$|a_n - a| = |n - a| > 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

ב.
$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{אי זוגי } n \\ 0 & \text{זוגי } n \end{cases}$$

טענה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מתבדרת.

הוכחה: נניח שקיים לסדרה גבול, נסמנו ב a. יהי $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$. לכל N קיים $n_1 \ge N$ כך ש $a_{n_1} = 1$, וקיים $n_2 \ge N$ כך ש $a_{n_2} = 0$. אם a הינו גבול הסדרה צריך להתקיים $|1 - a| < \frac{1}{4}$ וכן $|0 - a| < \frac{1}{4}$. דבר זה לא יתכן כי

$$\frac{1}{2} < 1 = |1 - 0| = |1 - a + a - 0| \le |1 - a| + |a - 0| =$$
$$= |1 - a| + |0 - a|$$

ולכן, אם סכום שני הבטויים $|1 - a|$ ו $|0 - a|$ גדול מ $\frac{1}{2}$ הרי שלפחות אחד משניהם חייב להיות גדול מ $\frac{1}{4}$, בסתירה להנחה.

סעיף 5: משפטים יסודיים בתורת הגבולות

סמון:
$$\max\{x,y\} = \begin{cases} x & x \ge y \\ y & x < y \end{cases}$$

$$\min\{x,y\} = \begin{cases} x & x \le y \\ y & x > y \end{cases}$$

כזכור, סדרה מתכנסת הינה סדרה שקיים לה גבול. בהגדרה זו לא פסלנו את האפשרות שלסדרה מתכנסת יהיו כמה גבולות. זאת נעשה בטענה הבאה:

טענה 18: לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש לכל היותר גבול אחד.

הוכחה: נניח שיש לה שני גבולות שונים, a ו b. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח ש $b > a$. נסמן: $\varepsilon = \frac{b - a}{2}$. מאחר ש $b > a$ הרי ש $\varepsilon > 0$. הואיל ו a הינו גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\varepsilon > 0$ הרי שקיים N_{1_ε} כך שלכל $n \geq N_{1_\varepsilon}$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$. גם b הוא גבול של הסדרה, ולכן קיים N_{2_ε} כך שלכל $n \geq N_{2_\varepsilon}$ מתקיים $|a_n - b| < \varepsilon$. נסמן: $N_\varepsilon = \max\left\{N_{1_\varepsilon}, N_{2_\varepsilon}\right\}$.

טענה: לכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים

א. $|a_n - a| < \varepsilon$

ב. $|a_n - b| < \varepsilon$

הוכחה: נניח ש $N_{1_\varepsilon} \geq N_{2_\varepsilon}$. במקרה כזה $N_\varepsilon = N_{1_\varepsilon}$ ולכן א' ברור. לכל $n \geq N_{2_\varepsilon}$ מתקיים $|a_n - b| < \varepsilon$. מאחר ש $N_\varepsilon = N_{1_\varepsilon} \geq N_{2_\varepsilon}$ הרי שכל n שמקיים $n \geq N_\varepsilon$ מקיים גם $n \geq N_{2_\varepsilon}$, ובתור שכזה הוא מקיים את ב'.

אם $N_{2_\varepsilon} > N_{1_\varepsilon}$ הנתוח דומה. ועתה:

$$|b - a| = |a - b| = |a - a_{N_\varepsilon} + a_{N_\varepsilon} - b| \leq |a - a_{N_\varepsilon}| + |a_{N_\varepsilon} - b| =$$

$$= |a_{N_\varepsilon} - a| + |a_{N_\varepsilon} - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\cdot\frac{(b - a)}{2} = b - a$$

כלומר $|b - a| < b - a$, בעוד שלפי טענה 4 א' $b - a \leq |b - a|$. סתירה, ולכן ההנחה שהנחנו, שקיימים לסדרה שני גבולות, איננה נכונה. □

<u>הגדרה 19</u>: הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תקרא סדרה חסומה אם קיים מספר $M \geq 0$ כך שלכל n מתקיים $|a_n| \leq M$.

הגדרה שקולה: הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תקרא סדרה חסומה אם קיימים שני מספרים K ו L, $K \leq L$, כך שלכל n מתקיים $K \leq a_n \leq L$.

<u>דוגמה 20</u>:

א. הסדרה $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ חסומה שהרי לכל n $0 \le a_n \le 1$.

ב. הסדרה $2, 2.5, 2.75, \dots, 3 - \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$ חסומה שהרי לכל n $2 \le a_n \le 3$.

ג. הסדרה $1, -2, 1, -2, \dots$ חסומה שהרי לכל n $|a_n| \le 2$.

ד. הסדרה $1,3,5,\dots,2(n-1),\dots$ אינה חסומה.

ה. הסדרה $-1, 2, -3, \dots, (-1)^n n, \dots$ אינה חסומה.

<u>טענה 21</u>: כל סדרה מתכנסת הינה סדרה חסומה.

הוכחה: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לגבול a. עבור $\varepsilon = 1$ קיים מספר טבעי N_1, כך שלכל $n \ge N_1$ מתקיים $|a_n - a| < 1$. נסמן:

$$M = \max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1-1}|\}$$

כלומר, M שווה למספר הגדול ביותר מבין המספרים $|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1-1}|$, ולכן $|a_1| \le M$, $|a_2| \le M, \dots, |a_{N_1-1}| \le M$.

יהי עתה $n \ge N_1$. לפי טענה 5 ה' $|a_n| - |a| \le |a_n - a| < 1$, כלומר $M \ge |a| + 1 > |a_n|$, ולכן לכל n (לאו דוקא גדול מ N_1) מתקיים $|a_n| \le M$. □

<u>הערות</u>:

א. מהטענה נובע שסדרה שאינה חסומה אינה מתכנסת, כי אם היא היתה מתכנסת היא היתה צריכה להיות חסומה. מכאן, שהסדרות ד' ו ה' שבדוגמה הקודמת אינן מתכנסות.

ב. המשפט ההפוך לטענה 21, היינו שכל סדרה חסומה הינה סדרה מתכנסת, איננו נכון. הסדרה $1,0,1,0,\dots$ הינה סדרה חסומה, אבל היא איננה סדרה מתכנסת.

<u>טענה 22</u>: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל 0, ותהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $|b_n| \le |a_n|$ לכל n.

בתנאים אלו גם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $b_n \to 0$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. מאחר ש $a_n \to 0$ הרי שקיים N_ε כך שלכל $n \ge N_\varepsilon$ מתקיים $|a_n - 0| < \varepsilon$, ולכן לאותו N_ε, ועבור כל $n \ge N_\varepsilon$, מתקיים גם

$$|b_n - 0| = |b_n| \le |a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$$

ולכן גם $b_n \to 0$. □

טענה 22 מאפשרת לנו לבדוק בקלות יחסית האם סדרות מסויימות מתכנסות לאפס או לא.

<u>דוגמה 23</u>: $a_n = \frac{1}{5n^7}$

טענה: $a_n \to 0$

הוכחה: מאחר שלכל n טבעי $n < 5n^7$, הרי ש $\frac{1}{5n^7} < \frac{1}{n}$, ומאחר ש $\frac{1}{5n^7}$ וכן $\frac{1}{n}$ חיוביים, הרי ש $\left|\frac{1}{5n^7}\right| < \left|\frac{1}{n}\right|$. כפי שראינו בדוגמה 16 ב' הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאפס, ולכן לפי טענה 22 גם הסדרה $\left\{\frac{1}{5n^7}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאפס.

נעיין שנית בדוגמה 12, ונניח שהמחיר ההתחלתי, P_o', הוא 10. קל לראות שעכשיו יהיה המחיר בתקופה ה n, P_n', שווה למחיר שהיה לפני כן בתקופה ה $n + 1$, P_{n+1} . האם ישפיע הדבר על ההתכנסות למחיר שווי משקל? הטענה הבאה עונה על שאלה זו.

<u>טענה 24</u>: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ותהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה הזהה לסדרה הקודמת, בהבדל היחיד שלפני הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נוסיף את האיבר c. כלומר

$$b_n = \begin{cases} c & n = 1 \\ a_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

בתנאים אלו $a_n \to a$ אם ורק אם $b_n \to a$.

הוכחה: נניח ש $a_n \to a$, ונוכיח שגם $b_n \to a$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_ε כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$, ולכן לכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $|b_{n+1} - a| < \varepsilon$ (שהרי $b_{n+1} = a_n$), או, לכל $n \geq N_\varepsilon + 1$ מתקיים $|b_n - a| < \varepsilon$, ולכן $b_n \to a$.

נניח עתה ש $b_n \to a$, ונוכיח כי $a_n \to a$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_ε כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $|b_n - a| < \varepsilon$, ולכן לכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$ שהרי $a_n = b_{n+1}$ ואם $n \geq N_\varepsilon$ אזי כמובן גם $n + 1 \geq N_\varepsilon$. □

<u>טענה 25</u>: תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות הזהות החל ממקום מסויים והלאה. כלומר, קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n = b_n$.

בתנאים אלו $a_n \to a$ אם ורק אם $b_n \to a$.

הוכחה: לפי טענה 24 כל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל a אם ורק אם הסדרה שאחריה מתכנסת אף היא ל a.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots$$

$$a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots$$

$$a_3, a_4, \ldots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots$$

$$\vdots$$

$$a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots$$

$$a_N, a_{N+1}, \ldots$$

$$b_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots$$

$$b_{N-2}, b_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots$$

$$\vdots$$

$$b_2, b_3, \ldots, b_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots$$

ולפי נסוח המשפט הסדרה האחרונה זהה לסדרה $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_{N-1},b_N,b_{N+1},\ldots$. □

נביא עתה הכללה של טענה 22.

<u>טענה 26</u>: תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות כך ש $a_n \to a$ וגם $b_n \to a$.
כמו כן נניח שלכל n מתקיים $b_n \le a_n$. תהי $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת
$b_n \le c_n \le a_n$ לכל n.
בתנאים אלו גם הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $c_n \to a$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. מאחר ש $a_n \to a$ הרי שקיים N_{1_ε} כך שלכל $n \ge N_{1_\varepsilon}$
מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$. גם $b_n \to a$ ולכן קיים N_{2_ε} כך שלכל $n \ge N_{2_\varepsilon}$
מתקיים $|b_n - a| < \varepsilon$.

נסמן: $N_\varepsilon = \max\{N_{1_\varepsilon}, N_{2_\varepsilon}\}$

כפי שכבר ראינו בהוכחת טענה 18 הרי שבמקרה כזה לכל $n \ge N_\varepsilon$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$
וכן $|b_n - a| < \varepsilon$. נראה עתה שלכל $n \ge N_\varepsilon$ מתקיים גם $|c_n - a| < \varepsilon$.
יהי $n \ge N_\varepsilon$. יתכנו שני מקרים:

1. $a \le c_n \le a_n$

2. $b_n \le c_n < a$

עלינו להראות שבכל מקרה $|c_n - a| < \varepsilon$. ואמנם

1. $$|c_n - a| = c_n - a \le a_n - a = |a_n - a| < \varepsilon$$

2. $$|c_n - a| = -(c_n - a) \le -(b_n - a) = |b_n - a| < \varepsilon$$

ולכן $c_n \to a$. □

הטענה האחרונה תכונה לעתים בשם "משפט הסנדויץ".

<u>טענה 27</u>: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לגבול a. אם לכל n מתקיים $a_n \ge b$ אזי מתקיים גם $a \ge b$.

הוכחה: נניח שמתקיים $b > a$. נסמן: $\varepsilon = b - a > 0$. מאחר ש $a_n \to a$ הרי שקיים N_ε כך שלכל $n \ge N_\varepsilon$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$. אבל $a_n - a > 0 \Leftarrow a_n \ge b > a$

ולכן $|a_n - a| = a_n - a = a_n - b + b - a \ge b - a = \varepsilon$

סתירה, ולכן ההנחה ש $b > a$ איננה נכונה.

מסקנה: $a \ge b$. □

נעבור עתה ונוכיח שורה של טענות העוסקות בסדרות המתקבלות כתוצאה מחבור חסור כפל וחלוק של איברים מתאימים של זוג סדרות.

<u>טענה 28</u>: תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות המתכנסות ל a ול b בהתאמה (כלומר $a_n \to a$, $b_n \to b$), ותהי $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שלכל n מתקיים $c_n = a_n + b_n$. בתנאים אלו גם הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ומתקיים $c_n \to a + b$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_{1_ε} כך שלכל $n \ge N_{1_\varepsilon}$ מתקיים $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, וקיים N_{2_ε} כך שלכל $n \ge N_{2_\varepsilon}$ מתקיים $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. נסמן: $N_\varepsilon = \max\{N_{1_\varepsilon}, N_{2_\varepsilon}\}$.

לכל $n \ge N_\varepsilon$ מתקיים

$$|c_n - (a + b)| = |(a_n + b_n) - (a + b)| =$$

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| \le \quad \text{(לפי טענה 5 ד')}$$

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר $c_n \to a + b$. □

<u>הערה:</u> המשפט ההפוך, דהיינו, "אם $c_n \to c$ ולכל n $c_n = a_n + b_n$ אזי גם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות" איננו נכון.

דוגמה: $c_n = 1$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{אי זוגי } n \\ 0 & \text{זוגי } n \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{אי זוגי } n \\ 1 & \text{זוגי } n \end{cases}$$

$c_n \to 1$, $c_n = a_n + b_n$ לכל n, ואף על פי כן הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינן מתכנסות.

<u>טענה 29:</u> תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות המתכנסות ל a ול b בהתאמה, ותהי $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שלכל n מתקיים $c_n = a_nb_n$. בתנאים אלו גם הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ומתקיים $c_n \to ab$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. עלינו להראות שקיים N_ε כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $|c_n - ab| < \varepsilon$. נסמן: $\varepsilon' = \min\left\{1 , \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}\right\}$. קיים $N_{\varepsilon'}$ כך שלכל $n \geq N_{\varepsilon'}$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon'$ וכן $|b_n - b| < \varepsilon'$, ולכן לכל $n \geq N_{\varepsilon'}$ מתקיים

$$|c_n - ab| = |a_nb_n - ab| =$$

$$|a_nb_n - ab + ab_n - ab_n + ba_n - ba_n + ab - ab| =$$

$$|ab_n - ab + ba_n - ab + a_nb_n - ab_n - ba_n + ab| =$$

$$|a(b_n - b) + b(a_n - a) + (a_n - a)(b_n - b)| =$$

$$|(a(b_n - b) + b(a_n - a)) + (a_n - a)(b_n - b)| \leq$$

$$|a(b_n - b) + b(a_n - a)| + |(a_n - a)(b_n - b)| \leq$$

$$|a(b_n - b)| + |b(a_n - a)| + |(a_n - a)(b_n - b)| =$$

$$|a||b_n - b| + |b||a_n - a| + |a_n - a||b_n - b| <$$

$$|a|\varepsilon' + |b|\varepsilon' + \varepsilon'^2 \leq$$ (שהרי $\varepsilon' \leq 1$)

$$|a|\varepsilon' + |b|\varepsilon' + \varepsilon'\cdot 1 =$$

$$\varepsilon'(|a| + |b| + 1) \leq$$ (שהרי $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}$)

$$\frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}(|a| + |b| + 1) = \varepsilon$$

כלומר $c_n \to ab$. □

<u>מסקנות</u>:

א. אם $a_n \to a$ ו k קבוע אזי $ka_n \to ka$

ב. אם $a_n \to a$ ו $b_n \to b$ אזי $a_n - b_n \to a - b$.

את הבטויים ka_n ו $a_n - b_n$ יש להבין כאיברים בסדרות $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ בהתאמה, כאשר $c_n = ka_n$ ו $d_n = a_n - b_n$.

הוכחת המסקנות:

א. לפי דוגמה 16 א' אם $c_n = k$ לכל n אזי $c_n \to k$. מסקנה א' נתנת איפוא להכתב באופן הבא: אם $a_n \to a$ ו $c_n \to k$ אזי $c_n a_n \to ka$.

ב. (לפי טענה 28 ומסקנה א')
$$a_n - b_n = a_n + (-1)b_n \to$$
$$a + (-1)b = a - b$$

<u>טענה 30</u>: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש $a_n \to a \neq 0$, ולכל n $a_n \neq 0$. נסמן: $c_n = \frac{1}{a_n}$. בתנאים אלו גם הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ומתקיים $c_n \to \frac{1}{a}$.

הו. ה: יהי $\varepsilon > 0$. עלינו להוכיח שקיים N_ε כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $\left|c_n - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$. נסמן: $\varepsilon' = \min\left\{\frac{\varepsilon|a|^2}{2}, \frac{|a|}{2}\right\}$. קיים $N_{\varepsilon'}$ כך שלכל $n \geq N_{\varepsilon'}$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon'$.

טענת עזר: לכל $n \geq N_{\varepsilon'}$ מתקיים $|a_n| > \frac{|a|}{2}$

הוכחה: לכל $n \geq N_{\varepsilon'}$ מתקיים

$$\varepsilon' > |a_n - a| = |a - a_n| \geq$$ (לפי טענה 5 ה')

$$|a| - |a_n| \Rightarrow$$

$$|a_n| > |a| - \varepsilon' \geq$$ (שהרי $\varepsilon' \leq \frac{|a|}{2}$)

$$|a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$

נחזור עתה לטענה הראשית, ונוכיח כי $c_n \to \frac{1}{a}$.

לכל $n \geq N_{\varepsilon'}$ מתקיים

$$\left|c_n - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|a_n||a|} <$$

$$\frac{\varepsilon'}{\frac{|a|}{2}|a|} \leq$$ (שהרי $\varepsilon' \leq \frac{|a|^2}{2}\cdot\varepsilon$)

$$\frac{\varepsilon\frac{|a|^2}{2}}{\frac{|a|^2}{2}} = \varepsilon$$ □

סעיף 6: התכנסות לאינסוף

בסעיף זה נדון בסוג מיוחד של סדרות מתבדרות.

הגדרה 31: אנו נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאינסוף, ונסמן $a_n \to \infty$, אם לכל מספר ממשי M קיים N_M כך שלכל $n \ge N_M$ מתקיים $a_n > M$.

אנו נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת למינוס אינסוף, ונסמן $a_n \to -\infty$, אם לכל מספר ממשי M קיים N_M כך שלכל $n \ge N_M$ מתקיים $a_n < M$.

דוגמה 32:

א. הסדרה $1,2,3\ldots$ מתכנסת לאינסוף.

ב. הסדרה $-1,-2,-3,\ldots$ מתכנסת למינוס אינסוף.

ג. הסדרה $10,1,20,2,30,3,40,\ldots$ מתכנסת לאינסוף.

ד. הסדרה $1,0,2,0,3,0,4,\ldots$ איננה מתכנסת לא לאינסוף ולא למינוס אינסוף.

טענה 33: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש $a_n \to 0$, אך לכל n $a_n \neq 0$. בתנאים אלו $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$.

הוכחה: יהי M מספר ממשי כלשהו. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח ש $M > 0$, שאם לא כן נבחר מספר $M' > 0 \ge M$, וכל מה שנוכיח לגביו יהיה ממילא נכון לגבי M. עלינו למצוא N_M כך שלכל $n \ge N_M$ יתקיים $\frac{1}{|a_n|} > M$. מאחר ש $a_n \to 0$ הרי שלכל $\varepsilon > 0$ קיים N'_ε כך שלכל $n \ge N'_\varepsilon$ מתקיים $|a_n - 0| < \varepsilon$, או $|a_n| < \varepsilon$. בפרט, אם נקח $\varepsilon = \frac{1}{M}$ (כאן אנו משתמשים בהנחה ש $M > 0$) הרי שקיים $N'_{\frac{1}{M}}$ כך שלכל $n \ge N'_{\frac{1}{M}}$ מתקיים $|a_n| < \frac{1}{M}$, או $\frac{1}{|a_n|} > M$.
נבחר בתור N_M את $N'_{\frac{1}{M}}$, ונקבל שלכל $n \ge N_M$ מתקיים $\frac{1}{|a_n|} > M$, ולכן לפי ההגדרה $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$. □

<u>הערה:</u> אם במקום $\frac{1}{|a_n|}$ נכתוב $\frac{1}{a_n}$ טענה 33 לא תהיה נכונה, כפי שתוכיח הדוגמה הבאה: הסדרה $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ מתכנסת לאפס, אבל הסדרה $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, הלא היא הסדרה $-1,2,-3,4,-5,\ldots$ אינה מתכנסת לא לאינסוף ואף לא למינוס אינסוף.

<u>דוגמה 34:</u> בנצל עתה את הטענות שלמדנו בסעיפים האחרונים כדי לבדוק באלו תנאים יש לסדרה $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ גבול, ולחשבו במקרה שהוא קיים.

נוכיח תחילה טענת עזר. קוראים שאינם בקיאים בשיטת ההוכחה באינדוקציה מתבקשים לעיין בנספח 1 הדן בנושא זה.

טענת עזר: לכל $h > 0$ ולכל $n \geq 1$ מתקיים $(1 + h)^n \geq 1 + nh$.

הוכחה: עבור $n = 1$ הטענה טוענת ש $(1 + h)^1 \geq 1 + h$, דבר שכמובן נכון. נניח שהטענה נכונה עבור n, ונוכיח שהיא נכונה גם עבור $n + 1$. כלומר, נניח שמתקיים $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, ונוכיח שמתקיים גם $(1 + h)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)h$. ואמנם

$$(1 + h)^{n+1} = (1 + h)^n(1 + h) \geq (1 + nh)(1 + h) =$$

$$= 1 + nh + h + nh^2 > 1 + (n + 1)h$$

נחזור עתה לבעיתינו המקורית, ונחלק את הטיפול בה לחמישה מקרים.

א. $q = 0$

ב. $0 < |q| < 1$

ג. $q = 1$

ד. $q > 1$

ה. $q \leq -1$

א. אם $q = 0$ אזי לכל n $q^n = 0$ ולכן לפי דוגמה 16 א' $q^n \to 0$.

ב. נסמן: $h = \frac{1 - |q|}{|q|}$. מאחר ש $|q| < 1$ הרי ש $1 - |q| > 0$, ומאחר שגם $|q| > 0$ הרי ש $h > 0$.

$$h = \frac{1 - |q|}{|q|} = \frac{1}{|q|} - \frac{|q|}{|q|} = \frac{1}{|q|} - 1 \Rightarrow$$

$$1 + h = \frac{1}{|q|} \Rightarrow$$

$$|q| = \frac{1}{1 + h}$$

נשתמש בשוויון זה ובטענת העזר שהוכחנו (אנו יכולים להשתמש בה כי $h > 0$) ונקבל לכל n

$$|q^n| = |\underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{\text{פעמים } n}| = \underbrace{|q||q|\ldots|q|}_{\text{פעמים } n} = |q|^n = \left(\frac{1}{1 + h}\right)^n =$$

$$\frac{1}{(1 + h)^n} \le \frac{1}{1 + nh} < \frac{1}{nh} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{h} = \left|\frac{1}{nh}\right|$$

יהי $k = \frac{1}{h}$. הסדרה $\frac{1}{n} \to 0$, ולפי מסקנה א' שאחרי טענה 29 $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{h} \to 0\cdot\frac{1}{h} = 0$, ולכן לפי טענה 22 גם $q^n \to 0$.

ג. אם $q = 1$ אזי לכל n $q^n = 1$ ולפי דוגמה 16 א' $q^n \to 1$.

ד. אם $q > 1$ אזי קיים $h > 0$ כך ש $q = 1 + h$, ואז

$$q^n = (1 + h)^n \ge$$ (לפי טענת העזר)

$$1 + nh > nh$$

הסדרה $\{nh\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאינסוף. ואמנם, יהי M מספר ממשי כלשהו. לכל $n \ge \left[\frac{M}{h}\right] + 1$ מתקיים $nh > M$.

מאחר ש $q^n > nh$ הרי שלכל $n \ge \left[\frac{M}{h}\right] + 1$ מתקיים גם $q^n > M$, ולכן $q^n \to \infty$.

ה. אם $q \leq -1$ אזי $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת, לא למספר ממשי כלשהו, ואף לא לאינסוף או למינוס אינסוף.

הוכחה: אם $q = -1$ אזי הסדרה היא $-1,1,-1,1,\ldots$, וכבר ראינו בדוגמה 17 ב' שלסדרה כזו אין גבול, וברור שהסדרה לא מתכנסת לאינסוף או למינוס אינסוף.
אם $q < -1$ אזי הסדרה $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה. הוכחה: קיים $h > 0$ כך ש $q = -(1 + h)$. יהי M מספר ממשי כלשהו. לכל מספר זוגי n שמקיים $n \geq \left[\frac{M}{h}\right] + 1$ מתקיים $q^n > M$ (עיין בהוכחת מקרה ד'). מאחר שהסדרה $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה הרי שלפי הערה א' שאחרי טענה 21 אין מספר שהוא הגבול של הסדרה.

הסדרה אינה מתכנסת לאינסוף כי לכל N קיים $n \geq N$ כך ש n אי-זוגי, ולכן קיים $n \geq N$ כך ש $q^n < 0$, ולכן עבור $M = 1$ לא קיים N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $q^n > 1$.

הסדרה אף אינה מתכנסת למינוס אינסוף, כי לכל N קיים $n \geq N$ כך ש n זוגי, ולכן קיים $n \geq N$ כך ש $q^n > 0$, ולכן עבור $M = -1$ לא קיים N_{-1} כך שלכל $n \geq N_{-1}$ מתקיים $q^n < -1$.

<u>סעיף 7: סדרות מונוטוניות</u>

<u>הגדרה 35</u>: הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תקרא

עולה ממש אם לכל n $a_{n+1} > a_n$

עולה אם לכל n $a_{n+1} \geq a_n$

יורדת ממש אם לכל n $a_{n+1} < a_n$

יורדת אם לכל n $a_{n+1} \leq a_n$

סדרה עולה, עולה ממש, יורדת או יורדת ממש תקרא "סדרה מונוטונית".

<u>הערה:</u> סדרה עולה ממש היא בפרט סדרה עולה, וסדרה יורדת ממש היא בפרט סדרה יורדת. כפי שנראה בדוגמה הבאה ההיפך איננו נכון.

<u>דוגמה 36:</u>

א. הסדרה $1,2,3,\ldots$ היא סדרה עולה ממש.

ב. הסדרה $95.3,85.3,75.3,\ldots$ היא סדרה יורדת ממש.

ג. הסדרה $\{[\sqrt{n}]\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה שאינה עולה ממש.

ד. הסדרה $1,1,1\ldots$ היא סדרה עולה וגם יורדת,אבל כמובן לא סדרה עולה ממש ולא סדרה יורדת ממש.

ה. הסדרה $\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ אינה סדרה מונוטונית.

כפי שציינו בהערה ב' שאחרי טענה 21, סדרה חסומה אינה בהכרח סדרה מתכנסת. בטענה הבאה נראה שאם סדרה, בנוסף להיותה חסומה, הינה גם סדרה מונוטונית, אזי היא סדרה מתכנסת.

<u>טענה 37:</u> לכל סדרה מונוטונית וחסומה קיים גבול.

הוכחה: נוכיח תחילה שלסדרה עולה וחסומה קיים גבול. תהי אם כן $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שלכל n $a_{n+1} \geq a_n$, וכמו כן קיים M כך שלכל n $|a_n| \leq M$.
נסמן ב $\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ את המספר הקטן ביותר הגדול או שווה מכל אברי הסדרה*.

---

* אמנם לא הוכחנו שקיים מספר כזה, ואף על פי כן נקבל טענה זו ללא הוכחה. טענה זו אינה פשוטה כפי שהיא נראית, והיא נכונה רק לגבי מספרים ממשיים. במספרים הרציונליים לא תמיד קיים מספר כזה, למשל עבור הסדרה החסומה ע"י 3 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה מספרים רציונליים אין מספר רציונלי קטן ביותר הגדול מכל איברי הסדרה.

כלומר, לכל k מתקיים $\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \geq a_k$, וכמו כן לא קיים מספר $b < \sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל k $b \geq a_k$. נסמן: $a = \sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

טענה: a הינו הגבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_ε כך ש $a_{N_\varepsilon} > a - \varepsilon$, שהרי אם לא היה קיים N_ε כזה אזי לכל n היה מתקיים $a_n \leq a - \varepsilon$, בסתירה לכך ש a הוא $\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. מאחר שהסדרה עולה הרי שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $a_n > a - \varepsilon$, או $a - a_n < \varepsilon$.
מאחר שלכל n $a \geq a_n$ הרי ש $|a - a_n| = a - a_n$, ולכן לכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $\varepsilon > |a_n - a| = |a - a_n|$, כלומר a הוא גבול הסדרה.

נוכיח עתה שגם לסדרה יורדת וחסומה קיים גבול. אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה יורדת וחסומה, אזי לכל n $a_{n+1} \leq a_n$, וקיים M כך שלכל n $|a_n| \leq M$. מאחר שכך, הסדרה $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת לכל n $-a_{n+1} \geq -a_n$, וכמו כן $|-a_n| \leq M$.
זוהי אם כן סדרה עולה וחסומה, ועל כן קיים לה גבול, נסמנו ב a.

אם a הוא הגבול של הסדרה $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $|-a_n - a| < \varepsilon$, ולכן לכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים

$$|a_n - (-a)| = |(-1)(-a_n - a)| = |-1||-a_n - a| = |-a_n - a| < \varepsilon$$

$\square$

מסקנה: $-a$ הוא גבול הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>מסקנה:</u> הגבול של סדרה עולה וחסומה גדול או שווה מכל איברי הסדרה, והגבול של סדרה יורדת וחסומה קטן או שווה מכל איברי הסדרה.

כזכור, חלקנו את הסדרות שאינן מתכנסות לשתי קבוצות. אלו שאינן מתכנסות כלל, ואלו שמתכנסות לאינסוף או למינוס אינסוף. הטענה הבאה משלימה את אפיונן של סדרות מונוטוניות.

<u>טענה 38</u>: א. סדרה עולה שאינה חסומה מתכנסת לאינסוף.

ב. סדרה יורדת שאינה חסומה מתכנסת למינוס אינסוף.

הוכחה:

א. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה שאינה חסומה ויהי M מספר כלשהו.

נסמן: $M' = \max\{|a_1|,M\}$. קיים $N_{M'}$ כך ש $|a_{N_{M'}}| > M'$, שהרי אם לא כן הסדרה היתה חסומה. מאחר שהיא עולה הרי שלכל $n \geq N_{M'}$ מתקיים $|a_n| > M'$.

$0 \leq |a_1| \leq M' < |a_{N_{M'}}|$ ומאחר ש $a_{N_{M'}} \geq a_1$ הרי ש $a_{N_{M'}} = |a_{N_{M'}}|$.

לכל $n \geq N_{M'}$ מתקיים $a_n \geq a_{N_{M'}}$ ולכן לכל $n \geq N_{M'}$ מתקיים

$$a_n \geq a_{N_{M'}} = |a_{N_{M'}}| > M' \geq M$$

ולכן לפי הגדרה 31 הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאינסוף.

□

ב. הוכחת חלק זה מושארת כתרגיל לקורא.

<u>דוגמה 39</u>: לכל $a > 0$ מתקיים $a_n = a^{\frac{1}{n}} \to 1$

א. $a > 1$

טענת עזר 1: אם $a > 1$ אזי לכל n $a^{\frac{1}{n}} > 1$

הוכחה: נסמן: $b = a^{\frac{1}{n}}$, כלומר $b^n = a$.

אם $b = 1$ אזי $b^n = 1$. אם $b < 1$ אזי

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{פעמים } n} < \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{\text{פעמים } n} = 1$$

ושתי תוצאות אלו סותרות את ההנחה ש $a > 1$.

מסקנה: $b = a^{\frac{1}{n}} > 1$.

טענת עזר 2: הסדרה $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה יורדת.

הוכחה: מאחר ש $a^{\frac{1}{n}} > 1$ הרי ש

$$a = a\cdot 1 < a\cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n+1}{n}}$$

נעלה את שני האגפים בחזקת $\frac{1}{n+1}$ ונקבל $a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}$.

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה יורדת. היא חסומה מלמטה ע"י 1 ומלמעלה ע"י a_1, ולכן לפי טענה 37 קיים לה גבול, נסמנו b.

טענת עזר 3: $b = 1$.

הוכחה: מאחר שלכל n $a_n \geq 1$, הרי שלפי טענה 27 גם גבול הסדרה מקיים $b \geq 1$.
נניח ש $b > 1$. לכל n מתקיים $a^{\frac{1}{n}} \geq b$ (מסקנה מטענה 37) ולכן לכל n מתקיים $b^n \leq a$ אבל לפי דוגמה 34 די $b^n \to \infty$ בסתירה לכך שלכל n $b^n < a$.
מסקנה: $b = 1$.

ב. $a = 1$ - מידי.

ג. $a < 1$.

נסמן: $b = \frac{1}{a}$. $a < 1 \Leftarrow b > 1$, ולכן לפי הוכחת המקרה עבור $a > 1$ נקבל ש $b^{\frac{1}{n}} \to 1$. אבל

$$a^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{1} = 1$$

<u>דוגמה 40</u>: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הסדרה הבאה: $a_1 = 1$

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$$

הגדרה מעין זו, דהיינו, הגדרה המגדירה כל איבר בעזרת האיבר שלפניו, חוץ מהאיבר הראשון המוגדר במפורש, נקראת "הגדרה באינדוקציה".

האיברים הראשונים בסדרה יהיו

$$1,\ \sqrt{3}\ ,\sqrt{3\sqrt{3}}\ ,\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$$

טענה: $a_n \to 3$

טענת עזר 1: $\{a_n\}_{n+1}^{\infty}$ הינה סדרה עולה.

הוכחה: עלינו להראות שלכל n $a_{n+1} \geq a_n$. נוכיח זאת באינדוקציה. עבור $n = 1$ הטענה כמובן נכונה, שהרי $\sqrt{3} > 1$. נניח שהוכחנו את הטענה עבור n, ונוכיח שהיא נכונה גם עבור $n + 1$. כלומר, נניח שמתקיים $a_{n+1} \geq a_n$, ונוכיח שמתקיים גם $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

כל אחת מהשורות הבאות נכונה אם ורק אם השורה שאחריה נכונה.

$$a_{n+2} \geq a_{n+1}$$

$$\sqrt{3a_{n+1}} \geq \sqrt{3a_n}$$

$$\sqrt{3}\ \sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{3}\ \sqrt{a_n}$$

$$\sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{a_n}$$

$$a_{n+1} \geq a_n$$

השורה האחרונה נכונה לפי הנחת האינדוקציה, ולכן גם השורה הראשונה נכונה.

טענת עזר 2: הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה ע"י 3 ומלמטה ע"י 1.

הוכחה: מאחר שהסדרה עולה ו $a_1 = 1$ הרי שלכל n מתקיים $a_n \geq 1$.

נוכיח עתה באינדוקציה שלכל n מתקיים $a_n < 3$. עבור $n = 1$ הטענה כמובן נכונה, שהרי $1 < 3$. נניח שהטענה נכונה עבור n, ונוכיח שהיא נכונה גם עבור $n + 1$.
כלומר, נניח שמתקיים $a_n < 3$, ונוכיח שמתקיים גם $a_{n+1} < 3$.

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} = \sqrt{3}\,\sqrt{a_n} < \sqrt{3}\,\sqrt{3} = 3$$ (לפי הנחת האינדוקציה)

מאחר ש $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה עולה וחסומה הרי שלפי טענה 37 קיים לה גבול, נסמנו ב a.

נגדיר עתה סדרה חדשה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא - לכל n $b_n = \sqrt{3a_n}$. או במילים אחרות, לכל n $b_n = a_{n+1}$. לפי טענה 24 גם $b_n \to a$.

נעיין עתה בסדרה $\{b_n^2\}_{n=1}^{\infty}$. לפי טענה 29

$$b_n^2 = b_n \cdot b_n \to a \cdot a$$

מצד שני, לפי אותה טענה

$$b_n^2 = b_n \cdot b_n = \sqrt{3a_n}\,\sqrt{3a_n} = \sqrt{3}\,\sqrt{a_n}\,\sqrt{3}\,\sqrt{a_n} = 3a_n \to 3a$$

מאחר שלפי טענה 18 לסדרה מתכנסת קיים רק גבול אחד, הרי ש $3a = a \cdot a \Leftarrow a = 3$
(מדוע לא $a = 0$?).

סעיף 8: הלמה של קנטור

נפתח סעיף זה באפיון קטעים על הישר הממשי.

<u>הגדרה 41</u>: א. הקטע הסגור $[a,b]$ הוא אוסף המספרים x כך ש $a \leq x \leq b$.

ב. הקטע הפתוח (a,b) הוא אוסף המספרים x כך ש $a < x < b$.

ג. הקטע החצי פתוח מימין (חצי סגור משמאל) $[a,b)$ הוא אוסף המספרים x כך ש $a \le x < b$.

ד. הקטע החצי פתוח משמאל (חצי סגור מימין) $(a,b]$ הוא אוסף המספרים x כך ש $a < x \le b$.*

בסעיף זה נבדוק את תכונותיהם של קטעים סגורים המוכלים זה בזה. לשם כך נוכיח את הטענה הבאה:

<u>טענה 42</u>: תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות המקיימות

א. לכל n $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$

ב. הסדרה $\{b_n - a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת $b_n - a_n \to 0$

בתנאים אלו קיים מספר c כך ש $a_n \to c$ וכן $b_n \to c$. יתירה מזו, c הינו המספר היחיד המקיים $a_n \le c \le b_n$ לכל n.

הוכחה: הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה עולה, והיא חסומה מלמטה ע"י a_1 ומלמעלה ע"י b_1. לפי טענה 37 קיים לה גבול, שנסמנו ב c_1.

הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה יורדת, והיא חסומה מלמעלה ע"י b_1 ומלמטה ע"י a_1. לפי טענה 37 קיים לה גבול שנסמנו ב c_2.

---

* למען הדיוק היה צריך לכתוב "אוסף הנקודות על ציר המספרים המתאימות למספרים x כך ש..."

לפי מסקנה ב' אחרי טענה 29 $c_1 - c_2 \to b_n - a_n$. מצד שני, לפי נתון ב' שבטענה $b_n - a_n \to 0$. מטענה 18 נקבל איפוא כי $c_2 - c_1 = 0$, או $c_2 = c_1$. נסמן: $c = c_2 = c_1$.

לגבי יחידות: מהמסקנה שאחרי טענה 37 ברור שלכל n מתקיים $a_n \le c \le b_n$. נניח שקיים מספר נוסף $d \ne c$ כך שלכל n מתקיים $a_n \le d \le b_n$. מטענה 27 ברור ש c_2 (הגבול של הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$) מקיים $c_2 \ge d$. באופן דומה להוכחת טענה 27 ניתן להראות ש c_1 (הגבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$) מקיים $c_1 \le d$. כלומר

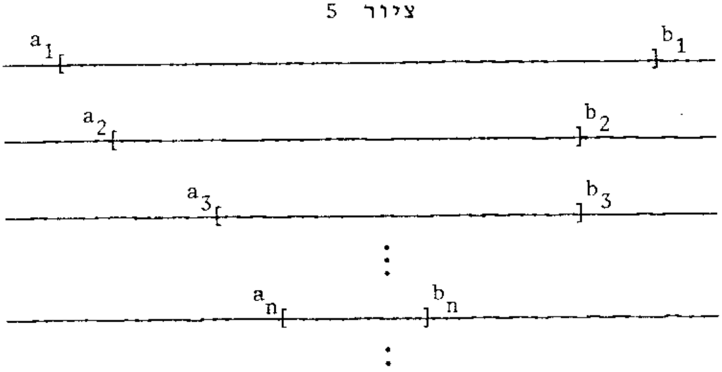
$$c = c_1 \le d \le c_2 = c$$

ולכן $d = c$, סתירה להנחה, ולכן c הינו המספר היחיד כך שלכל n מתקיים $a_n \le c \le b_n$. □

נביא עתה משמעות גיאומטרית לטענה 42. נניח שיש לנו סדרת קטעים סגורים על הישר כך שכל קטע מוכל בקטע הקודם לו בסדרה, וכמו כן נניח שאורכי הקטעים מתכנסים לאפס (ציור 5). מהטענה הקודמת נובע שקיימת נקודה אחת ורק אחת הנמצאת בכל אחד מהקטעים הללו. דבר זה נובע בקלות ע"י בנית שתי סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר הראשונה הינה סדרת הקצוות השמאליים של הקטעים, והשניה הינה סדרת הקצוות הימניים של הקטעים.

טענה זו נקראת "הלמה של קנטור".

ציור 5



האם הטענה נשארת נכונה גם אם נבחר קטעים פתוחים במקום קטעים סגורים?
הדוגמה הבאה מראה לנו שהתשובה לשאלה זו הינה שלילית.

דוגמה 43: נקח בתור סדרת קטעים את הסדרה $(0,1)$, $\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(0\ ,\ \frac{1}{3}\right)$,...., $\left(0\ ,\ \frac{1}{n}\right)$,.... . האם קיימת נקודה הנמצאת בכל אחד מהקטעים הללו? ברור שנקודה שלילית לא באה בחשבון, וכן לא נקודת האפס, שהרי האפס לא נמצא באף אחד מהקטעים שבסדרה.

נניח שהמספר החיובי x נמצא בכל אחד מהקטעים הללו. קיים N כך ש $x > \frac{1}{N}$, ולכן x לא נמצא באף אחד מהקטעים $\left(0\ ,\ \frac{1}{n}\right)$ לכל $n \geq N$.

מסקנה: אין אף נקודה הנמצאת בכל אחד מהקטעים שבסדרה.

סעיף 9: תת סדרות

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. בשם האינדכס של איבר נכנה את מקומו בסדרה. לדוגמה: האינדכס של האיבר השביעי בסדרה (a_7) הוא 7, ושל האיבר העשירי בסדרה (a_{10}) הוא 10.

נקח עתה את הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ונמחק ממנה מספר סופי או אין סופי של איברים ובלבד שישארו לנו אינסוף איברים. לדוגמה: נמחק את האיברים העומדים במקומות הזוגיים, ואז ישארו לנו אינסוף האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים. האיברים הנותרים, המסודרים ביניהם באותו סדר בו הם היו מסודרים בסדרה המקורית, יקראו "תת סדרה" או "סדרה חלקית" של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

נבנה עתה סדרה של מספרים טבעיים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש n_k יהיה שווה לאינדכס המקורי של האיבר העומד במקום ה k בתת הסדרה. למשל, אם האיבר השלישי בתת הסדרה הוא

a_7 אזי $n_3 = 7$. איברי תת הסדרה יהיו אם כן

$$a_{n_1}\ ,\ a_{n_2}\ ,\ a_{n_3}\ ,\ a_{n_4}\ ,\ldots,a_{n_k}\ ,\ldots$$

ואת תת הסדרה נסמן ע"י $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. נבסח את האמור לעיל באופן מעט יותר פורמלי.

<u>הגדרה 44</u>: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ותהי $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים.

הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תקרא "תת סדרה" או "סדרה חלקית" של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, והסדרה $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ תיקרא בשם "סדרת אינדכסים".

<u>דוגמה 45</u>:

א. הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נתונה ע"י $a_n = \frac{1}{n}$, וסדרת האינדכסים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ נתונה ע"י $n_k = k^2$. הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ היא הסדרה $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$, והיא תת סדרה של הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

ב. הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת באופן הבא

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{אי זוגי } n \\ 0 & \text{זוגי } n \end{cases}$$

וסדרת האינדכסים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ נתונה ע"י $n_k = 2k$, הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ היא הסדרה $0,0,0,\ldots$.

ג. הסדרה $1,1,3,5,7,9,\ldots$ איננה תת סדרה של הסדרה $1,2,3,4,\ldots$ משום שהיא איננה מתקבלת ממנה ע"י מחיקת איברים, שהרי האיבר 1 מופיע בסדרה $1,2,3,\ldots$ פעם אחת בלבד, ואילו בסדרה $1,1,3,5,\ldots$ הוא מופיע פעמיים.

כפי שכבר ציינו, לסדרה חסומה לא קיים בהכרח גבול. מטרתינו המרכזית בסעיף זה הינה להוכיח שלכל סדרה חסומה קיימת תת סדרה המתכנסת לגבול.

טענה 46: אם לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיים גבול a אזי כל תת סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. יתר על כן, היא מתכנסת לאותו גבול כמו הסדרה המקורית, כלומר ל a.

הוכחה: תהי $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה. מאחר ש $a_n \to a$ הרי שלכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$. יהי n_{K_ε} האיבר הקטן ביותר של סדרת האינדכסים של תת הסדרה כך ש $n_{K_\varepsilon} \geq N_\varepsilon$. מאחר שסדרת האינדכסים היא סדרה עולה, הרי שלכל $k \geq K_\varepsilon$ מתקיים $n_k \geq N_\varepsilon$, ולכן לכל $k \geq K_\varepsilon$ מתקיים $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, כלומר $a_{n_k} \to a$. □

מסקנה: אם לסדרה יש שתי תת סדרות מתכנסות כך שגבולותיהן שונים זה מזה, אזי הסדרה אינה מתכנסת.

נעיין עתה בשאלה כיצד צדים אריה במדבר. הבעיה היא כמובן למצוא את האריה. נחלק את המדבר לשניים, ונבחר את החצי בו נמצא האריה. נחלק חצי זה לשניים, ונמצא את הרבע בו נמצא האריה. נמשיך בתהליך זה עד שנקבל חלק קטן מאד של המדבר, שבו כבר לא תהיה בעיה למצוא את האריה.

מצחיק? אולי, אבל בדרך זו נוכיח את המשפט הבא.

משפט 47 (בולצנו - ויירשטראס): לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

הוכחה: נניח שהסדרה $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמטה ע"י המספר a, ומלמעלה ע"י המספר b. אמצע הקטע $[a,b]$ הוא $\frac{a+b}{2}$, ומאחר שבקטע $[a,b]$ נמצאים כל אינסוף איברי הסדרה, הרי שלפחות באחד משני הקטעים $\left[a , \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2} , b\right]$ נמצאים אינסוף איברים שלה. נבחר קטע כזה ונסמנו ב $[a_1,b_1]$, ונבחר איבר כלשהו של הסדרה הנמצא בקטע זה ונסמנו ב d_{n_1}. איבר זה יהיה האיבר הראשון בתת הסדרה אותה אנו בונים.

בקטע $[a_1,b_1]$ יש אינסוף איברים של הסדרה, ולכן לפחות באחד משני הקטעים $\left[a_1 , \frac{a_1 + b_1}{2}\right]$ ו $\left[\frac{a_1 + b_1}{2} , b_1\right]$ יש אינסוף איברים שלה. נבחר בקטע כזה ונסמנו ב $[a_2,b_2]$, ונבחר איבר כלשהו של הסדרה הנמצא בו, בתנאי שהוא בא בסדרה $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ אחרי האיבר d_{n_1} (מאחר שבקטע נמצאים אינסוף איברים של הסדרה הרי שאיבר כזה קיים) ונסמנו ב d_{n_2}.

נמשיך באינדוקציה. נניח שכבר בנינו את הקטעים $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2] ,\dots, [a_k,b_k]$ כך שלכל $1 \le i < k$ מתקיים $a_{i+1} \le a_i < b_i \le b_{i+1}$, וכך שבכל אחד מהקטעים הללו יש אינסוף איברים של הסדרה $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$. כמו כן נניח שכבר בחרנו את הנקודות $d_{n_1},d_{n_2},\dots,d_{n_k}$ כך ש $n_1 < n_2<\dots<n_k$, ולכל $1 \le i \le k$ מתקיים $a_i \le d_{n_i} \le b_i$. לפחות באחד משני הקטעים $\left[a_k , \frac{a_k + b_k}{2}\right]$, $\left[\frac{a_k + b_k}{2} , b_k\right]$ יש אינסוף איברים. נבחר בקטע כזה ונסמנו ב $[a_{k+1},b_{k+1}]$, ונבחר איבר כלשהו של הסדרה הנמצא בו, בתנאי שהוא בא בסדרה $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ אחרי האיבר d_{n_k}. איבר כזה קיים כי בקטע $[a_{k+1},b_{k+1}]$ יש אינסוף איברים. נסמן איבר זה ב $d_{n_{k+1}}$.

כפי שקל לראות אורכו של הקטע $[a_n,b_n]$ הוא $\frac{b - a}{2^n}$, ואורך זה מתכנס לאפס. הקטעים סגורים ומוכלים זה בזה, ולכן לפי הלמה של קנטור קיימת נקודה אחת ורק אחת c המוכלת בכל הקטעים.

טענה: הנקודה c היא הגבול של תת הסדרה $\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_ε כך ש $\frac{b - a}{2^{N_\varepsilon}} < \varepsilon$, כלומר קיים N_ε כך שאורך הקטע $[a_{N_\varepsilon},b_{N_\varepsilon}]$ קטן מ ε. לכל n מתקיים ש c נמצאת בקטע $[a_n,b_n]$, ולכל $k \ge N_\varepsilon$ מתקיים ש d_{n_k} נמצאת בקטע $[a_{N_\varepsilon},b_{N_\varepsilon}]$, שהרי היא נמצאת בקטע $[a_k,d_k]$ המוכל כולו בקטע $[a_{N_\varepsilon},b_{N_\varepsilon}]$. מאחר שכך, הרי שהמרחק בין c לבין d_{n_k} אינו עולה על אורך הקטע, כלומר לכל $k \ge N_\varepsilon$ מתקיים

$$|d_{n_k} - c| \le b_{N_\varepsilon} - a_{N_\varepsilon} = \frac{b - a}{2^{N_\varepsilon}} < \varepsilon$$

מסקנה: c הוא גבול הסדרה $\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. □

סעיף 10: e ורבית רציפה

כזכור מהתיכון, אם שער הרבית הוא k אחוזים בשנה, אזי בסוף שנה נקבל עבור לירה שהופקדה ברבית זו $1 + \frac{k}{100}$ לירות, בתום שנתיים $\left(1 + \frac{k}{100}\right)^2$ לירות, ובתום n שנים $\left(1 + \frac{k}{100}\right)^n$ לירות. נסמן: $q = \frac{k}{100}$

נניח עתה שהרבית מחושבת פעמיים בשנה, ובכל פעם היא מצורפת לקרן. כמו כן נניח ששעור הרבית לחצי שנה שווה לחצי שעור הרבית לשנה שלמה. בתום חצי שנה נקבל $1 + \frac{q}{2}$, ובתום שנה נקבל $\left(1 + \frac{q}{2}\right)^2$ ל"י. באופן דומה, אם נחלק את השנה ל n תקופות שוות, ובכל תקופה נוסיף את הרבית לקרן, הרי שבסוף התקופה הראשונה נקבל $1 + \frac{q}{n}$ לירות (שעור הרבית לתקופה אחת באורך $\frac{1}{n}$ היא $\frac{1}{n}$ משעור הרבית לשנה שלמה), ובתום n תקופות, היינו בסוף השנה, נקבל $\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n$ ל"י.

בטבלה הבאה רשומים ערכי הבטוי $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (כלומר $q = 1$) עבור ערכים שונים של n

n	1	10	100	1000	10000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	2.594	2.705	2.717	2.718

מה קורה כאשר n נעשה "גדול מאוד"?

<u>טענה 48</u>: הסדרה $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול.

הוכחה: כל איברי הסדרה גדולים כמובן מ 1. נראה שהם קטנים מ 3. לפי נוסחת הבינום של ניוטון (עיין נספח 2) נקבל

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1^n\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \dots + \binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \binom{n}{n}1^0\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!\,(n-2)!\,n^2} + \dots +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{k!\,(n-k)!\,n^k} + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!\,(n-n)!\,n^n} =$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n} + \dots + \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-k+1)}{n} + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n} <$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

טענת עזר: לכל n $n! \ge 2^{n-1}$

הוכחה: באינדוקציה.עבור $n = 1$ הטענה כמובן נכונה ($1 \ge 1$). נניח שהיא נכונה עבור n, ונוכיח שהיא נכונה גם עבור $n + 1$. כלומר נניח ש $n! \ge 2^{n-1}$ ונוכיח שמתקיים גם $(n+1)! \ge 2^n$. ואמנם, לפי ההנחה

$$(n+1)! = (n+1)n! \ge (n+1)2^{n-1} \ge 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$$

נחזור להוכחת הטענה הראשית. כזכור

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{n!} \le$$

$$1+1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} =$$ (לפי נוסחת טור הנדסי)

$$1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$$

כלומר, הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה.

נוכיח עתה שהסדרה הינה סדרה עולה, כלומר, שלכל n מתקיים $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

כבר מקודם קבלנו

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}+\ldots+\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-k+1)}{n}+\ldots+$$

$$\frac{1}{n!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n} =$$

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+$$

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

הוכחנו אם כן שהסדרה עולה וחסומה ולכן לפי טענה 37 קיים לה גבול. □

<u>סמון</u>: נסמן ב e את גבול הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$. מספר זה הוא מספר אי-רציונלי (לא נוכיח זאת), והוא שווה בקרוב ל 2.718281828.

<u>טענה 46-1</u> (הרחבה של טענה 46): אם $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה של מספרים טבעיים כך ש $n_k \to \infty$, והסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול a, אזי גם הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה a.

ההבדל בין טענה 46 ו 46-1 היא בכך שבטענה 46 אנו עוסקים בתת סדרה של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ואילו בטענה 46-1 אנו עוסקים אמנם בסדרה שאיבריה לקוחים מתוך הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, אבל חלק מאיברים אלו עשוי להופיע פעמים אחדות בזו אחר זו.

נשאיר טענה זו ללא הוכחה.

<u>טענה 49</u>: לכל m טבעי $\left(1+\frac{m}{n}\right)^n \to e^m$

הוכחה: $\left(1+\frac{m}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{n}{m}}\right)^m$. לפי טענה 29 מספיק להראות ש $\left(1+\frac{1}{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{n}{m}} \to e$.

לכל n מתקיים

$$\left[\frac{n}{m}\right] \le \frac{n}{m} < \left[\frac{n}{m}\right] + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]+1} < \frac{1}{\frac{n}{m}} \le \frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]} \quad \Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]+1} < 1+\frac{1}{\frac{n}{m}} \le 1+\frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]}$$

ומצרוף השורה הראשונה והשלישית נקבל

$$\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]+1}\right)^{\left[\frac{n}{m}\right]} < \left(1+\frac{1}{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{n}{m}} < \left(1+\frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]}\right)^{\left[\frac{n}{m}\right]+1}$$

הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]}\right)^{\left[\frac{n}{m}\right]+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי טענה 46-1 לגבי הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. לפי טענה 29, ומאחר ש $1+\frac{1}{n}\to 1$, הרי ש $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\to e$, ולכן גם $\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]}\right)^{\left[\frac{n}{m}\right]+1}\to e$. הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]+1}\right)^{\left[\frac{n}{m}\right]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי טענה 46-1 לגבי הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, ולפי טענה 30 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\to\frac{e}{1}=e$, ולכן גם $\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]+1}\right)^{\left[\frac{n}{m}\right]}\to e$.

לפי משפט הסנדויץ (טענה 26) גם הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{n}{m}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה הוא e. □

<u>טענה 50</u>: לכל מספר רציונלי x מתקיים

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

(אם $x=\frac{a}{b}$ אזי $e^x=\sqrt[b]{e^a}$)

לא נוכיח טענה זו, אבל נגדיר באמצעותה את הפונקציה e^x לכל מספר שהוא.

<u>הגדרה 51</u>: יהי x מספר ממשי אי רציונלי, ותהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים רציונליים כך ש $a_n\to x$. נגדיר $e^x=\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}$.

הערה: יש להוכיח שהגבול של הסדרה $\left\{e^{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ אינו תלוי בסדרה המסויימת $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, אלא רק בעובדה ש $a_n\to x$, אך הוכחת טענה זו חורגת מהמסגרת של הספר הזה.

<u>טענה 52</u>: $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

גם טענה זו תשאר ללא הוכחה.

<u>הגדרה 53</u>: יהי r מספר כלשהו, ונסמן $q = \frac{r}{100}$. אנו נאמר שלירה מופקדת ברבית רציפה של r אחוזים לשנה אם בתום שנה יוחזרו תמורתה $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n$ ל"י, או במילים אחרות, אם בתום השנה יוחזרו תמורתה e^q ל"י.

כפי שקל לראות מהגדרה 53, הרי שבתום t שנים יהיה ערכן של a לירות שנמסרו ברבית רציפה של r אחוזים לשנה ae^{qt}.

מאחר שהבטוי e^q מקביל לביטוי $1 + q$ במקרה של רבית לא רציפה, הרי שבדומה למקרה הרגיל ערכה הנוכחי של לירה שתמסר בעוד שנה, כאשר שער הרבית הרציפה הוא r אחוזים לשנה,יהיה $\frac{1}{e^q}$ או e^{-q}, וערכן הנוכחי של a לירות שימסרו בעוד t שנים יהיה ae^{-qt}.

פרק ב': פונקציות

סעיף 1: מושג הפונקציה

בסעיף זה נדון במושג הפונקציה. הדיון יהיה מעט יותר כללי מהנהוג בבית-הספר התיכון, ולכן קריאתו מומלצת אף בפני אלה שלמדו מושג זה בתיכון.

בשם "תת קבוצה של הממשיים" נכנה אוסף כלשהו של מספרים ממשיים, סופי או אין-סופי. כבר בפרק א' הכרנו כמה תת-קבוצות של הממשיים. לדוגמה: המספרים הרציונליים, המספר 5, [3,8] , היינו אוסף המספרים הגדולים או שווים ל-3 וקטנים או שווים ל 8, המספרים השלמים הזוגיים, ואף כל המספרים הממשיים כולם.

מובן מאליו שקימות אינסוף תת קבוצות של הממשיים, שהרי כל מספר בודד הוא בפרט תת קבוצה, וקימים אינסוף מספרים ממשיים.

בדרך כלל נסמן קבוצות באותיות לטיניות גדולות $(A,B,C,\ldots)$, ואת איבריהן באותיות לטיניות קטנות $(a,b,c,\ldots)$.

<u>סמון</u>: אם המספר a נמצא בקבוצה A אזי נסמן $a \in A$.
אם הקבוצה A מוכלת בקבוצה B, כלומר, כל איבר של A הוא גם איבר של B, אזי נסמן $A \subset B$.

תהי A תת קבוצה כלשהי של הממשיים. לכל איבר בקבוצה, כלומר, לכל מספר הנמצא בקבוצה A, נתאים מספר ממשי יחיד. משמעות הדבר היא כדלקמן: יהי $x \in A$. נבחר מספר ממשי כלשהו, לאו דוקא בקבוצה A, ונקרא לו "המספר המותאם ל x". להתאמה כזו נקרא "פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא A".

<u>דוגמה 1</u>:

א. תהי A קבוצת המספרים $\{1,3.5,4\}$. למספר 1 נתאים את המספר 7, למספר 3.5 את המספר 1-, ולמספר 4 את המספר 4.

ב. תהי A קבוצת המספרים הטבעיים. לכל מספר נתאים את סכום ספרותיו, כלומר, ל 1 נתאים את 1, ונסמן זאת $1 \to 1$, ל 2 נתאים את 2 $(2 \to 2)$,..., ל 9 נתאים את 9,

ל 10 את 1, ובאופן דומה

$11 \to 2$	$21 \to 3$
$12 \to 3$	.
.	.
.	.
.	$99 \to 18$
$19 \to 10$	$100 \to 1$
$20 \to 2$	.
	.
	.

ג. תהי A קבוצת כל המספרים הממשיים החיוביים. לכל מספר $x \in A$ נתאים את כמות הקפה שצרכן א' ירצה לקנות אם מחיר קופסת קפה הוא x ל"י, בהנחה ששאר המחירים והכנסתו קבועים ולא משתנים.

התאמה זו מכונה בשם "פונקצית הבקוש של צרכן א' לקפה".

ד. כתת חיילים עוסקת בחפירת שוחות. לכל כמות שעות עבודה נתאים את מספר השוחות שהכתה חופרת במשך זמן זה. תחום ההגדרה במקרה שלנו יהיה קבוצת המספרים האי-שליליים (כלומר הגדולים או שווים לאפס).

התאמה מעין זו ידועה כ"פונקצית יצור".

בדוגמה א' הפונקציה מתוארת באופן מפורש, בדוגמה ב' ע"י טבלה אינסופית, ובדוגמאות ג' ו ד' ע"י תכונת ההתאמה. בהמשך סעיף זה נלמד על שיטות הצגה נוספות.

<u>הערה:</u> שים לב לכך, שלמרות שדרשנו שלכל מספר בתחום ההגדרה יותאם מספר יחיד,הרי שבכך לא מנענו מצבים בהם לשני מספרים שונים (או יותר) בתחום ההגדרה יותאם אותו מספר. בדוגמה ב' למשל התאמנו למספרים 600,24,15 ו 5001 אותו מספר - 6.

<u>סמון:</u>

א. נסמן את קבוצת המספרים הטבעיים ב N.

ב. נסמן את קבוצת המספרים השלמים ב Z.

ג. נסמן את קבוצת המספרים הרציונליים ב Q.

ד. נסמן את קבוצת המספרים הממשיים ב R.

כפי שקל לראות $N \subset Z \subset Q \subset R$.

סמון: פונקציה שתחום הגדרתה A תסומן $f:A \to R$, ובמילים: פונקציה f מ A ל R.

סמון: תהי $f:A \to R$, ויהי x מספר בקבוצה A. את המספר המתאים ל x ע"י הפונקציה f נסמן ב $f(x)$, ובמילים: f של x.

מן הראוי לעמוד על ההבדל שבין שני הסמונים האחרונים. הסמון f סתם מסמל את ההתאמה שתחום הגדרתה A. הסמון $f(x)$ לעומת זאת הוא מספר, אותו מספר המותאם ל x ע"י ההתאמה f. ההבדל בין שני הסמונים הללו הוא כמו ההבדל בין המושג "כפל" לבין תוצאת התרגיל $7 \cdot 8$.

שים לב: אם f היא פונקציה מ A ל R אזי לכל מספר x בקבוצה A קיים מספר ממשי y $(Y \in R)$ כך ש $y = f(x)$, אבל ההיפך לא בהכרח נכון. כלומר, לא לכל $y \in R$ קיים בהכרח $x \in A$ כך ש $y = f(x)$.

הגדרה 2: א. הקרן הפתוחה (a,∞) היא קבוצת המספרים הממשיים הגדולים מ a.
ב. הקרן הסגורה $[a,\infty)$ היא קבוצת המספרים הממשיים הגדולים או שווים ל a.
ג. הקרן הפתוחה $(-\infty,a)$ היא קבוצת המספרים הממשיים הקטנים מ a.
ד. הקרן הסגורה $(-\infty,a]$ היא קבוצת המספרים הממשיים הקטנים או שווים ל a.

בנגוד לרושם העלול להיוצר, לא כל התאמה הינה פונקציה, כפי שתוכיח הדוגמה הבאה.

דוגמה 3: לכל $a > 0$ נתאים את פתרונות המשוואה $x^2 - a = 0$. לכל a מותאמים שני מספרים, $\sqrt{a}$ ו $-\sqrt{a}$. כזכור, דרשנו שהתאמה שהינה פונקציה תתאים לכל מספר מספר יחיד, ולכן ברור שהתאמה זו אינה פונקציה.

בהמשך נגדיר פונקציות ע"י כך שנציין איזה ערך הן מתאימות לכל מספר x.

לדוגמה: $f(x) = x^2$ פרושו שהפונקציה f מתאימה לכל מספר x את ערכו ברבוע.

דוגמה 4:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x$. פונקציה זו תכונה בשם "פונקצית הזהות".

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = k$, כאשר k הוא מספר ממשי כלשהו. פונקציה זו תכונה בשם "פונקציה קבועה".

ג. $f:[-4,4] \to R$ נתונה ע"י $f(y) = \sqrt{16 - y^2}$.

ד. $f:Q \to R$ נתונה ע"י $f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 + n^2$, כאשר $\frac{m}{n}$ היא שבר מצומצם. אם לא נדרוש ש $\frac{m}{n}$ יהיה שבר מצומצם נקבל סתירה לדרישה שלכל מספר בתחום ההגדרה יותאם מספר יחיד, שהרי $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1^2 + 2^2 = 5$, ואילו $f\left(\frac{2}{4}\right) = 2^2 + 4^2 = 20$. כלומר למספר $\frac{1}{2}$ למשל מותאמים כמה מספרים.

ה. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(\lambda) = [\lambda]$ (כאשר $[\lambda]$ הוא הערך השלם של המספר λ).

ו. $f:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2 + x$

ז. הפונקציות $f:[0,\infty) \to R$, $g:[0,\infty) \to R$, $h:[0,\infty) \to R$ נתונות ע"י $f(t) = ke^{rt}$, $g(r) = ke^{rt}$, $h(k) = ke^{rt}$.

לכאורה רשמנו אותה פונקציה שלוש פעמים, אולם עיון קצר יראה לנו ששלושת הפונקציות שונות זו מזו.

הפונקציה הראשונה, f, מתאימה לכל t את ערך הלואה של k ל"י שנתנה ברבית רציפה של $100r\%$ לשנה אחרי t שנים. במקרה זה k ו r נתונים וקבועים ואילו t משתנה.

הפונקציה g מתאימה לכל שער רבית את ערך הלואה של k ל"י אחרי t שנים. כאן r משתנה ואילו k ו t קבועים.

הפונקציה h מתאימה לכל גדל הלואה שנתנה בשער רבית r ל t שנים את ערכה בסוף התקופה. כאן k משתנה ואילו r ו t קבועים.

שלשת הפונקציות h,g,f הינן פונקציות שונות, ולכן אין לכתוב פונקציה בצורה ke^{rt} אלא

אם כן ברור מהו הגורם המשתנה של פונקציה.

בדוגמה ו' הבאנו את הפונקציה $f(x) = x^2 + x$ שתחום הגדרתה $[0,\infty)$. גם בדוגמאות ג' ו ד' תחום ההגדרה לא היה R, אבל אז אי אפשר היה לכאורה להרחיב את הפונקציה מעבר לתחום ההגדרה שהבאנו. למשל, בדוגמה ג' אם נציב $x = 5$ נקבל $\sqrt{-9}$, וכידוע לא קיים מספר ממשי שאם נעלה אותו ברבוע נקבל -9. בדוגמה ו' לעומת זאת, אין כל מניעה להציב בתור x כל מספר שהוא. האם אין בכך שגיאה להגביל את תחום ההגדרה לקרן הסגורה $[0,\infty)$ בלבד?

נחזור לדוגמת החילים החופרים שוחות(דוגמה ב-ד'),ונבין כי מספר השוחות הנחפרות במשך שעות עבודה הוא $x^2 + x$. במקרה כזה ברור שאין לפונקציה זו שום משמעות אם $x < 0$, כלומר אם מספר שעות העבודה הוא מספר שלילי. עכשיו גם ברור מדוע תחום ההגדרה של f שבדוגמה ו' דלעיל הינו הקרן $[0,\infty)$. ככלל, פונקציה $f:A \to R$ מתאימה לכל מספר הנמצא בקבוצה A מספר ממשי. העובדה שאפשר לבנות התאמה לכל המספרים שב R שתתלכד עם ההתאמה שלנו על המספרים שבתת הקבוצה A אינה מעניינינו, שהרי אנו מתענינים רק במספרים שבתת הקבוצה A, ובמספרים שהותאמו להם.

<u>הערות וסמונים:</u>

א. במקום לרשום $f(x) = x^2$ נרשום לפעמים $y = x^2$. הסיבה לכך תובהר כאשר נדון בתאורה הגרפי של פונקציה. מובן מאליו שסמון זה מותר אך ורק אם ברור למה הכוונה, ואין לרשום בטוי כמו $y = ke^{rt}$ כאשר לא ברור באיזו פונקציה מדובר.

ב. x בהערה הקודמת נקרא "המשתנה של הפונקציה". משמעות הסימן היא כדלקמן: אם אנו מעונינים לדעת את ערך הפונקציה f עבור מספר כלשהו, אזי נציב מספר זה במקום x בשני האגפים של השוויון $f(x) = x^2$. לדוגמה: $f(5) = 5^2$, $f(-8.7) = (-8.7)^2$ וכו'.

באות x אין שום קדושה, ונוכל להשתמש בכל סימן אחר, ובלבד שבשני האגפים יופיע אותו סימן. לדוגמה: $f(y) = y^2$, $f(x) = x^2$, $f(ק) = ק^2$, $f(\#) = \#^2$ וכו'.

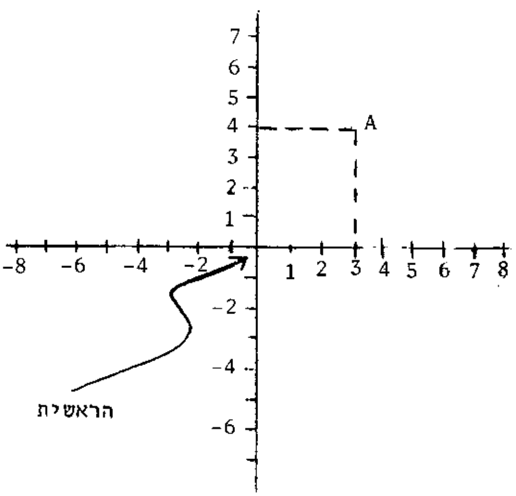
ג. אם $y = f(x)$ אזי y יקרא "המשתנה התלוי של הפונקציה", ומובן מאליו שגם במקום y נוכל להשתמש בכל סימן אחר.

תאור גרפי של פונקציה

יהי $y = f(x)$. לעתים קרובות בתענין בשאלות מסוג "אם נגדיל את x, האם y יגדל או יקטן?" או "עבור איזה x, y מקבל ערך מכסימלי?" ולאו דוקא בהתאמה המפורשת בין x ו y. לדוגמה, בעל מפעל יהיה מעונין לדעת מהי התפוקה שתביא את רווחיו למכסימום. בעל החנות ירצה לדעת האם כתוצאה מהורדת מחירים, רווחיו יגדלו או יקטנו, ועוד.

כדי לענות על שאלות מעין אלו נוח להעזר בהצגה גרפית.

נצייר במישור שני קוים ישרים ניצבים. לקו האופקי נקרא ציר ה x, או ציר התחום, ולקו האנכי נקרא ציר ה y, או ציר הטווח (ראה ציור 6). לנקודת החיתוך של שני הקווים נקרא "ראשית הצירים" או "הראשית".

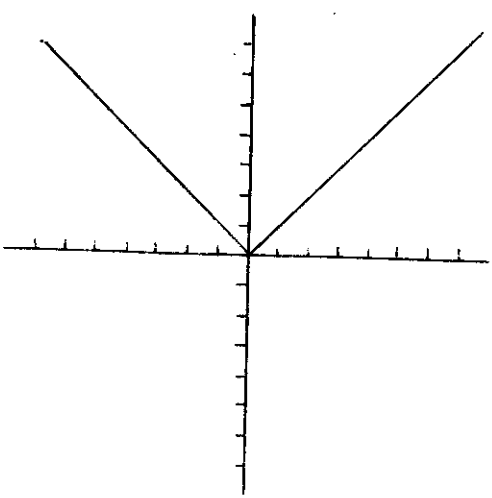


ציור 6

נתיחס עתה אל ציר ה x כאל ציר המספרים, כאשר האפס יהיה בראשית, ובאפן דומה נתיחס אל ציר ה y כאל ציר המספרים, כאשר האפס בראשית, והמספרים החיוביים בקרן העליונה. לכל נקודה במישור, למשל הנקודה A שבציור, מתאימות באופן טבעי שתי נקודות, אחת על ציר ה x ואחת על ציר ה y. הנקודות מתקבלות ע"י חתוך הקו המקביל לציר ה y העובר דרך הנקודה A עם ציר ה x, וחתוך הקו המקביל לציר ה x העובר דרך הנקודה A עם ציר ה y (הקוים המרוסקים שבציור 6). נוכל אם כן לתאר כל נקודה ע"י זוג המספרים (x,y), כאשר x היא הנקודה המתאימה על ציר ה x, ו y היא הנקודה המתאימה על ציר ה y. באופן דומה נתאים לכל זוג מספרים (x_0,y_0) נקודה במשור באופן הבא: נעביר קו ניצב לציר ה x דרך הנקודה x_0 עליו, ונעביר קו ניצב לציר ה y דרך הנקודה y_0 עליו. נקודת החיתוך של שני הקוים הללו תהיה הנקודה המתאימה לזוג (x_0,y_0).

מאחר שהנקודה המתאימה לזוג $(0,0)$ היא נקודת הראשית, הרי שלפעמים נכנה את ראשית הצירים בשם "האפס".

תהי עתה f פונקציה כלשהי שתחום הגדרתה A. לכל נקודה x שבקבוצה A נסמן במשור את הנקודה $(x,f(x))$. לאוסף הנקודות שנקבל נקרא "תאור גרפי של הפונקציה f".



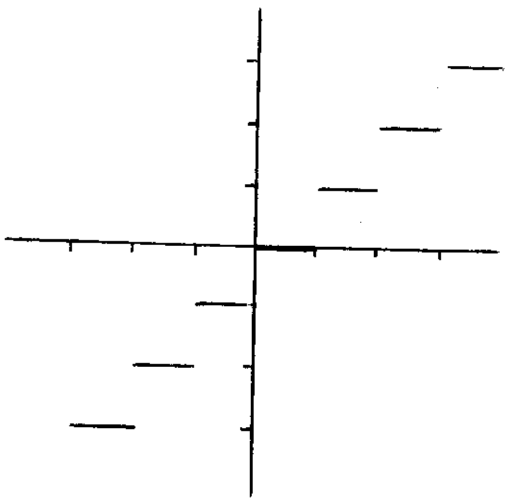
ציור 7

דוגמה 5:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = |x|$.
הנקודות אותן נסמן יהיו למשל
$(0,0)$, $(1.3,1.3)$, $(8,8)$,
$(37.1,37.1)$ וכדומה, וכן נקודות
כמו $(-1,1)$, $(-7.5,7.5)$ וכדומה.
(ציור 7)

שים לב לכך, שלמרות שאי אפשר לדעת מתוך הציור את ערכה המדויק של הפונקציה כאשר $x = 5.3$, הרי שבכל זאת ניתן לראות מיד שהפונקציה מקבלת תמיד ערכים אי-שליליים, שהיא מקבלת ערך מינימלי באפס, ועוד. על מנת להגיע לאותן מסקנות ללא ציור היה עלינו להאריך בהסברים מילוליים, אותם נוכל עתה לחסוך.

ב. $f{:}R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = [x]$.



ציור 8

כזכור, קטעים מסוג אלו המצויירים בציור 8 כונו קטעים חצי סגורים משמאל (פרק א' הגדרה 41 ג').

ג. $f{:}R \to R$ נתונה ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{אם } x \text{ רציונלי} \\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

פונקציה זו לא ניתנת לתאור גרפי, וזאת משום שאין באפשרותינו לסמן על ציר ה x רק את הנקודות האי-רציונליות.

ד. R $f:[0,\infty)$ נתונה ע"י $f(t) = ke^{rt}$

$g:R \to R$ נתונה ע"י $g(r) = ke^{rt}$

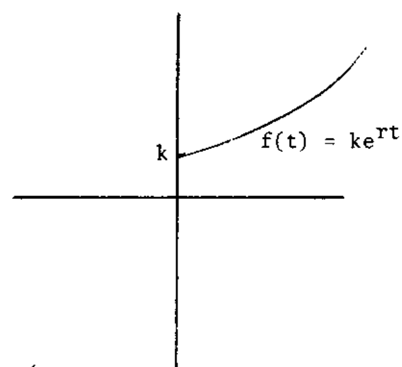
$h:R \to R$ נתונה ע"י $h(k) = ke^{rt}$

מדוע תחומי ההגדרה הם דוקא אלו?

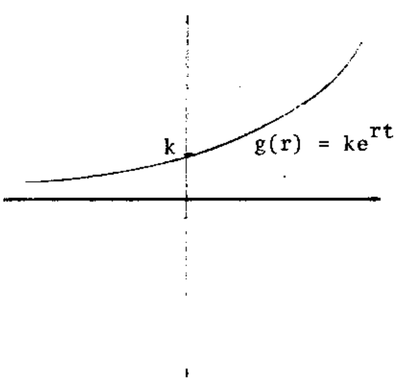
תחום ההגדרה של f הוא הקרן הסגורה$[0,\infty)$מפני שאנו עוסקים רק בהלואות לעתיד, בהן t לא יכול כמובן להיות שלילי. לעומת זאת, יש בהחלט משמעות לשער רבית שלילי, ומספיק אם נציין כאן שבתנאי אינפלציה, הלואות ששער הרבית הנומינלי שלהן נמוך משעור עלית המחירים נתנות למעשה ברבית ריאלית שלילית.

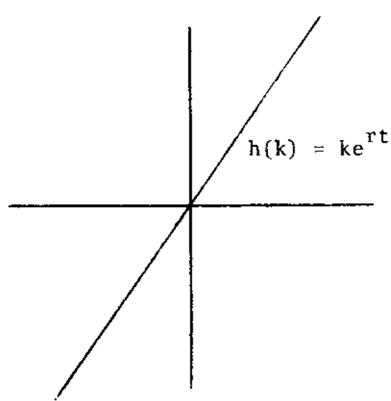
גם ל k שלילי יש משמעות. אם k חיובי פרושו הלואה שאני נותן לך,אזי מבחינתי k שלילי פרושו הלואה שאתה נותן לי.

ציור 9 א'



ציור 9 ב'





ציור 9 ג'

<u>פעולות חשבון בין פונקציות</u>

<u>דוגמה 6</u>: תהי $f:(0,\infty) \to R$ התאמה המתאימה לכל מחיר x את כמות הקפה המבוקש ע"י צרכן א' במחיר זה, ותהי $g:(0,\infty) \to R$ התאמה המתאימה לכל מחיר x את כמות הקפה המבוקשת ע"י צרכן ב' במחיר זה.

נבנה עתה התאמה חדשה $h:(0,\infty) \to R$ המתאימה לכל מחיר x את סך כמות הקפה המבוקשת במחיר זה ע"י שני הצרכנים ביחד. במלים אחרות, לכל $x > 0$ בתאים ע"י h את המספר $f(x) + g(x)$.

במקרה כזה נאמר שהפונקציה h הינה סכום הפונקציות f ו g, ונסמן $h = f + g$.

שים לב: הסימן + המופיע בשורה האחרונה איננו סימן ה + הרגיל המשמש לחבור שני מספרים. הסימן כאן משמש לחבור שתי פונקציות, ומשמעותו היא שאם f ו g הן שתי פונקציות אזי גם $f + g$ הינה פונקציה, והיא מתאימה לכל מספר x את המספר $f(x) + g(x)$, וכאן הסימן מציין חבור מספרים רגיל. למען הדיוק מן הראוי היה לסמן חבור פונקציות בסימן מיוחד, למשל $\oplus$, אבל אנחנו לא נעשה זאת ונסמוך על הקורא שידע להחליט בכל מקרה מהי משמעותו של הסימן +.

באופן דומה נגדיר

א. $h = f - g$, כלומר לכל מספר x, הפונקציה h מתאימה את המספר $f(x) - g(x)$.

ב. $h = f \cdot g$, כלומר לכל מספר x, הפונקציה h מתאימה את המספר $f(x) \cdot g(x)$.

ג. $h = \frac{f}{g}$, כלומר לכל מספר x, הפונקציה h מתאימה את המספר $\frac{f(x)}{g(x)}$.

בכל המקרים דלעיל, תחום ההגדרה של הפונקציה h הוא אוסף הנקודות שנמצאות בתחום ההגדרה של הפונקציה f <u>וגם</u> בתחום ההגדרה של הפונקציה g. אם $h = \frac{f}{g}$ נדרוש בנוסף לכך שתחום ההגדרה של הפונקציה h לא יכיל נקודות x שעבורן $g(x) = 0$.

דוגמה 7:

א. $f:[-2,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \sqrt{2+x}$

$g:(-\infty,4] \to R$ נתונה ע"י $g(x) = \sqrt{4-x}$

$f+g:[-2,4] \to R$ נתונה ע"י $(f+g)(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x}$

ב. $f:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = e^x$

$g:(-\infty,0] \to R$ נתונה ע"י $g(x) = \sqrt{-x}$

מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $\frac{f}{g}$?

תחום זה לא יכול לכלול אף נקודה מהקרן הפתוחה $(0,\infty)$, כי קרן זו לא נמצאת בתחום ההגדרה של הפונקציה g.

תחום ההגדרה לא יכול לכלול גם אף נקודה מהקרן הפתוחה $(-\infty,0)$ כי קרן זו לא נמצאת בתחום ההגדרה של הפונקציה f.

גם הנקודה 0 לא תכלל בתחום ההגדרה של $\frac{f}{g}$, כי $g(0) = 0$.

אנו רואים איפוא שהפונקציה $\frac{f}{g}$ לא קיימת, שהרי אין אף נקודה בתחום ההגדרה שלה.

סמון: את הקבוצה הריקה, כלומר הקבוצה שלא מכילה אף נקודה, נסמן ב ϕ.

נביא עתה מספר הגדרות נוספות הדנות בתכונות של פונקציות.

הגדרה 8: תהי A קבוצת נקודות ותהי $f:A \to R$ פונקציה. קבוצת כל המספרים הממשיים המתקבלים ע"י f, כלומר קבוצת כל המספרים הממשיים y שקיים עבורם x כך ש $y = f(x)$ תיקרא בשם "הטווח של הפונקציה f".

דוגמה 9:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = [x]$. במקרה זה הטווח של הפונקציה f הוא Z (קבוצת המספרים השלמים).

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = e^x$. במקרה זה יהיה הטווח של הפונקציה f הקרן הפתוחה $(0,\infty)$.

<u>הגדרה 10</u>: הפונקציה f תקרא "פונקציה חד חד ערכית" (חח"ע) אם לכל מספר x ולכל מספר y קיים: $f(x) \neq f(y) \Leftarrow x \neq y$ (במילים: x שונה מ y גורר f(x) שונה מ f(y)).

הגדרה שקולה: הפונקציה f תקרא פונקציה חד חד ערכית אם לכל מספר x ולכל מספר y, $x = y \Leftarrow f(x) = f(y)$.

<u>דוגמה 11</u>:

א. $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$. פונקציה זו היא פונקציה חד חד ערכית, שהרי אם $x \neq y$, ושניהם חיוביים, אזי $x^2 > y^2 \Leftarrow x > y$, $x^2 < y^2 \Leftarrow x < y$ ולכן $f(x) \neq f(y) \Leftarrow x \neq y$.

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$. פונקציה זו איננה חד חד ערכית, שהרי לכל מספר $x \neq 0$ מתקיים $f(x) = f(-x)$.

בדומה להגדרה 35 שבפרק א' נגדיר גם כאן

<u>הגדרה 12</u>: הפונקציה f תקרא עולה ממש אם $f(y) > f(x) \Leftarrow y > x$

עולה אם $f(y) \geq f(x) \Leftarrow y > x$

יורדת ממש אם $f(y) < f(x) \Leftarrow y > x$

יורדת אם $f(y) \leq f(x) \Leftarrow y > x$.

פונקציה עולה, עולה ממש, יורדת או יורדת ממש תקרא בשם "פונקציה מונוטונית".

<u>דוגמה 13</u>:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = [x]$. פונקציה זו איננה פונקציה עולה.

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = 1 - x^3$. פונקציה זו הינה פונקציה יורדת ממש.

ג. $f:R \to R$ נתונה ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{אי-רציונלי } x \\ 0 & \text{רציונלי } x \end{cases}$$

פונקציה זו אינה פונקציה מונוטונית.

<u>טענה 14</u>: אם הפונקציה f הינה פונקציה עולה ממש או פונקציה יורדת ממש אזי היא פונקציה חד חד ערכית.

הוכחה: א. f עולה ממש. נוכיח את הטענה בדרך השלילה. נניח ש f אינה פונקציה חד חד ערכית. קיימות אם כך שתי נקודות שונות x ו y כך ש $f(x) = f(y)$.
נניח למשל ש $y > x$. לפי הגדרה 12 אם f עולה ממש אזי
$f(y) > f(x) \Leftarrow y > x$, סתירה.

ב. f יורדת ממש. הוכחת מקרה זה מושארת כתרגיל לקורא. ם

<u>סמון</u>: תהי f פונקציה. $-f$ תהיה הפונקציה המתאימה לכל מספר x את המספר $-f(x)$.

<u>טענה 15</u>: אם הפונקציה f עולה/עולה ממש/יורדת/יורדת ממש אזי הפונקציה $-f$ יורדת/יורדת ממש/עולה/עולה ממש.

הוכחה: א. f עולה. במקרה זה $f(y) \geq f(x) \Leftarrow y > x$ וע"י הכפלה ב -1 נקבל $-f(y) \leq -f(x)$, ולכן $-f(y) \leq -f(x) \Leftarrow y > x$, כלומר $-f$ יורדת.

הוכחת שאר המקרים מושארת כתרגיל לקורא. ם

<u>הערה</u>: הטענה ההפוכה לטענה 14 אינה נכונה. כלומר, קיימות פונקציות חד חד ערכיות שאינן מונוטוניות, כפי שתראה הדוגמה הבאה.

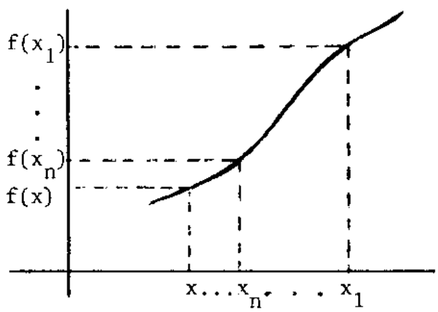
<u>דוגמה 16</u>: $f:[0,2] \to R$ נתונה ע"י

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 3 - x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

פונקציה זו היא פונקציה חד חד ערכית, אבל היא אינה פונקציה מונוטונית, שהרי היא עולה בקטע $[0,1)$ ויורדת בקטע $[1,2]$.

<u>סעיף 2: הגדרת גבול הפונקציה בלשון סדרות</u>

תהי $f:A \to R$ פונקציה כלשהי. כפי שראינו בסעיף הקודם הקבוצה A יכולה להיות כל תת קבוצה שהיא של הממשיים. מכאן ואילך נגביל את הדיון, ואלא אם כן נציין אחרת נעסוק רק בפונקציות שתחום ההגדרה שלהן הוא קטע, קבוצת קטעים, קרן או הישר כולו.



ציור 10

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי של מספרים כך שכל אחד מהם נמצא בקבוצה A. סדרה זו מגדירה סדרה חדשה של מספרים ממשיים $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. סדרה זו הינה סדרה המותאמת לסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י f. האיבר הראשון שבה יהיה המספר המותאם ע"י f ל x_1, כלומר $f(x_1)$, האיבר השני שבה יהיה מספר המותאם ע"י f ל x_2 ($f(x_2)$), וכו'.

נניח שהסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול x. המספר x לא חייב כמובן להיות בקבוצה A. למשל, אם $A = (0,1)$ ו $x_n = \frac{1}{n}$ אזי $x_n \to 0$, אבל $0 \notin (0,1)$ (הסימן $\notin$ פרושו "לא נמצא ב-"). אנו נתעניין בשאלות הבאות: א. האם הסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת? ב. אם כן, לאיזה גבול?

בסעיפים הבאים נראה מהי חשיבותן של התשובות לשאלות אלו. בסעיף זה ובבא אחריו נסתפק בהגדרה פורמלית של מושגים אחדים, ובדוגמאות להם.

<u>הגדרה 17</u>: תהי A תת קבוצה של הממשיים, ותהי $f:A \to R$ פונקציה. אנו נאמר שהמספר ℓ הוא גבול הפונקציה בנקודה x_0 (x_0 לא נמצאת בהכרח בקבוצה A), אם לכל סדרה של מספרים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת

א. לכל n $x_n \in A$

ב. לכל n $x_n \neq x_0$

ג. $x_n \to x_0$

מתקיים $f(x_n) \to \ell$.

הסבר: חשוב לשים לב לכך שכדי שתנאי ההגדרה יתקיימו אין זה מספיק למצוא סדרה אחת שתקיים את הדרישות א'-ג', אלא כל סדרה שמקיימת את א'-ג' חייבת לקיים גם $f(x_n) \to \ell$.

דרישות א' ו ג' מובנות. הסיבה לדרישה ב' תובהר בדוגמה 18 ג' בהמשך.

<u>סמון</u>: אם ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 אזי נסמן זאת על ידי $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ או על ידי $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.

<u>דוגמה 18</u>:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$. לכל מספר x_0 ולכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $x_n \to x_0$ מתקיים לפי טענה 29 שבפרק א'

$$x_n^2 = x_n \cdot x_n \to x_0 \cdot x_0 = x_0^2$$

מסקנה: x_0^2 הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0.

ב. פולינום $p(x)$ היא ביטוי מהצורה $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$
כאשר $\alpha_n,\dots,\alpha_0$ הם מספרים ממשיים. P הוא אם כן פונקציה שתחום
הגדרתה R. באופן דומה לדוגמה הקודמת $P(x_0)$ הוא גבול הפונקציה P בנקודה x_0.

ג. $f:R \to R$ נתונה ע"י
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

נבחר $x_0 = 0$. כפי שראינו בדוגמה א' הרי שלכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ של מספרים שונים
מאפס המתכנסת לאפס, מתקיים $f(x_n) \to 0$.

דוגמה זו מבהירה את הדרישה שבהגדרה 17 שלכל n יתקיים $x_n \neq x_0$, שהרי במקרה שלנו
$f(0) = 1$, וערך זה שונה מגבול הפונקציה בנקודה 0. אם היינו מרשים לסדרות להכיל
גם את x_0, היינו יכולים לבחור בתור סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ את הסדרה שכל איבריה שווים
ל x_0 (במקרה שלנו ל 0), ואז $f(x_n) \to 1$, ולפונקציה לא היה גבול (שהרי קיימות
סדרות אחרות המתכנסות לאפס, כך ש $f(x_n) \to 0$). אנו מעונינים להמנע ממצב בו ערך
הפונקציה בנקודה x_0 ישפיע על הקביעה האם לפונקציה קיים או לא קיים גבול בנקודה זו.

<u>טענה:</u> לכל מספר x_0 קיימת סדרה המקיימת את תנאי הגדרה 17 שכל איבריה הם מספרים
רציונליים, וקיימת סדרה המקיימת את תנאי הגדרה 17 שכל איבריה הם מספרים אי רציונליים.

הוכחה: אם x_0 הוא מספר רציונלי, אזי לפי טענה 1 א' שבפרק א' לכל n טבעי גם $x_0 + \frac{1}{n}$
הוא מספר רציונלי, ולכן הסדרה $\left\{x_0 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים רציונליים המתכנסת
ל x_0.

לפי חלק ג' של אותה טענה לכל n טבעי $\frac{\sqrt{5}}{n}$ הוא מספר אי רציונלי, לפי חלק ב' $x_0 + \frac{\sqrt{5}}{n}$
הוא מספר אי-רציונלי ולכן הסדרה $\left\{x_0 + \frac{\sqrt{5}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה של מספרים אי-
רציונליים המתכנסת ל x_0.

אם x_0 הוא מספר אי-רציונלי אזי לפי טענה 1 ב' שבפרק א' הסדרה $\left\{x_0 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא
סדרה של מספרים אי-רציונליים המתכנסת ל x_0.

נבנה עתה סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ של מספרים רציונליים המתכנסת ל x_0 באופן הבא: לכל n נגדיר $x_n = \frac{[10^n \cdot x_0]}{10^n}$. זוהי כמובן סדרה של מספרים רציונליים, ונוכיח שהיא מתכנסת ל x_0. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_ε כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$.*

יהי $n \geq N_\varepsilon$. מתקיים

$$|x_n - x_0| = \left|\frac{[10^n x_0]}{10^n} - x_0\right| = \left|\frac{[10^n x_0] - 10^n x_0}{10^n}\right| =$$

$$= \frac{10^n x_0 - [10^n x_0]}{10^n} < \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

כלומר $x_n \to x_0$.

ד. $f:R \to R$ נתונה ע"י
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{רציונלי } x \\ 1 & \text{אי-רציונלי } x \end{cases}$$

מהטענה שהוכחנו נובע שלכל מספר x_0 קיימת סדרה של מספרים אי-רציונליים $x_n \to x_0$ כך שלכל n $f(x_n) = 1$ ולכן $f(x_n) \to 1$, וקיימת סדרה של מספרים רציונליים $y_n \to x_0$ כך שלכל n $f(y_n) = 0$ ולכן $f(y_n) \to 0$. לפי הגדרה 17 לא קיים איפוא לפונקציה f גבול בנקודה x_0.

__הגדרה 19:__ תהי $f:A \to R$ פונקציה כלשהי. אנו נאמר ש ℓ הוא גבול הפונקציה f באינסוף, אם לכל סדרה $x_n \to \infty$ כך שלכל n $x_n \in A$ מתקיים $f(x_n) \to \ell$, ונסמן זאת ע"י $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ או ע"י $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell$.

---

* למשל $\{N_\varepsilon = \max\{1, -\log_{10} \varepsilon + 1\}$

אנו נאמר ש ℓ הוא גבול הפונקציה f במינוס אינסוף,אם לכל סדרה $x_n \to -\infty$ כך שלכל n $x_n \in A$ מתקיים $f(x_n) \to \ell$, ונסמן זאת ע"י $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ או ע"י $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$.

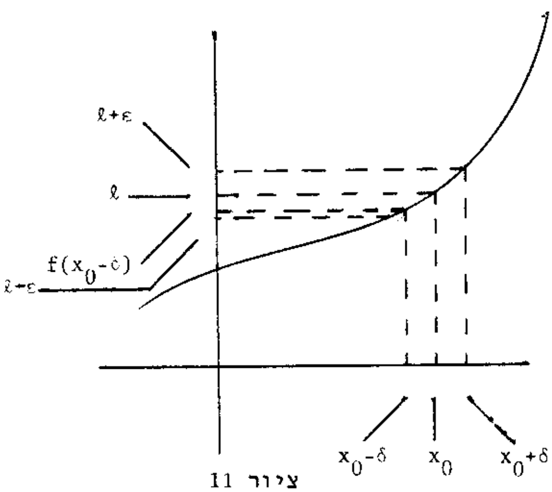
<u>דוגמה 20</u>: $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

<u>סעיף 3: הגדרת הגבול בלשון ε ו δ</u>

בסעיף זה נביא הגדרה שקולה להגדרת מושג הגבול של פונקציה (הגדרה 17 דלעיל). יתרונה של הגדרה זו יהיה בכך שבעזרתה נוכל להוכיח ביתר קלות שלפונקציה קיים גבול בנקודה. כמובן שנצטרך להוכיח ששתי ההגדרות הינן שקולות, וזאת נעשה בהמשך. נפתח איפוא ונגדיר:

<u>הגדרה 21</u>: תהי A תת קבוצה של הממשיים ותהי $f:A \to R$ פונקציה כלשהי. אנו נאמר ש ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0,אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_\varepsilon > 0$, כך שלכל $x \in A$ המקיים $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, מתקיים $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ (ראה ציור 11).

במילים אחרות, ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 אם לכל $x \neq x_0$ שמרחקו מ x_0 קטן מ δ_ε מתקיים שהמרחק בין $f(x)$ ל ℓ קטן מ ε.



ציור 11

<u>דוגמה 22</u>: $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = 5x - 1$.

טענה: $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 4$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{5}$. לכל $x \neq 1$ המקיים $|x - 1| < \delta_\varepsilon$ מתקיים

$$|f(x) - 4| = |5x - 1 - 4| = |5x - 5| = |5(x - 1)| =$$

$$= |5||x - 1| = 5|x - 1| < 5\cdot\delta_\varepsilon = 5\cdot\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

<u>טענה 23</u>: תהי $f:A \to \mathbb{R}$ פונקציה. ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 לפי הגדרה 17 אם ורק אם הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 לפי הגדרה 21.

הוכחה: א. נניח ש ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 לפי הגדרה 21, ונוכיח שהוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 לפי הגדרה 17. כלומר, נניח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in A$ המקיים $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ מתקיים $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. תהי עתה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כבהגדרה 17, כלומר, מתקיים

א. לכל n $x_n \in A$

ב. לכל n $x_n \neq x_0$

ג. $x_n \to x_0$.

יהי $\varepsilon > 0$ ויהי δ_ε כמקודם. מאחר ש $x_n \to x_0$ הרי שקיים N_{δ_ε} כך שלכל $n \geq N_{\delta_\varepsilon}$ מתקיים $|x_n - x_0| < \delta_\varepsilon$. מאחר שמתקיימים התנאים של הגדרה 21 הרי שלכל n כזה, כלומר לכל $n \geq N_{\delta_\varepsilon}$, מתקיים $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$, כלומר ℓ הוא גבול הסדרה $\{f(x_n)\}_{m=1}^{\infty}$, ולכן ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 גם לפי הגדרה 17.

נניח עתה ש ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 לפי הגדרה 17, ונוכיח שהיא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 גם לפי הגדרה 21. נניח שלא, כלומר, נניח שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $x \in A$ כך ש $0 < |x - x_0| < \delta$ אבל $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$. בפרט, לכל n קיים x_n כך ש $x_n \in A$ ו $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, אבל $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$. $x_n \to x_0$ אבל הסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת ל ℓ, שהרי לכל N קיים $n \geq N$ (למעשה לכל $n \geq N$) שעבורו מתקיים $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$. קבלנו איפוא סתירה להנחה ש ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0 לפי הגדרה 17. □

בחזור עתה לדוגמה 4 ה' דלעיל. $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ בתובה ע"י $f(x) = [x]$. כפי שקל לראות, לכל x_0 שאיננו מספר שלם מתקיים ש $[x_0]$ הוא גבול הפונקציה בנקודה x_0. מה קורה אם x_0 הוא מספר שלם? ברור שבמקרה כזה אין לפונקציה f גבול בנקודה x_0, שהרי הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$ מתכנסת ל x_0 ומקיימת $f(x_n) \to x_0$, ואילו הסדרה $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $y_n = x_0 - \frac{1}{n}$ מתכנסת ל x_0 ומקיימת $f(y_n) \to x_0 - 1$, ולכן לא קיים לפונקציה f גבול בנקודה שלמה.

ההגדרה הבאה דנה בנקודות מעין אלו.

<u>הגדרה 24</u>: תהי $f:A \to \mathbf{R}$ פונקציה כלשהי. אנו נאמר שהמספר ℓ הוא גבול מימין של הפונקציה f בנקודה x_0 אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת

א. לכל n $x_n \in A$

ב. לכל n מתקיים $x_n > x_0$

ג. $x_n \to x_0$

מתקיים $f(x_n) \to \ell$.

נסמן זאת ע"י $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \ell$ או ע"י $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

אנו נאמר שהמספר ℓ הוא גבול משמאל של הפונקציה f בנקודה x_0 אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת

א. לכל n $x_n \in A$

ב. לכל n מתקיים $x_n < x_0$

ג. $x_n \to x_0$

מתקיים $f(x_n) \to \ell$.

נסמן זאת ע"י $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \ell$ או ע"י $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

<u>דוגמה 25:</u>

א. כפי שראינו, אם $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = [x]$ אזי לכל מספר שלם x_0 קיים גבול מימין השווה ל x_0, וקיים גבול משמאל השווה ל $x_0 - 1$. ברור גם ש $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 1 & x \le 0 \end{cases}$$

כפי שקל לראות $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1$.

בדומה לטענה 23 מתקיימת גם הטענה הבאה.

<u>טענה 26:</u> תהי $f:A \to R$ פונקציה כלשהי.

א. $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \ell$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in A$ המקיים $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ מתקיים $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

ב. $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \ell$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in A$ המקיים $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ מתקיים $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

הוכחה: מושארת כתרגיל לקורא.

מובן מאליו שאם לפונקציה f קיים גבול בנקודה x_0 אזי קיימים לה בפרט גבול מימין וגבול משמאל בנקודה זו, והם שווים זה לזה. האם גם המשפט ההפוך נכון?

<u>טענה 27:</u> תהי $f:A \to R$ פונקציה כלשהי, ונניח שבנקודה x_0 קיים לה גבול משמאל וגם גבול מימין, ויתירה מזו, נניח ששני הגבולות הללו שווים זה לזה, נסמנם ב ℓ.

טענה 29: תהיינה $f:A \to R$ ו $g:A \to R$ שתי פונקציות כך ש $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ ואילו $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} m$. בתנאים אלו

א. $(f + g)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell + m$

ב. $(f - g)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell - m$

ג. $(f \cdot g)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \cdot m$

ד. אם $m \neq 0$ אזי $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{\ell}{m}$

הוכחה: א. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל x_0 ומקיימת את תנאי הגדרה 17. לכל n $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$. לפי הנתון שבטענה $f(x_n) \to \ell$ ואילו $g(x_n) \to m$, ולכן לפי טענה 28 שבפרק א'

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to \ell + m.$$

דבר זה נכון לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת את תנאי הגדרה 17, ולכן $(f + g)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell + m$.
ב' ו ג' מוכחות באופן דומה.

בהוכחת ד' עלולה להתעורר הבעיה שמא לא קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ הנמצאת בתחום ההגדרה של הפונקציה $\frac{f}{g}$. הטענה הבאה תפתור בעיה זו.

טענה 30: אם $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ וכן $k < \ell < m$ אזי קיים $\delta > 0$ כך שלכל x שמקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $k < f(x) < m$.

הוכחה: נסמן: $\varepsilon = \min\{m - \ell, \ell - k\} > 0$. מאחר ש ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה x_0, הרי שקיים $\delta_\varepsilon > 0$, כך שלכל x שמקיים $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, מתקיים

$$k = \ell - (\ell - k) \leq \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \leq \ell + (m - \ell) = m \qquad \square$$

נחזור עתה לטענה 29 ד'. מאחר ש $m \neq 0$ הרי שקיים $\delta_{\frac{m}{2}}$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta_{\frac{m}{2}}$ מתקיים $\left|\frac{m}{2}\right| < |g(x)| < \left|\frac{3m}{2}\right|$, ולכן לכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta_{\frac{m}{2}}$ מתקיים $g(x) \neq 0$, ולכן קיימות סדרות המתכנסות ל x_0 עליהן הפונקציה $\frac{f}{g}$ מוגדרת. □

__טענה 31:__ (משפט הסנדויץ לפונקציות): תהיינה h,g,f שלוש פונקציות בעלות אותו תחום הגדרה A המקיימות

א. לכל $x \in A$ $\quad h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

ב. $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \quad , \quad h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$

בתנאים אלו גם $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.

הוכחה: לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת את תנאי הגדרה 17, מתקיים לכל n $h(x_n) \leq f(x_n) \leq g(x_n)$, וכמו כן מתקיים $g(x_n) \to \ell$, $h(x_n) \to \ell$. ממשפט הסנדויץ לסדרות (פרק א' טענה 26) נובע שגם $f(x_n) \to \ell$. מאחר שהאמור לעיל נכון לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת את תנאי הגדרה 17, הרי ש ℓ הוא הגבול של הפונקציה f בנקודה x_0. □

__הגדרה 32:__ תהי $f:A \to R$ פונקציה כלשהי, ותהי $B \subset A$ תת קבוצה של A. f תקרא פונקציה חסומה בקבוצה B אם קיים מספר M כך שלכל $x \in B$ מתקיים $|f(x)| \leq M$.

באופן דומה להגדרה 19 שבפרק א' נביא גם כאן הגדרה שקולה להגדרה 32: f תקרא פונקציה חסומה בקבוצה B אם קיימים שני מספרים K ו L, $K \leq L$, כך שלכל $x \in B$ מתקיים $K \leq f(x) \leq L$.

<u>דוגמה 33</u>:

א. $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \frac{1}{x}$. בתור קבוצה B נבחר את הקטע $[1,2]$.
לכל $x \in B$ מתקיים $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$, ולכן f חסומה בקטע.

ב. תהי f כמקודם, ויהי $\delta > 0$. בתור קבוצה B נבחר את הקטע $(0,\delta]$. טענה: הפונקציה f לא חסומה בקטע. ואמנם, יהי $M \neq 0$ מספר כלשהו. לכל מספר ממשי x כך ש $0 < x < \min\left\{\delta , \frac{1}{|M|}\right\}$ מתקיים

$$f(x) > f\left(\frac{1}{|M|}\right) = \frac{1}{\frac{1}{|M|}} = |M| \ge M .$$

ג. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x - [x]$. לכל x $0 \le f(x) \le 1$, ולכן f חסומה על פני הישר כולו.

<u>טענה 34</u>: אם לפונקציה f יש גבול בנקודה x_0 אזי קיים $\delta > 0$ כך ש f חסומה בקטע $[x_0 - \delta , x_0 + \delta]$.

הוכחה: יהי $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - \ell| < 1$, או במילים אחרות $\ell - 1 < f(x) < \ell + 1$, ולכן לכל $x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta$ (כולל x_0 עצמו) מתקיים

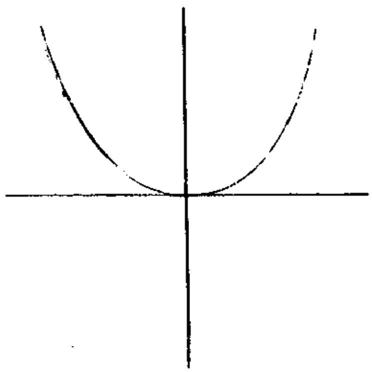
$$^*\min\{\ell - 1 , f(x_0)\} \le f(x) \le \max\{\ell + 1 , f(x_0)\}$$ □

<u>מסקנה</u>: לפונקציה $f:R \to R$ הנתונה ע"י $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אין גבול בנקודה $x = 0$, שהרי אם היה לה גבול באפס אזי לפי טענה 34 היא היתה צריכה להיות חסומה בקטע מהצורה $[-\delta,\delta]$ עבור $\delta > 0$ כלשהו, דבר שכפי שראינו בדוגמה 33 ב' איננו נכון.

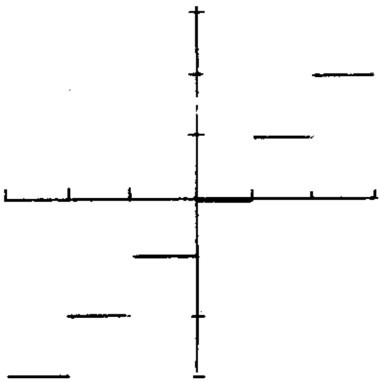
* אם f לא מוגדרת בנקודה x_0, נכתוב $\ell - 1 \le f(x) \le \ell + 1$.

סעיף 5: רציפות

נעיין בשתי הפונקציות $f:R \to R$ הנתונה ע"י $f(x) = x^2$ ו $g:R \to R$ הנתונה ע"י $g(x) = [x]$. קיים הבדל מהותי בין השתיים. הגרף של הפונקציה f הוא קו אחד, אמנם מפותל, ואף על פי כן קו רצוף. הגרף של הפונקציה g לעומת זאת, איננו מורכב מקו אחד, אלא מאוסף של אינסוף קטעים שאינם רציפים (ציור 12 א' ו ב').



ציור 12 א'



ציור 12 ב'

הגדרה 35: א. פונקציה f תקרא רציפה בנקודה a אם $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים ושווה ל $f(a)$.

ב. פונקציה f תקרא רציפה משמאל בנקודה a אם $\lim_{x\to a^-} f(x)$ קיים ושווה ל $f(a)$.

ג. פונקציה f תקרא רציפה מימין בנקודה a אם $\lim_{x\to a^+} f(x)$ קיים ושווה ל $f(a)$.

ד. פונקציה f תקרא רציפה בקטע (a,b) אם f רציפה בכל נקודה $a < x < b$.

ה. פונקציה f תקרא רציפה בקטע $[a,b]$ אם

1. f רציפה בכל נקודה $a < x < b$
2. f רציפה משמאל בנקודה b
3. f רציפה מימין בנקודה a.

ו. פונקציה f תקרא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה בתחום הגדרתה.

דוגמה 36:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^3 - 2$. כפי שכבר ציינו, אם f היא פולינום אזי קיים לה גבול בכל נקודה, וגבול זה שווה לערך הפונקציה באותה נקודה. מההגדרה הקודמת נובע ש f רציפה בכל נקודה, כלומר f רציפה.

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = [x]$. גם דוגמה זו כבר נותחה על ידינו, ולכן ברור ש f רציפה בכל נקודה שאינה מספר שלם, ובנקודות שלמות הפונקציה רציפה מימין אך לא משמאל.

מאחר שקיימות נקודות בהן הפונקציה אינה רציפה, הרי שברור שהיא אינה מקיימת את תנאי הגדרה 35 ו'. לעומת זאת, f רציפה בכל קטע מהצורה (x,y) כאשר $[x] = [y]$

ג. $f:R \to R$ נתונה ע"י
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

הפונקציה f רציפה בכל נקודה פרט לאפס.

באופן דומה להגדרת הגבול בלשון ε ו δ (הגדרה 21) נגדיר גם כאן

הגדרה 37: פונקציה f תקרא רציפה בנקודה a אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $0 < \delta$ כך שלכל x שמקיים $|x - a| < \delta$ (כולל a עצמו) מתקיים $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

טענה 38: הגדרה 35 א' והגדרה 37 שקולות.

הוכחה: ההוכחה נובעת בקלות משקילות שתי הגדרות הגבול (הגדרה 17 והגדרה 21). □

טענה 39: אם הפונקציה f רציפה בנקודה a, ומתקיים $f(a) > c$, אזי קיים $\delta > 0$, כך שלכל x שמקיים $|x - a| < \delta$, מתקיים $f(x) > c$.

הוכחה: נסמן $\varepsilon = f(a) - c$. מאחר ש f רציפה קיים $\delta_\varepsilon > 0$ כך שלכל x שמקיים $|x - a| < \delta_\varepsilon$ מתקיים $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ובפרט $f(x) > f(a) - \varepsilon$.

כלומר,

$$f(x) > f(a) - \varepsilon = f(a) - (f(a) - c) = c$$ □

<u>טענה 40</u>: אם f ו g הן שתי פונקציות הרציפות בנקודה a, אזי גם הפונקציות $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ רציפות בנקודה a, ואם $g(a) \neq 0$ אזי גם הפונקציה $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה a.

הוכחה: $f + g$ רציפה בנקודה a. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל a ומקיימת את תנאי הגדרה 17. מאחר ש f ו g רציפות בנקודה a הרי ש $f(x_n) \to f(a)$, וכן $g(x_n) \to g(a)$. מפרק א' טענה 28 נובע ש

$$f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + f(b)$$

כלומר

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

שאר המקרים מוכחים באופן דומה. □

<u>סעיף 6: הרכבת פונקציות</u>

<u>דוגמה 41</u>: $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = e^{x^2}$.

פונקציה זו מתאימה לכל מספר ממשי x את המספר e^{x^2}, נעיין עתה בשתי הפונקציות הבאות

$g:R \to R$ הנתונה ע"י $g(x) = x^2$

$h:R \to R$ הנתונה ע"י $h(y) = e^y$

יהי x מספר כלשהו. נפעיל עליו תחילה את הפונקציה g ונקבל את המספר y השווה ל x^2. על המספר y נפעיל את הפונקציה h ונקבל את המספר e^y השווה ל e^{x^2}.
אנו רואים איפוא שתוצאת הפעלת הפונקציה h על תוצאת הפעלת הפונקציה g על המספר x זהה לתוצאת הפעלת הפונקציה f על המספר x. לפעולה מעין זו קוראים הרכבה של פונקציות.

<u>הגדרה 42</u>: תהי f פונקציה שתחום הגדרתה A והטווח שלה הוא B, ותהי g פונקציה כך שכל הנקודות בקבוצה B נמצאות בתחום הגדרתה.
לכל מספר $x \in A$ נתאים מספר z באופן הבא: נפעיל את הפונקציה f על x ונקבל את המספר $y = f(x)$. על המספר y נפעיל את הפונקציה g, ונקבל את המספר $z = g(y)$. הפעלת הפונקציה g על y הינה חוקית, שהרי y נמצא בקבוצה B, ולכן גם בתחום ההגדרה של g. להתאמה שקבלנו, שתחום הגדרתה A, נקרא "הרכבת הפונקציה g על הפונקציה f", ונסמנה $g \circ f$.

<u>דוגמה 43</u>:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = 2x$, $g:R \to R$ נתונה ע"י $g(y) = e^y$.
הפונקציה $g \circ f$ מתאימה לכל מספר x את המספר e^{2x}.
הפונקציה $f \circ g$ מתאימה לכל מספר x את המספר $2e^x$.

אנו רואים איפוא שהרכבת פונקציות הינה פעולה לא קומוטטיבית ("חוק החילוף").

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$. $g:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $g(y) = \sqrt{y}$.
כפי שקל לראות, הטווח של הפונקציה f הוא הקרן $[0,\infty)$, ולכל x $g \circ f(x) = |x|$.
במקרה זה $f \circ g$ כלל אינה מוגדרת על אותה קבוצה כמו $g \circ f$, שהרי $g \circ f$ מוגדרת על הישר כולו, ואילו $f \circ g$ מוגדרת רק על הקרן $[0,\infty)$. באותן נקודות בהן $f \circ g$ מוגדרת מתקיים $f \circ g = g \circ f$.

ג. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = e^x$, $g:R \to R$ נתונה ע"י $g(y) = y^2$.
הפונקציה $g \circ f$ מתאימה לכל מספר x את המספר $(e^x)^2$ או e^{2x}.

אנו רואים איפוא שהפונקציה המתקבלת כתוצאה מההרכבה שב א' זהה לפונקציה המתקבלת כתוצאה מההרכבה שב ג', למרות ששתי הפונקציות המורכבות שונות בשני המקרים.

<u>הגדרה 44</u>: תהי f פונקציה שתחום הגדרתה A והטווח שלה הוא B, ותהי g פונקציה שתחום הגדרתה B והטווח שלה הוא A. אם לכל $x \in A$ מתקיים $g \circ f(x) = x$ אזי נאמר שהפונקציה f הפיכה ושהפונקציה g היא הפונקציה ההופכית שלה, ונסמן $g = f^{-1}$.

<u>דוגמה 45</u>:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^3 + 1$
$g:R \to R$ נתונה ע"י $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
לכל x מתקיים

$$g \circ f(x) = g(x^3 + 1) = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

ב. $f:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$
$g:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $g(x) = \sqrt{x}$
לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים

$$g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

שהרי $x \geq 0$.

נחזור עתה על שתי הדוגמאות, ונבדוק בכל מקרה מהי ההרכבה $f \circ g$.

א. $f \circ g(x) = f(\sqrt[3]{x - 1}) = (\sqrt[3]{x - 1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$

ב. $f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$

כלומר, בשני המקרים f הינה הפונקציה ההופכית של g. תוצאה זו אינה מקרית, כפי שנוכיח בטענות הבאות.

<u>טענה 46</u>: אם הפונקציה g היא הפונקציה ההופכית של הפונקציה f, אזי g היא פונקציה חד חד ערכית (עיין הגדרה 10).

הוכחה: יהיו y ו z שני מספרים בתחום ההגדרה של הפונקציה g כך ש $g(y) = g(z)$. נוכיח כי $y = z$. ואמנם, מאחר שהטווח של הפונקציה f שווה לתחום ההגדרה של הפונקציה g הרי שקיימים שני מספרים a ו b כך ש $y = f(a)$ ו $z = f(b)$. מאחר ש g היא הפונקציה ההופכית של f הרי שלכל x מתקיים $g \circ f(x) = x$, ובפרט מתקיים $g \circ f(a) = a$, $g \circ f(b) = b$. כלומר,

$$a = g \circ f(a) = g(f(a)) = g(y) = g(z) = g(f(b)) = g \circ f(b) = b$$

ומאחר ש $a = b$ הרי ש $f(a) = f(b)$, ולכן

$$y = f(a) = f(b) = z. \qquad \square$$

<u>טענה 47</u>: אם הפונקציה g היא הפונקציה ההופכית של הפונקציה f, אזי הפונקציה f היא הפונקציה ההופכית של הפונקציה g.

הוכחה: הטווח של g הוא תחום ההגדרה של f, הטווח של f הוא תחום ההגדרה של g, ולכל x בתחום ההגדרה של f מתקיים $g \circ f(x) = x$. יהי עתה x_0 מספר כלשהו בתחום ההגדרה של g, ונסמן $a = f \circ g(x_0)$. אנו רוצים להראות ש $a = x_0$. נפעיל על שני האגפים של השוויון $a = f \circ g(x_0)$ את הפונקציה g ונקבל

$$g(a) = g(f \circ g(x_0)) = g \circ f \circ g(x_0) = g \circ f(g(x_0)) = g(x_0)$$

ומאחר ש g חד חד ערכית הרי ש $g(a) = g(x_0) \Rightarrow a = x_0$. $\square$

כלומר $e^{c} = xy = e^{a}\cdot e^{b} = e^{a+b} \Leftarrow c = a + b \Leftarrow \ell n(xy) = \ell n\, x + \ell n\, y$.

ב. לסמונים הקודמים בוסיף

$\ell n\left(\frac{x}{y}\right) = $ [המספר d כך ש $e^{d} = \frac{x}{y}$]

כלומר

$e^{d} = \frac{x}{y} = \frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b} \Leftarrow d = a - b \Leftarrow \ell n\left(\frac{x}{y}\right) = \ell n\, x - \ell n\, y$. □

<u>הגדרה 50</u>: יהי $a > 0$ ויהי x מספר כלשהו. המספר a^{x} (a בחזקת x) יהיה

$$a^{x} = (e^{\ell n\, a})^{x} = e^{x\, \ell n\, a}$$

כאשר $e^{x\, \ell n\, a}$ הוגדר בפרק א' הגדרה 51.

<u>טענה 51</u>: $\ell n(x^{a}) = a\, \ell n\, x$

הוכחה: [המספר y כך ש $e^{y} = x^{a}$] $= \ell n(x^{a})$, כלומר y הוא המספר שמקיים $e^{y} = e^{a\, \ell n\, x}$,
ולכן y מקיים גם $y = a\, \ell n\, x$. כלומר

$\ell n(x^{a}) = y = a\, \ell n\, x$. □

נסיים סעיף זה הדן בהרכבת פונקציות בטענה הבאה:

<u>טענה 52</u>: תהיינה f ו g שתי פונקציות. אם הפונקציה f רציפה בנקודה a, והפונקציה g רציפה בנקודה $f(a)$, אזי גם הפונקציה $g \circ f$ רציפה בנקודה a.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. מאחר שהפונקציה g רציפה בנקודה $f(a)$ הרי שקיים $\gamma_{\varepsilon} > 0$ כך שלכל x שמקיים $|x - f(a)| < \gamma_{\varepsilon}$ מתקיים $|g(x) - g(f(a))| < \varepsilon$.

מאחר שהפונקציה f רציפה בנקודה a הרי שקיים $\delta_{\gamma_{\varepsilon}}$ כך שלכל x שמקיים $|x - a| < \delta_{\gamma_{\varepsilon}}$

מתקיים $|f(x) - f(a)| < \gamma_{\varepsilon}$, ולפי האמור לעיל לכל x כזה מתקיים

$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$, או $|g \circ f(x) - g \circ f(a)| < \varepsilon$. □

דוגמה 53: שתי הפונקציות $f:(1,\infty) \to R$ הנתונה ע"י $f(x) = \frac{1}{x}$ ו $g:R \to R$ הנתונה ע"י $g(y) = e^y$ רציפות, ולכן לפי הטענה הקודמת רציפה גם הפונקציה h שתחום הגדרתה הוא הקרן $(1,\infty)$ והנתונה ע"י $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

נביא עתה טענה הדבה בהתכנסות סדרות, ואשר הוכחתה דומה להוכחת טענה 52.

טענה 52-1: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לגבול a. אם הפונקציה f רציפה בנקודה a אזי הסדרה $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $f(a)$.

סעיף 7: משפט ערך הביניים

טענה 54: אם הפונקציה f, הרציפה בקטע $[a,b]$, מקיימת $f(a) > 0$ ו $f(b) < 0$, אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש $f(c) = 0$.

הוכחה: נגדיר באינדוקציה שתי סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא.

$a_1 = a$, $b_1 = b$, וברור ש $a_1 < b_1$, וכן $f(a_1) > 0 > f(b_1)$.

נניח שכבר הגדרנו את האיברים $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ כאשר לכל $1 \le i \le n$ מתקיים

א. $a_i < b_i$

ב. $f(a_i) > 0$, $f(b_i) < 0$.

נגדיר עתה את a_{n+1} ואת b_{n+1}. לגבי המספר $\frac{a_n + b_n}{2}$ קיימות שלוש אפשרויות

1. $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$ ואז גמרנו, שהרי מצאנו נקודה בקטע (a,b) בה הפונקציה מתאפסת.

.2 $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$ ואז נגדיר $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$.

.3 $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$ ואז נגדיר $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

כפי שקל לראות, שני התנאים שבהנחת האינדוקציה (א' ו ב' דלעיל) מתקיימים גם עבור a_{n+1} ו b_{n+1}.

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה, הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה יורדת, ולכל n מתקיים $b_n > a_n$. לכל n מתקיים גם

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

ולכן

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a) \to 0$$

כפי שאנו רואים מתקיימים תנאי הלמה של קנטור (פרק א' טענה 42), ולכן קיימת נקודה (יחידה) c כך ש $a_n \to c$ וגם $b_n \to c$. מאחר ש f רציפה בקטע $[a,b]$ ו c נמצאת בקטע זה הרי ש $f(a_n) \to f(c)$ וכן $f(b_n) \to f(c)$. מאחר שלכל n $f(a_n) > 0$ הרי שלפי טענה 27 שבפרק א' מתקיים גם $f(c) \geq 0$, ומאחר שלכל n $f(b_n) < 0$ הרי שלפי אותה טענה מתקיים גם $f(c) \leq 0$. משתי מסקנות אלו נקבל $f(c) = 0$. □

במילים אחרות, בנינו סדרת קטעים המוכלים זה בזה שאורכיהם מתכנסים לאפס, ולכל אחד מהם התכונה שבקצהו השמאלי ערך הפונקציה גדול מאפס, ובקצהו הימני ערכה קטן מאפס. בנקודה c, היחידה הנמצאת בכל הקטעים, מתקיים $f(c) = 0$.

נכליל את הטענה האחרונה

<u>משפט 55</u> (משפט ערך הביניים): אם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, ומתקיים $f(a) > f(b)$, אזי לכל M כך ש $f(a) > M > f(b)$ קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש $f(c) = M$.

הוכחה: הפונקציה g הנתונה ע"י $g(x) = M$ הינה פונקציה רציפה, ולכן לפי טענה 40 הפונקציה $f - g$ רציפה אף היא. בנקודה a מתקיים

$$(f - g)(a) = f(a) - g(a) = f(a) - M > 0$$

בנקודה b מתקיים

$$(f - g)(b) = f(b) - g(b) = f(b) - M < 0$$

לפי טענה 54 קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש $(f - g)(c) = 0$ או

$$0 = (f - g)(c) = f(c) - g(c) = f(c) - M \Rightarrow f(c) = M \quad \square$$

<u>מסקנה:</u> אם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ ומתקיים $f(a) < f(b)$ אזי לכל M כך ש $f(a) < M < f(b)$ קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש $f(c) = M$.

הוכחה: הפונקציה $-f$ מקיימת את תנאי משפט 55, ובנוסף לכך $-f(a) > -M > -f(b)$, ולכן קיימת נקודה c כך ש $-f(c) = -M$, או $f(c) = M$.

משפט 55 נקרא בשם משפט ערך הביניים משום שהוא טוען שהפונקציה f הרציפה בקטע $[a,b]$ מקבלת בקטע כל ערך בין $f(a)$ ל $f(b)$. משפט זה, למרות שהוא לכאורה מובן מאליו, הוא משפט יסודי ביותר, וטענות רבות בכלכלה מוכחות בעזרתו. השמוש בו נפוץ עד כדי כך, שפעמים רבות כלל לא טורחים לציין שמשתמשים בו. לדוגמה, המסקנה מדוגמה 56 ג' שבהמשך נלמדת בדרך כלל ללא ציון העובדה שהיא מסתמכת על משפט 55.

נביא עתה מספר מסקנות כלכליות ומתמטיות מהמשפט האחרון.

<u>דוגמה 56:</u>

א. בעיין בשוק למוצר בו מתקיים

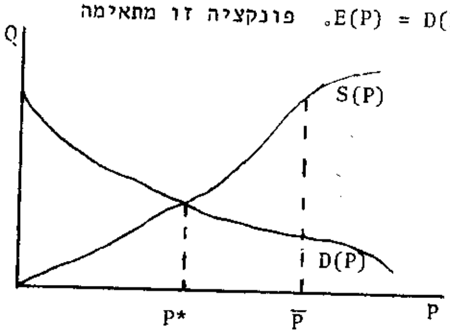
1) קיימת פונקצית בקוש רציפה $D(P)$ (הבקוש כפונקציה של המחיר), וקיימת פונקצית היצע רציפה $S(P)$ (היצע כפונקציה של המחיר).

2) $D(0) > S(0)$.

3) קיים מחיר $\overline{P}$ כך ש $D(\overline{P}) < S(\overline{P})$.

בתנאים אלו קיים מחיר P^* כך ש $D(P^*) = S(P^*)$. מחיר זה יקרא מחיר שווי משקל.

הוכחה: נעיין בפונקצית עודף הבקוש $E(P) = D(P) - S(P)$. פונקציה זו מתאימה לכל מחיר P את ההפרש בין הכמות המבוקשת והכמות המוצעת במחיר זה. כאשר $E(P) < 0$ נאמר ששורר בשוק עודף היצע, וכאשר $E(P) > 0$ נאמר ששורר בשוק עודף ביקוש. מאחר שהפונקציות S ו D רציפות הרי שגם הפונקציה E רציפה, ומתקיים $E(0) > 0$ ו $E(\overline{P}) < 0$. לפי משפט ערך הבינים

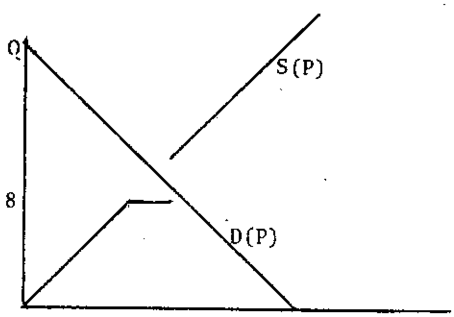


ציור 13

קיימת נקודה P^* , $0 < P^* < P$, כך ש $E(P^*) = 0$, או $D(P^*) = S(P^*)$ (עיין ציור 13).

ב. נביא עתה דוגמה לשוק בו לא קיים מחיר שווי משקל. פונקצית הביקוש $D:[0,20] \to R$ נתונה ע"י $D(P) = 20 - P$, ואילו פונקצית ההיצע $S:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י

$$S(P) = \begin{cases} P & P \le 8 \\ 8 & 8 < P \le 11 \\ p & p > 11 \end{cases}$$



ציור 14

לא קיים מחיר P^* כך ש $D(P^*) = S(P^*)$ ולכן לא קיימת נקודת שווי משקל. שתי הפונקציות מתוארות בציור 14. שים לב שבניגוד לרגיל ציירנו את המחירים על הציר האופקי ואת הכמויות על הציר האנכי.

ג. נניח שהוצאות הממשלה קבועות ברמה $G_o > 0$. תקבולי הממשלה לעומת זאת הינם פונקציה רציפה של ההכנסה הלאומית, והם עולים ככל שהיא עולה. אם במצב של תעסוקת אפס ההכנסות ממיסים הן אפס, ובמצב של תעסוקה מלאה ההכנסות ממיסים גדולות מ G_o, ואם בנוסף לכך ההכנסה הלאומית הינה פונקציה רציפה של רמת התעסוקה, אזי קיימת רמת תעסוקה בה תקציב הממשלה מאוזן.

הוכחה: מטענה 52 נובע שתקבולי הממשלה הינם פונקציה רציפה של רמת התעסוקה. הטענה זהה אם כן למסקנה שהובאה אחרי משפט 55.

ד. אם הפונקציה f היא פונקציה רציפה שתחום הגדרתה הוא הקטע $[0,1]$ והטווח שלה אף הוא הקטע $[0,1]$, אזי קיימת נקודה c בקטע כך ש $f(c) = c$.

הוכחה: אם $f(0) = 0$ או $f(1) = 1$ גמרנו. בכל מקרה אחר חייב להתקיים $f(0) > 0$ ו $f(1) < 1$, שהרי לכל נקודה x בקטע מתקיים $0 \le f(x) \le 1$.
תהי $g:[0,1] \to R$ פונקציה הנתונה ע"י $g(x) = x$, ונעיין בפונקציה $f - g$.
מאחר ששתי הפונקציות f ו g רציפות הרי שגם הפונקציה $f - g$ רציפה, ומתקיים

$$(f - g)(0) = f(0) - g(0) = f(0) - 0 > 0$$

$$(f - g)(1) = f(1) - g(1) = f(1) - 1 < 0$$

לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c \in (0,1)$ כך ש $(f - g)(c) = 0$ או

$$0 = (f - g)(c) = f(c) - g(c) = f(c) - c \Rightarrow f(c) = c$$

הערה: הנקודה c נקראת נקודת שֶבֶת של הפונקציה f.

ה. טענה: למשוואה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ קיים פתרון ממשי.

לפני שנוכיח טענה זו נציין שלמשוואה ריבועית לא קיים בהכרח פתרון ממשי, למשוואה $x^2 + x + 1 = 0$ למשל אין פתרון כזה.

נוכיח עתה את הטענה:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = x^3\left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right)$$

כפי שקל לראות $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{x^2} = 0$ ו $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{d}{x^3} = 0$,

ולכן $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right) = 1$, ומאחר ש $x^3 \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ הרי

ש $x^3\left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$. באותו אופן $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{b}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x^2} = 0$

ו $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{d}{x^3} = 0$, ולכן $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right) = 1$, ומאחר ש $x^3 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

הרי ש $x^3\left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

קיימות איפוא שתי נקודות x_0 ו y_0 כך ש $x_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d < 0$

ואילו $y_0^3 + by_0^2 + cy_0 + d > 0$. לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $z \in [x_0, y_0]$

כך ש $z^3 + bz^2 + cz + d = 0$.

סעיף 8: מכסימום ומינימום של פונקציה רציפה

בעיות רבות בכלכלה קשורות בבעית מציאת מכסימום או מינימום. פירמה מעונינת להביא למכסימום את רווחיה, ממשלה מעונינת לקיים את שרותיה במינימום הוצאות, פרט מעונין להביא למכסימום את רווחתו (במגבלת הכנסתו), ועוד. בסעיף זה נביא שתי טענות העוסקות בנושא זה.

טענה 57: אם הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אזי היא חסומה בו.

הוכחה: נניח בשלילה שהפונקציה f אינה חסומה בקטע, ואז לכל מספר טבעי n קיימת נקודה x_n כך ש $f(x_n) > n$. הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת נקודות על הישר הנמצאת כולה בין a ו b, וכסדרה חסומה בקטע קיימת לה לפי משפט בולצנו-ויירשטראס (פרק א משפט 47) תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול c בקטע. מאחר שהפונקציה f רציפה ו $x_{n_k} \to c$ הרי שהסדרה $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת, וגבולה הוא $f(c)$. לפי פרק א' טענה 21 סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה, ולכן קיים M כך שלכל k מתקיים $|f(x_{n_k})| \le M$, בסתירה לדרך בה בנינו את הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שהרי עבור $k > M$ נקבל

$$f(x_{n_k}) > n_k \ge k > M. \qquad \square$$

בטענה 57 דרשנו שהקטע $[a,b]$ יהיה סגור. נראה עתה ע"י דוגמה נגדית שדרישה זו אכן נחוצה.

דוגמה 58: $f:(0,1) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \frac{1}{x}$. כפי שכבר ראינו פונקציה זו רציפה, ואינה חסומה בקטע.

הגדרה 59: אנו נאמר שהפונקציה f מקבלת מכסימום בקטע $[a,b]$, אם קיימת נקודה c בקטע כך שלכל נקודה $x \in [a,b]$ מתקיים $f(c) \ge f(x)$.
אנו נאמר שהפונקציה f מקבלת מינימום בקטע $[a,b]$, אם קיימת נקודה c בקטע כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(c) \le f(x)$.

<u>משפט 60</u>: אם הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אזי היא מקבלת מכסימום בקטע.

הוכחה: לפי טענה 57 אם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ אזי היא חסומה בו.
נסמן ב M את המספר הקטן ביותר שמקיים $f(x) \leq M$ לכל $x \in [a,b]$ (עיין הערה בעמ' 29), ונוכיח כעת שקיים $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) = M$. מאחר ש M הוא המספר הקטן ביותר בעל התכונה הנ"ל, הרי שהמספר $M - \frac{1}{n}$ (n - מספר טבעי כלשהו) לא מקיים זאת. כלומר, קיימת נקודה x_n בקטע כך ש $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ נמצאת כולה בקטע $[a,b]$, ולכן היא חסומה בו, ולפי משפט בולצנו-ויירשטראס קיימת לה תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול c בקטע. מאחר שהפונקציה f רציפה הרי שגם הסדרה $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת, וגבולה הוא $f(c)$. לכל k מתקיים $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$, ולכן ממשפט הסנדויץ לסדרות (פרק א' טענה 26) ומהעובדה ש $M - \frac{1}{n_k} \to M$ נקבל ש $f(x_{n_k}) \to M$, כלומר $f(c) = M$.
מאחר שלפי הגדרתו של M לכל נקודה x שבקטע מתקיים $f(x) \leq M$ הרי שלכל x שכזה מתקיים $f(c) \geq f(x)$, כלומר הפונקציה f מקבלת מכסימום בקטע בנקודה c. □

<u>מסקנה</u>: אם הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אזי היא מקבלת בו מינימום.

הוכחה: הפונקציה $-f$ אף היא פונקציה רציפה (שהרי $-f = 0 - f$) ולכן לפי משפט 60, היא מקבלת בקטע מכסימום. קיימת איפוא נקודה $c \in [a,b]$ כך שלכל נקודה x שבקטע מתקיים $-f(c) \geq -f(x)$ או $f(c) \leq f(x)$, כלומר f מקבלת מינימום בקטע בנקודה c.

במשפט 60 דרשנו שתי דרישות. א. שהקטע יהיה סגור. ב. שהפונקציה תהיה רציפה.
נראה עתה ע"י דוגמאות נגדיות ששתי הדרישות אמנם הכרחיות.

דוגמה 61:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x$. הפונקציה f רציפה, ובפרט היא רציפה בקטע הפתוח $(0,1)$. למרות זאת היא אינה מקבלת מכסימום בקטע, שהרי לכל נקודה $x \in (0,1)$ מתקיים $x < 1$, ולכן הנקודה $y = \frac{x+1}{2}$ מקיימת $y \in (0,1)$ וכן $f(y) > f(x)$.

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x)=x - [x]$. הפונקציה f אינה רציפה בקטע הסגור $\left[\frac{1}{2} , \frac{5}{4}\right]$, ואף אינה מקבלת בו מכסימום. בוכיח זאת בדרך השלילה. בניח שהיתה נקודה $c \in \left[\frac{1}{2} , \frac{5}{4}\right]$ כך שלכל נקודה x שבקטע היה מתקיים $f(c) \geq f(x)$. אם $c \geq 1$ אזי $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(c)$, ואם $c < 1$ אזי $f\left(\frac{c+1}{2}\right) > f(c)$, ולכן לא קיימת נקודה c כזאת.

פרק ג׳ - ה נ ג ז ר ת

סעיף 1: דוגמאות

דוגמה 1:

א. הספק של פועל מוגדר כתפוקתו ליחידת זמן. לדוגמה, אם פועל עובד בקצב קבוע במשך 8 שעות, ומיצר 72 ברגים, אזי ההספק שלו הוא $9 = \frac{72}{8}$ ברגים לשעה. דרך חשוב זו נכונה כאשר קצב העבודה קבוע. כיצד נגדיר הספק כאשר המצב איננו כזה?

נניח שפונקצית היצור של הפועל היא $y = f(t)$, כאשר y הוא מספר הברגים שיוצרו עד זמן t שעות. y לא חייב להיות מספר שלם; $y = 3.7$ פרושו שיוצרו 3 ברגים, והושלמו $\frac{7}{10}$ מהעבודה הדרושה ליצור הבורג הרביעי.

נבחר עתה בקודת זמן כלשהי, למשל $t = 2$ שעות. ההספק הממוצע בשעה השלישית הוא התפוקה המיוצרת בשעה השלישית, מחולקת במשך הזמן הדרוש ליצור תפוקה זו. במקרה שלנו הכמות המיוצרת במשך השעה השלישית היא $f(3) - f(2)$, ומשך הזמן הוא כמובן 3-2, ולכן ההספק הממוצע במשך השעה השלישית הוא $\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$.

באופן דומה, ההספק הממוצע ברוח הזמן $\left[2, 2\frac{1}{3}\right]$ הוא $\frac{f\left(2\frac{1}{3}\right) - f(2)}{2\frac{1}{3} - 2}$ או $\frac{f\left(2\frac{1}{3}\right) - f(2)}{\frac{1}{3}}$. באופן כללי, ההספק הממוצע ברוח הזמן $[2, 2 + t_0]$ הוא

$$\frac{f(2 + t_0) - f(2)}{2 + t_0 - 2} = \frac{f(2 + t_0) - f(2)}{t_0}$$

באותה דרך, ההספק הממוצע ברוח הזמן $[2 - t_0', 2]$ הוא $\frac{f(2) - f(2 - t_0')}{t_0'}$

ואם נסמן $t_0 = -t_0'$ ונכפיל את המונה ואת המכנה ב-(-1) נקבל שההספק הממוצע ברוח הזמן $[2 + t_0, 2]$ הוא $\frac{f(2 + t_0) - f(2)}{t_0}$.

ברור שככל שהספק במדד ברוח זמן קטן יותר, הוא מבטא ביתר אמינות את הספק הפועל במשך תקופה זו. ניתן איפוא ל t_0 לשאוף לאפס. אם הגבול

$\lim_{t_0 \to 0} \frac{f(2 + t_0) - f(2)}{t_0}$ קיים אזי נקרא לו ההספק של הפועל בנקודה הזמן $t = 2$.

נניח למשל ש $f(t) = \sqrt{t}$. כלומר, אחרי שעה ייוצר בורג אחד, אחרי 4 שעות שני ברגים וכו'. ועתה

$$\lim_{t_0 \to 0} \frac{f(2 + t_0) - f(2)}{t_0} =$$

$$\lim_{t_0 \to 0} \frac{\sqrt{2 + t_0} - \sqrt{2}}{t_0} =$$

$$\lim_{t_0 \to 0} \frac{(\sqrt{2 + t_0} - \sqrt{2})(\sqrt{2 + t_0} + \sqrt{2})}{t_0(\sqrt{2 + t_0} + \sqrt{2})} =$$

$$\lim_{t_0 \to 0} \frac{(\sqrt{2 + t_0})^2 - (\sqrt{2})^2}{t_0(\sqrt{2 + t_0} + \sqrt{2})} =$$

$$\lim_{t_0 \to 0} \frac{2 + t_0 - 2}{t_0(\sqrt{2 + t_0} + \sqrt{2})} =$$

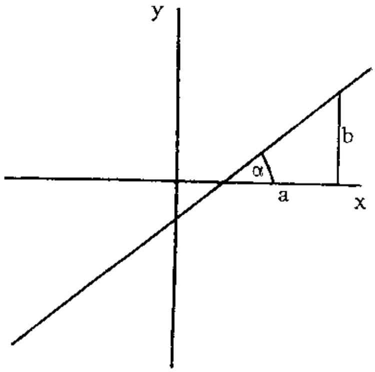
$$\lim_{t_0 \to 0} \frac{1}{\sqrt{2 + t_0} + \sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

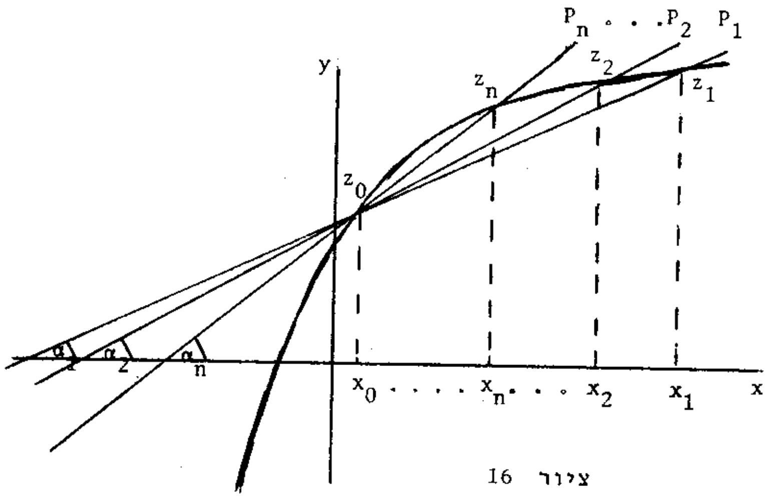
בסוף השעה השניה בוכל אם כן לומר שההספק הממוצע של הפועל הוא $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ברגים לשעה.

ב. שפועו של קו ישר כלשהו הוא טנגנס הזווית שהוא יוצר עם הכוון החיובי של ציר ה x, למשל $\frac{b}{a}$ בציור 15.

בציור 16 מצוייר הגרף של הפונקציה הרציפה f. מהו שפוע הגרף בנקודה x_0?



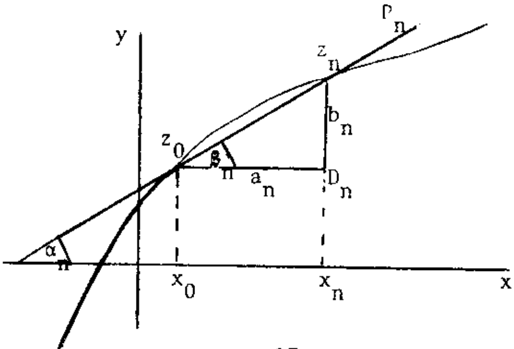
ציור 15



ציור 16

נבחר סדרת נקודות $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n $x_n \neq x_0$ אבל $x_n \to x_0$. לכל n נתאים את הקו P_n העובר דרך שתי הנקודות על גרף הפונקציה המתאימות ל x_0 ול x_n (z_0 ו z_n שבציור 16). קו זה יוצר עם הכוון החיובי של ציר ה x את הזווית α_n ולכן שפועו הוא $tg\alpha_n$. הקטע a_n שבציור 17 מקביל לציר ה x, ומאחר ש β_n ו α_n הן זוויות חד צדדיות הרי ש $\beta_n = \alpha_n$, ולכן שפוע הקו P_n שווה ל $tg\beta_n$.

המשולש $z_nD_nz_0$ שבציור 17 הוא משולש ישר זווית ב D_n, ולכן $tg\beta_n = \frac{b_n}{a_n}$.



ציור 17

כפי שקל לראות $b_n = f(x_n) - f(x_0)$,
ואילו $a_n = x_n - x_o$, ולכן
$\frac{b_n}{a_n} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$. בסמן
$x_n = x_0 + h_n$, וברור ש $x_n \to x_0$
אם ורק אם $h_n \to 0$. אם נציב
את $x_n = x_0 + h_n$ בבטוי הקודם
נקבל ששפוע הקו P_n הוא $\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$. אם קיים הגבול

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ אזי נאמר שהשפוע של גרף הפונקציה f בנקודה x_0 מוגדר ושווה לגבול זה.

אנו רואים איפוא שמשתי בעיות שונות לחלוטין הגענו בסופו של דבר לאותה בעיה, דהיינו, האם קיים הגבול $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. גבול זה (אם הוא קיים) יכונה בשם המספר הנגזר של הפונקציה בנקודה x_0, ועל חשיבותו הרבה של מושג זה נעמוד בפרק זה ובבאים אחריו.

<u>סעיף 2: הנגזרת</u>

<u>הגדרה 2</u>: תהי A קבוצה של נקודות על הישר הממשי. הנקודה x_0 תקרא נקודה פנימית של הקבוצה A אם

א. $x_0 \in A$

ב. קיים $h > 0$ כך ש $(x_0 - h, x_0 + h) \subset A$.

הנקודה x_0 תקרא נקודת קצה של A אם $x_0 \in A$ אבל x_0 איננה נקודה פנימית של A.

<u>דוגמה 3</u>: A היא אוסף הנקודות הנמצאות בקרן $(-\infty,1]$ ובקטע $[5,8)$. נקודות הקצה של A הן 1 ו 8, ושאר הנקודות שב A הן נקודות פנימיות.

נפנה עתה ונגדיר בצורה מדויקת את מושג הנגזרת. מכאן ואילך אם נכתוב סתם "הקטע $[a,b]$" (ולא "הקטע הסגור $[a,b]$") נתכוון לקטע או לקרן-סגורים, פתוחים, או חצי סגורים משמאל, או מימין, ו b ו a יכולים להיות שווים גם לאינסוף או למינוס אינסוף.

<u>הגדרה 4</u>: תהי f פונקציה המוגדרת על הקטע $[a,b]$ ותהי c נקודה פנימית בקטע (כלומר $a < c < b$). אם קיים הגבול $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ אזי נאמר שהפונקציה f גזירה בנקודה c, ולגבול המתקבל נקרא המספר הנגזר של הפונקציה f בנקודה c.

<u>הערה</u>: כזכור, $\lim\limits_{h\to 0}$ פרושו h שואף לאפס, אבל $h \neq 0$.

<u>דוגמה 5</u>: $f: R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$. נחשב את המספר הנגזר של הפונקציה f בנקודה $x = 1$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1^2 + 2h + h^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2 + h = 2$$

ובנקודה $x = -3$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-3+h)^2 - (-3)^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(-3)^2 + 2(-3)h + h^2 - (-3)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-6h + h^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} -6 + h = -6$$

<u>הגדרה 6</u>: תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$, וגזירה בכל נקודה פנימית בו.
נגדיר פונקציה חדשה על הקטע (a,b) שנסמנה f', שתקיים לכל $x \in (a,b)$

$f'(x) =$ [המספר הנגזר של f בנקודה x].

פונקציה זו תקרא בשם הנגזרת של הפונקציה f.

<u>טענה 7</u>: א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = c$ (c קבוע).

טענה: לכל x $f'(x) = 0$.

הוכחה:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

הערה: $\lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$ שהרי לכל סדרה $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n $h_n \neq 0$ אבל $h_n \to 0$
מתקיים $\frac{0}{h_n} = 0$ לכל n.

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x$.

טענה: לכל x $f'(x) = 1$.

הוכחה: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

ג. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^n$ כאשר n הוא מספר טבעי כלשהו.

טענה: לכל x $f'(x) = nx^{n-1}$.

הוכחה: לפי משפט הבינום של ניוטון (עיין בספח 2):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{h}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right] =$$

$$\binom{n}{1}x^{n-1} + \lim_{h\to 0}\binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \lim_{h\to 0}\binom{n}{n-1}xh^{n-2} + \lim_{h\to 0} h^{n-1} =$$

$$\binom{n}{1}x^{n-1} + 0 + \dots + 0 + 0 = nx^{n-1}$$

ד. $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \sqrt{x}$.

טענה: לכל $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

הוכחה:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(השווה תוצאה זו עם התוצאה שבסוף דוגמה 1 א'). □

<u>סעיף 3: גזירות ורציפות</u>

כל הפונקציות אותם גזרנו בסעיף הקודם היו פונקציות רציפות. אין זה מקרה, כפי שתוכיח הטענה הבאה:

<u>טענה 8</u>: אם הפונקציה f גזירה בנקודה x_0 אזי היא גם רציפה בה.

הוכחה: מאחר שהפונקציה f גזירה בנקודה x_0 הרי שהגבול $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים, ושווה ל $f'(x_0)$. כלומר, קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $0 < |h| < \delta_1$ מתקיים $\left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < 1$. לפי טענה 5 ה' שבפרק א' מתקיים

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| \geq \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| - \left|f'(x_0)\right|$$

ולכן לכל $0 < |h| < \delta_1$ מתקיים

$$(1) \qquad \left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right| \le \left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| + |f'(x_0)| < 1 + f'(x_0)$$

יהי עתה $\varepsilon > 0$. כדי להראות שהפונקציה f רציפה בנקודה x_0 עלינו להראות שקיים $h_\varepsilon > 0$ כך שלכל מספר x שמקיים $|x - x_0| < h_\varepsilon$ מתקיים $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

במילים אחרות, עלינו להראות שקיים $h_\varepsilon > 0$ כך שלכל מספר h שמקיים $|h| < h_\varepsilon$ מתקיים $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$. יהי אפוא $h_\varepsilon = \min\left\{\delta_1 , \frac{\varepsilon}{1 + |f'(x_0)|}\right\}$.

מאחר ש $h_\varepsilon \le \delta_1$ הרי שלכל $0 < |h| < h_\varepsilon$ מתקיים בפרט $|h| < \delta_1$ ולכן, לפי (1) דלעיל מתקיים גם

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right| < 1 + |f'(x_0)| \Rightarrow$$

$$\frac{|f(x_0 + h) - f(x_0)|}{|h|} < 1 + |f'(x_0)| \Rightarrow$$

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < |h| \, (1 + |f'(x_0)|)$$

ומאחר ש $|h| < h_\varepsilon \le \frac{\varepsilon}{1 + |f'(x_0)|}$ הרי ש

$$|h| \, (1 + |f'(x_0)|) < \frac{\varepsilon}{1 + |f'(x_0)|} (1 + |f'(x_0)|) = \varepsilon$$

מסקנה: לכל $\varepsilon > 0$ קיים h_ε כך שלכל $|h| < h_\varepsilon$ מתקיים $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$, כלומר הפונקציה f רציפה בנקודה x_0. □

הטענה ההפוכה אינה נכונה. כלומר, קיימות פונקציות רציפות שאינן גזירות.

<u>דוגמה 9:</u> $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = |x|$ (ציור 18). פונקציה זו רציפה בכל נקודה, ובפרט באפס. היא אינה גזירה באפס שהרי לכל $h > 0$ מתקיים

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1$$

ולכל $h < 0$ מתקיים

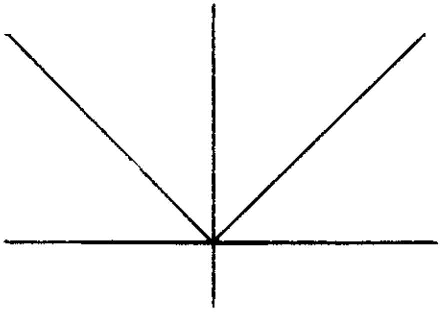
$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \frac{-h - 0}{h} = -1$$

ומאחר ש

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

הרי שהגבול $\lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$ לא קיים,

ולכן הפונקציה אינה גזירה באפס.



ציור 18

כפי שאנו רואים מהציור הבעיה מתעוררת בנקודה בה גרף הפונקציה מתאר חוד, שהרי בנקודה זו אין משמעות למושג "השפוע של גרף הפונקציה", כי אם נחזור על הדרך בה נקטנו בדוגמה 1 ב' נגלה שגבול שפועי סדרת הקווים $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ תלוי בסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המסויימת שבחרנו. אם לכל n $x_n > 0$ אזי גבול השפועים הוא 1, ואם לכל n $x_n < 0$ אזי גבול השפועים הוא 1-, ולכן אין משמעות למושג השפוע (ולכן גם לא למושג הנגזרת) בנקודת החוד.

סעיף 4: כללי גזירה

בסעיף זה נלמד מספר כללים יסודיים בגזירה שיאפשרו לנו לגזור גם פונקציות מסובכות יותר מאלו שבסעיף 2.

טענה 10: אם f ו g הן שתי פונקציות הגזירות בנקודה x_0 אזי גם הפונקציה $f + g$ גזירה בנקודה x_0, ומתקיים $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

הוכחה:

$$(f + g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad \square$$

טענה 11: אם f ו g הן שתי פונקציות הגזירות בנקודה x_0 אזי גם הפונקציה $f - g$ גזירה בנקודה x_0, ומתקיים $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

הוכחה: ההוכחה מושארת לקורא.

טענה 12: אם f ו g הן שתי פונקציות הגזירות בנקודה x_0 אזי גם הפונקציה $f\cdot g$ גזירה בנקודה x_0, ומתקיים $(f\cdot g)'(x_0) = (f\circ g')(x_0) + (f'\cdot g)(x_0)$.

הוכחה:

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x_0 + h) - (f\cdot g)(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0 + h)g(x_0) + f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\,[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)\,[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}=$$

$$f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)=(f\cdot g')(x_0)+(f'\cdot g)(x_0)$$ □

הערה: בשלב שלפני האחרון השתמשנו בעובדה שאם f גזירה היא גם רציפה (טענה 8) ולכן $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$.

מסקנה: אם הפונקציה f גזירה בנקודה x_0 ו c קבוע אזי $(c\cdot f)'(x_0)=cf'(x_0)$.

<u>דוגמה 13</u>: $f:R\to R$ נתונה ע"י $f(x)=(x+1)^n$ (n טבעי).

טענה: $f'(x)=n(x+1)^{n-1}$.

הוכחה: באינדוקציה. עבור $n=1$ הטענה טוענת ש-

$$(x+1)'=1\cdot(x+1)^0=1$$

דבר שנכון לפי טענה 10 ולפי טענה 7 א' ו ב'. נניח שהטענה נכונה עבור n, ונוכיח שהיא נכונה גם עבור $n+1$. כלומר, מתקיים $[(x+1)^n]'=n(x+1)^{n-1}$ (וכן $(x+1)'=1$), ואנו רוצים להוכיח שמתקיים $[(x+1)^{n+1}]'=(n+1)(x+1)^n$.

לפי טענה 12

$$[(x+1)^{n+1}]'=[(x+1)(x+1)^n]'=$$

$$(x+1)'(x+1)^n+(x+1)[(x+1)^n]'=1\cdot(x+1)^n+(x+1)n(x+1)^{n-1}=$$

$$(x+1)^n+n(x+1)^n=(n+1)(x+1)^n$$

דוגמה 15:

א. $$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{1\cdot(x-1) - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

ב. טענה: אם $x \neq 0$ ו n טבעי אזי $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$

הוכחה: כזכור $1' = 0$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ (טענה 7 א׳ ו ג׳) ולכן לפי טענה 14

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1'\cdot x^n - 1\cdot[x^n]'}{(x^n)^2} =$$

$$\frac{0\cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

הערה: מאחר ש $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $\frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ הרי שדוגמה 15 ב׳ מרחיבה את טענה 7 ג׳ לכל n שלם, שונה מאפס.

ג. אם הפונקציה g גזירה בנקודה x_0 ומתקיים $g(x_0) \neq 0$ אזי גם הפונקציה $\frac{1}{g(x_0)}$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים $\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

<u>טענה 16</u>: אם f ו g הן שתי פונקציות כך שהפונקציה f **גזירה** בנקודה x_0 והפונקציה g מוגדרת על הטווח של הפונקציה f וגזירה בנקודה $f(x_0)$, אזי גם הפונקציה $g \circ f$ גזירה בנקודה x_0, ומתקיים $[g \circ f(x_0)]' = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

לא נוכיח טענה זו, אולם נביא מספר מסקנות הנובעות ממנה.

<u>דוגמה 17</u>:

א. אם הפונקציה f גזירה בנקודה x_0 אזי גם הפונקציה $(f(x))^n$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים $[(f(x))^n]' = n(f(x))^{n-1}f'(x_0)$

הוכחה: $g:R \to R$ נתונה ע"י $g(y) = y^n$, ולכן $(f(x))^n = g \circ f(x)$.

לפי טענה 16

$$[(f(x))^n]' = [g \circ f(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$$n(f(x))^{n-1}f'(x)$$

ב. באותו אופן, אם הפונקציה f גזירה בנקודה x_0, ומתקיים $f(x_0) \neq 0$ אזי

$$\left[\frac{1}{(f(x_0))^n}\right]' = \frac{-nf'(x_0)}{(f(x_0))^{n+1}}$$

ג. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2 + 1$

$g:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $g(x) = \sqrt{x}$

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = [g \circ f(x)]' = g'(f(x))f'(x) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(עיין טענה 7 ד').

<u>סמון</u>: הסימון $f(x)\big|_{x = x_0}$ פרושו ערך הפונקציה f בנקודה x_0.

נביא עתה טענה ללא הוכחה.

<u>טענה 18</u>: תהי f פונקציה הפיכה. אם היא גזירה בנקודה x_0, ומתקיים $f'(x_0) \neq 0$,
אזי הפונקציה f^{-1} גזירה בנקודה $f(x_0)$, ומתקיים

$$(f^{-1}(x))'\big|_{x=f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

מסקנה מטענה 16:
$$(f^{-1}(x_0))' = \frac{1}{f'(x)\big|_{x=f^{-1}(x_0)}}$$

<u>דוגמה 19</u>: $f:(1,2) \to (1,4)$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$.
$f^{-1}:(1,4) \to (1,2)$ נתונה ע"י $f(x) = \sqrt{x}$.

כזכור, $f'(x) = 2x$. לפי המסקנה האחרונה

$$[f^{-1}(2)]' = \frac{1}{[f(f^{-1}(2))]'} = \frac{1}{f'(\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

<u>סעיף 5: גזירת הפונקציה המעריכית והלוגריתמית</u>

<u>טענה 20</u>:

א. הנגזרת של הפונקציה e^x היא e^x.

הוכחה: טענת עזר: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

הוכחת טענת העזר: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לאפס. כזכור מפרק א' טענה 52
$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$ ולכן ע"י הרכבת הפונקציה $\ell n\ x$ הרציפה בנקודה e על הסדרה
נקבל לפי טענה 52-1 שבפרק ב' כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\ln(1+a_n)=\lim_{n\to\infty}\ln(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=\ln e=1$$

נציב $h_n=\ln(1+a_n)$. כלומר, $e^{h_n}=1+a_n$, או $a_n=e^{h_n}-1$. כפי שקל
לראות $a_n\to 0 \Leftrightarrow h_n\to 0$. נציב את h_n ב $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\ln(1+a_n)=1$ ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{h_n}-1}h_n=1$$

כזכור מטענה 30 שבפרק א' אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה כך ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$
אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$, ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{h_n}-1}{h_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h_n}{e^{h_n}-1}}=\frac{1}{1}=1$$

מאחר שדבר זה נכון לכל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת לאפס הרי שלפי הגדרת גבול
הפונקציה (פרק ב' הגדרה 17) הפונקציה $\frac{e^h-1}{h}$ מתכנסת לגבול 1 בנקודה $h=0$.

נוכיח עתה את הטענה הראשית

$$(e^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{e^x}=\lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$$

ב. הנגזרת של הפונקציה $\ln x$ היא $\frac{1}{x}$.

הוכחה: נשתמש בעובדה ש $\ln x$ היא הפונקציה ההופכית של הפונקציה e^x.
בסמונים של המסקנה שבסוף הסעיף הקודם $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln x$, ולכן

$$(\ln x_0)' = \frac{1}{e^x\big|_{x=\ln x_0}} = \frac{1}{e^{\ln x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

ג. הנגזרת של הפונקציה a^x $(a > 0)$ היא $a^x \ln a$.

הוכחה: כזכור, $a^x = e^{x\ln a}$. נסמן: $g(x) = x\ln a$, $f(x) = e^x$, ואז
$a^x = f \circ g(x)$. נגזור זאת כפונקציה מורכבת ונקבל

$$(a^{x_0})' = [(f \circ g)(x_0)]' = f'(g(x_0))g'(x_0) =$$

$$e^x\big|_{x=x_0\ln a} \cdot \ln a = e^{x_0\ln a} \cdot \ln a = a^{x_0}\ln a$$

ד. הנגזרת של הפונקציה $\log_a x$ היא $\frac{1}{x\ln a}$.

הוכחה: לפי המסקנה שבסוף הסעיף הקודם מאחר ש $\log_a x$ היא הפונקציה ההופכית
של a^x הרי ש

$$(\log_a x_0)' = \frac{1}{(a^x)'\big|_{x=\log_a x_0}} = \frac{1}{a^x \ln a\big|_{x=\log_a x_0}} =$$

$$\frac{1}{\left(a^{\log_a x_0}\right)\ln a} = \frac{1}{x_0 \ln a}$$

ה. הנגזרת של הפונקציה x^t (t מספר ממשי כלשהו) היא tx^{t-1}.

הוכחה:

$$(x^t)' = ((e^{\ell n\, x})^t)' = (e^{t\ell n\, x})' =$$

$$e^{t\ell n\, x}\cdot(t\ell n\, x)' = (e^{t\ell n\, x})\frac{t}{x} = x^t\cdot\frac{t}{x} = tx^{t-1} \qquad \square$$

<u>סעיף 6: הגמישות</u>

נניח שמחיר הנסיעה בתחבורה הצבורית היא P_0, ובמחיר זה נוסעים מידי יום Q_0 נוסעים. כיצד ישפיע שנוי במחיר הנסיעה על מספר הנוסעים? ברור שתשובה כגון "אם נעלה את המחיר ב 10 אג' יקטן מספר הנוסעים באלף" אמנם עונה על השאלה, אבל בהעדר אינפורמציה נוספת על מספר הנוסעים ועל מחיר הנסיעה בהתחלה (P_0 ו Q_0) אין לתשובה זו כל משמעות, שהרי אם מחיר הנסיעה P_0 שווה ל 12 אג' ומספר הנוסעים Q_0 שווה ל 100,000 נוכל להסיק מסקנות שונות לחלוטין על מידת הזדקקותם של תושבי העיר לתחבורה צבורית, מאלו שנסיק במקרה בו המחיר P_0 שווה ל 5 ל"י ומספר הנוסעים Q_0 שווה ל 5000. ברור איפוא שמה שמעניין אותנו הוא השינוי היחסי במספר הנוסעים ביחס לשינוי היחסי במחיר. נסמן את השינוי במספר הנוסעים ב ΔQ ואת השינוי במחיר ב ΔP. אם המחיר ההתחלתי הוא P_0 אזי השינוי היחסי במחיר הוא $\frac{\Delta P}{P_0}$, ואם מספר הנוסעים ההתחלתי הוא Q_0 אזי השינוי היחסי במספרם הוא $\frac{\Delta Q}{Q_0}$, וכאמור, אנו נתעניין ביחס בין שני גדלים אלו, כלומר ביחס $\frac{\Delta Q}{Q_0}/\frac{\Delta P}{P_0}$.

מובן מאליו שמספר הנוסעים תלוי במחיר הנסיעה, ואנו נסמן קשר זה באמצעות הפונקציה $Q = f(P)$. כאשר מחיר הנסיעה הוא P_0, ומספר הנוסעים הוא Q_0, שינוי של ΔP במחיר הנסיעה יגרום לשינוי של ΔQ במספר הנוסעים. כלומר

$$Q_0 = f(P_0)$$

$$Q_0 + \Delta Q = f(P_0 + \Delta P)$$

אם נחסר את השוויון הראשון מהשני נקבל $\Delta Q = f(P_0 + \Delta P) - f(P_0)$.

נציב זאת בבטוי $\frac{\Delta Q}{Q_0} / \frac{\Delta P}{P_0}$ ונקבל $\frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0)}{f(P_0)} / \frac{\Delta P}{P_0}$ או

$\frac{P_0}{f(P_0)} \cdot \frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0)}{\Delta P}$. אם הפונקציה f גזירה בנקודה x_0 אזי כאשר ΔP מתכנס לאפס ערך הבטוי דלעיל מתכנס ל $\frac{f'(P_0)\cdot P_0}{f(P_0)}$. נגדיר איפוא

<u>הגדרה 21</u>: תהי f פונקציה הגזירה בנקודה x_0 והמקיימת $f(x_0) \neq 0$. הגמישות של הפונקציה f בנקודה זו תסומן $\eta_f(x_0)$ ותנתן ע"י $\eta_f(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot x_0}{f(x_0)}$.

הערה: שים לב לכך שהגמישות של הפונקציה f תלויה בנקודה x_0. לפונקציה η_f שהוגדרה לעיל נקרא בשם פונקצית הגמישות , וכאשר נדבר על גמישות הפונקציה f בנקודה x_0 נתכוין לערכה של הפונקציה η_f בנקודה x_0.

<u>דוגמה 22</u>:

א. $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x$

$$\eta_f(x_0) = \frac{1\cdot x_0}{x_0} = 1$$

ב. $f:[0,10) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = 10 - x$

$$\eta_f(x_0) = \frac{-1\cdot x_0}{10 - x_0} = \frac{x_0}{x_0 - 10}$$

אם בציב נקבל $\eta_f(0) = 0$, $\eta_f(5) = -1$ ו $\lim_{x\to 10^-} \eta_f(x) = -\infty$ (ציור 1-18).

ג. $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \frac{c}{x}$.

$$\eta_f(x_0) = \frac{\frac{-c}{x_0^2} \cdot x_0}{\frac{c}{x_0}} = -1$$

ד. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = e^x$

$$\eta_f(x_0) = \frac{e^{x_0} \cdot x_0}{e^{x_0}} = x_0$$

ה. $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^n$

$$\eta_f(x_0) = \frac{n x_0^{n-1} \cdot x_0}{x_0^n} = n$$

ו. $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \frac{1}{x^n}$

$$\eta_f(x_0) = \frac{\frac{-n}{x_0^{n+1}} \cdot x_0}{\frac{1}{x_0^n}} = -n$$

ז. $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \ln x$

$$\eta_f(x_0) = \frac{\frac{1}{x_0} \cdot x_0}{\ln x_0} = \frac{1}{\ln x_0}$$

ח. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = c$

$$\eta_f(x_0) = \frac{0 \cdot x_0}{c} = 0$$

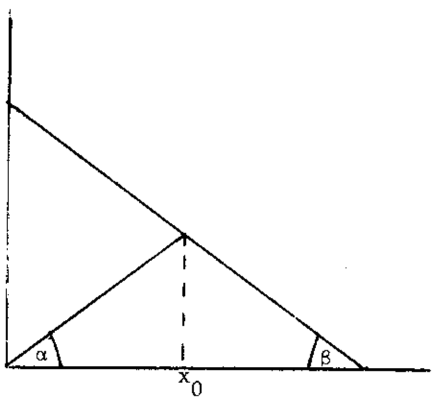
<u>טענה 23</u>: אם הגרף של הפונקציה f היא קו ישר היורד משמאל לימין כבציור 19 אזי הנקודה בה גמישות הפונקציה f שווה ל -1 היא הנקודה x_0 בה מתקיים $\alpha = \beta$

הוכחה: כפי שכבר ציינו השפוע (השווה לנגזרת) של קו ישר שווה לטנגנס הזווית שקו זה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה x,

במקרה שלנו זווית זו שווה ל $180 - \beta$,

ולכן

$$f'(x_0) = tg(180 - \beta) = -tg\beta$$



ציור 19

מתוך עיון בציור נקבל ש $\frac{x_0}{f(x_0)} = ctg\alpha$

ולכן

$$\eta_f(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot x_0}{f(x_0)} = -tg\beta \cdot ctg\alpha$$

ואם $\alpha = \beta$ נקבל

$$\eta_f(x_0) = -tg\alpha \cdot ctg\alpha = -1$$ □

<u>טענה 24</u>:

א. אם f ו g הן שתי פונקציות הגזירות בנקודה x_0 והמקיימות $f(x_0) \neq 0$ ו $g(x_0) \neq 0$,

אזי $\eta_{f \cdot g}(x_0) = \eta_f(x_0) + \eta_g(x_0)$.

הוכחה:

$$\eta_{f\cdot g}(x_0) = \frac{(f\cdot g)'(x_0)\cdot x_0}{(f\cdot g)(x_0)} =$$

$$\frac{[(f'\cdot g)(x_0) + (f\cdot g')(x_0)]\cdot x_0}{(f\cdot g)(x_0)} = \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)(x_0)\cdot x_0 =$$

$$\frac{f'(x_0)\cdot x_0}{f(x_0)} + \frac{g'(x_0)\cdot x_0}{g(x_0)} = \eta_f(x_0) + \eta_g(x_0)$$

ב. אם f ו g הן שתי פונקציות הגזירות בנקודה x_0 והמקיימות $f(x_0) \neq 0$ ו $g(x_0) \neq 0$ אזי $\eta_{\frac{f}{g}}(x_0) = \eta_f(x_0) - \eta_g(x_0)$.

הוכחה: מושארת לקורא.

ג. אם הפונקציה f גזירה בנקודה x_0 ומקיימת $f(x_0) \neq 0$ אזי לכל מספר ממשי t מתקיים $\eta_{f^t}(x_0) = t\cdot\eta_f(x_0)$

הוכחה:

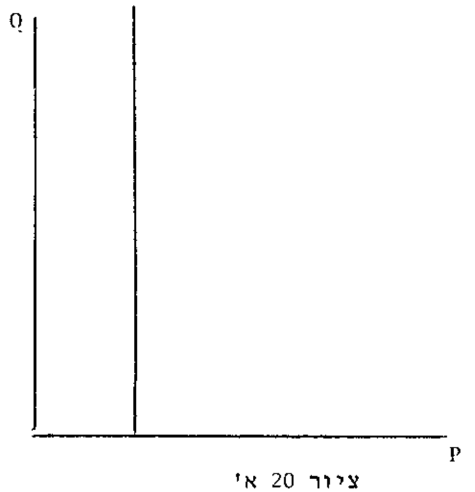
$$\eta_{f^t}(x_0) = \frac{[(f(x_0))^t]'\, x_0}{(f(x_0))^t} =$$

$$\frac{t(f(x_0))^{t-1}f'(x_0)x_0}{(f(x_0))^t} = \frac{tf'(x_0)x_0}{f(x_0)} = t\eta_f(x_0)$$

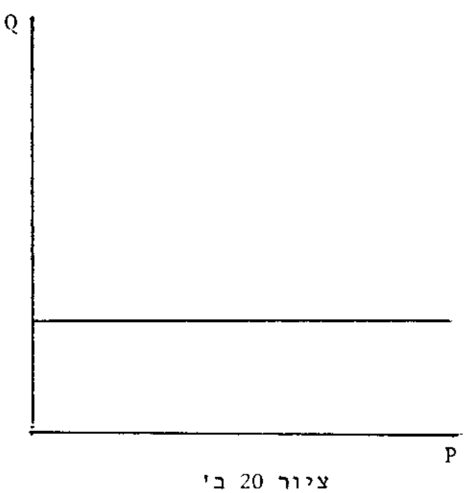
ד. אם הפונקציה f גזירה בנקודה x_0 ומקיימת $f(x_0) \neq 0$ אזי לכל מספר ממשי α מתקיים $\eta_{\alpha f}(x_0) = \eta_f(x_0)$.

הוכחה: ההוכחה נובעת מחלק א' של טענה זו ומדוגמה 22 ח'. □

הערה: בדוגמה 22 ח' דלעיל הראינו שהגמישות של הפונקציה $f(x) = c$ היא אפס, בעוד שבדרך כלל נהוג להגיד במקרים כאלו שגמישות פונקצית הביקוש היא דווקא אינסופית. ההסבר לכך הוא פשוט. כאשר אנו מדברים על פונקצית ביקוש אנו מדברים על Q כפונקציה של P, אך אנו נוהגים לצייר את P כפונקציה של Q. ואמנם, אם נהפוך את הצירים נגלה שהפונקציה בעלת הגמישות האינסופית היא זו שבה הגרף מאונך לציר האופקי והפונקציה הקשיחה (בעלת גמישות אפס) היא זו שבה הגרף מקביל לציר האפקי (ציור 20 א' ו ב').



ציור 20 א'



ציור 20 ב'

סעיף 7: משפטים יסודיים של החשבון הדיפרנציאלי

בסעיף זה נביא מספר טענות אשר בעזרתן נוכל להסיק מסקנות על פונקציה מנגזרתה.

טענה 25: אם הפונקציה f גזירה בקטע הפתוח (a,b) ומקבלת מכסימום בנקודה x_0 בקטע אזי $f'(x_0) = 0$.

הוכחה: מאחר שהפונקציה f מקבלת מכסימום בנקודה x_0 הרי שלכל $0 < h < b - x_0$ מתקיים $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ ולכן $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$.

גם לכל $a - x_0 < h < 0$ מתקיים $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ ולכן $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$.

מאחר שהפונקציה f גזירה בנקודה x_0 הרי שהגבול $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ קיים ושווה לגבולות מימין ומשמאל, כלומר

$$0 \leq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

ולכן

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = 0 \qquad \square$$

טענה 26: אם הפונקציה f גזירה בקטע הפתוח (a,b) ומקבלת מינימום בנקודה x_0 בקטע אזי $f'(x_0) = 0$.

הוכחה: הפונקציה $-f$ מקבלת מכסימום בקטע (a,b) בנקודה x_0, ולכן $(-f)'(x_0) = 0$.

$$0 = (-f(x_0))' = ((-1)f(x_0))' = (-1)f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0 \qquad \square$$

הערות:

א. התנאי ש $f'(x_0) = 0$ הוא תנאי הכרחי למכסימום או למינימום בנקודה x_0, אבל איננו תנאי מספיק. הפונקציה $f:(-1,1) \to R$ הנתונה ע"י $f(x) = x^3$ גזירה בכל נקודה בקטע, מקיימת $f'(0) = 3\cdot 0^2 = 0$, ואף על פי כן אפס איננה נקודת מקסימום ואף לא נקודת מינימום.

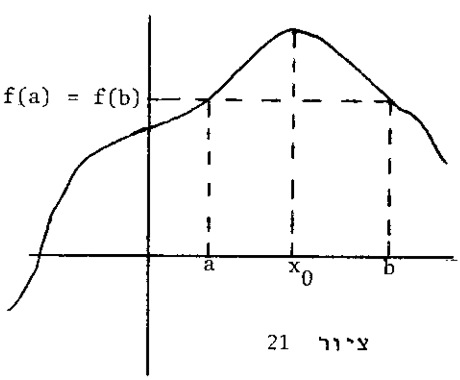
ב. בטענות 25 ו 26 דרשנו שהפונקציה תקבל מכסימום או מינימום בקטע פתוח. ואמנם, כאשר הקטע סגור,הטענה לא בהכרח נכונה. הפונקציה $f:R \to R$ הנתונה ע"י $f(x) = x$ מקבלת בקטע $[0,1]$ מכסימום בנקודה 1 ומינימום בנקודה 0, ואף על פי כן נגזרתה שווה ל 1 בכל נקודה.

<u>טענה 27</u>: הפונקציה e^x לא מקבלת מכסימום או מינימום בשום קטע פתוח.

הוכחה: הפונקציה e^x היא פונקציה גזירה,ונגזרתה היא e^x. לו היתה הפונקציה מקבלת מכסימום או מינימום בנקודה x_0 כלשהי הרי שלפי טענות 25 ו 26 היתה נגזרתה בנקודה זו שווה לאפס, בסתירה לכך שלכל x $e^x > 0$. □

<u>משפט 28 (רול):</u> אם הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, גזירה בקטע הפתוח (a,b), ו $f(a) = f(b)$, אזי יש נקודה $x_0 \in (a,b)$ כך ש $f'(x_0) = 0$ (עיין ציור 21).

הוכחה: מאחר שהפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ הרי שלפי משפט 60 שבפרק ב' קיימת נקודה $x_1 \in [a,b]$ בה הפונקציה f מקבלת מכסימום M, וקיימת נקודה $x_2 \in [a,b]$ בה הפונקציה f מקבלת מינימום m. אם $m = M$ אזי f קבועה בקטע ולפי טענה 7 א' $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a,b)$.



ציור 21

אם לא, אזי יתכנו שני מקרים:

$m \le f(a) = f(b) < M$ (1

$m < f(a) = f(b) = M$ (2

(1 מאחר ש $x_1 \in [a,b]$ אבל $f(x_1) = M > f(a) = f(b)$, הרי ש $x_1 \neq a$, וכן $x_1 \neq b$, ולכן $x_0 = x_1 \in (a,b)$, ולפי טענה 25 $f'(x_0) = 0$.

(2 מאחר ש $x_2 \in [a,b]$ אבל $f(x_2) = m < f(a) = f(b)$, הרי ש $x_2 \neq a$, וכן $x_2 \neq b$, ולכן $x_0 = x_2 \in (a,b)$, ולפי טענה 26 $f'(x_0) = 0$. □

<u>דוגמה 29</u>: בפרק ב' דוגמה 56 ה' הראינו שלמשוואה מהצורה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ קיים לפחות פתרון ממשי אחד. נראה עתה שלמשוואה מהצורה $x^3 + cx + d = 0$ כאשר $c > 0$ יש בדיוק פתרון ממשי אחד, ולא יותר.

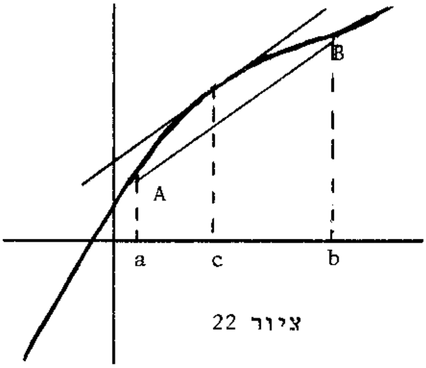
נסמן $f(x) = x^3 + cx + d$. נניח שקיים למשוואה יותר מפתרון אחד, כלומר, נניח שקיימים שני מספרים שונים x_1 ו־ x_2, $x_1 < x_2$ כך ש $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
לפי משפט רול קיימת נקודה $x_1 < x_0 < x_2$ כך ש $f'(x_0) = 0$, כלומר $3x^2 + c = 0$.
אבל אם $x^2 \ge 0$ ו $c > 0$ אזי לא יכול להתקיים $3x^2 + c = 0$.

מסקנה: קיימת רק נקודה אחת בה הפונקציה f מתאפסת.

<u>משפט 30 (לגרנז')</u>: אם הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) אזי קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

הסבר: המשפט טוען שקיימת נקודה $c \in (a,b)$ בה השפוע של הפונקציה שווה לשפוע של הקטע AB שבציור 22.



ציור 22

הוכחת המשפט: נגדיר פונקצית עזר g באופן הבא

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{(f(b) - f(a))(x - a)}{b - a} + f(a)\right].$$

קל להראות שהפונקציה g היא ההפרש בין הפונקציה f והקו הישר העובר דרך הנקודות A ו B שבציור 22.

ועתה

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{(f(b) - f(a))(a - a)}{b - a} + f(a)\right] = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{(f(b) - f(a))(b - a)}{b - a} + f(a)\right] = f(b) - f(b) = 0$$

ולכן $g(a) = g(b) = 0$. לפי הנתון הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). הקו הישר רציף אף הוא בקטע הסגור $[a,b]$ וגזיר בקטע הפתוח (a,b), ולכן גם הפונקציה g רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). לפי משפט רול קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש $g'(c) = 0$, ולכן

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \square$$

למרות שהמשפט מנוסח כך שמהפונקציה f אנו מסיקים מסקנות על נגזרתה, הרי שרוב שמושיו של המשפט יהיו בהסקת מסקנות מנגזרתה של פונקציה על הפונקציה עצמה, ובכך חשיבותו. נביא שתי דוגמאות למסקנות הנובעות ממנו.

<u>דוגמה 31:</u>

א. אם הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) ולכל $x \in (a,b)$ מתקיים $f'(x) = 0$, אזי קיים קבוע c כך ש $f(x) = c$ לכל $x \in [a,b]$.

הוכחה: אם לא, אזי יש בקטע שתי נקודות שונות c_1 ו c_2, $c_1 < c_2$ כך ש $f(c_1) \neq f(c_2)$, ולפי משפט לגרנז׳ קיימת נקודה $c_1 < c < c_2$ כך ש $0 \neq \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = f'(x)$, בסתירה לנתון.

ב. אם הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) ולכל נקודה $x \in (a,b)$ מתקיים $f'(x) = \alpha \neq 0$ אזי מתקיים $f(x) = \alpha x + \beta$ כאשר $\beta = f(a) - \alpha a$.

הוכחה: עבור $x = a$ הטענה כמובן נכונה, שהרי $f(a) = \alpha a + f(a) - \alpha a$.
יהי $a < x \leq b$. לפי משפט לגרנז׳ קיימת נקודה $a < c < x$ כך ש

$$\alpha = f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow$$

$$\alpha(x - a) = f(x) - f(a) \Rightarrow$$

$$f(x) = \alpha(x - a) + f(a) = \alpha x - \alpha a + f(a) = \alpha x + \beta$$

סעיף 8: עליה וירידה של פונקציה

טענה 32: אם הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) אזי

א. הפונקציה f עולה בקטע אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

ב. הפונקציה f יורדת בקטע אם ורק אם $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

הוכחה:

א. 1. $f' \geq 0 \Leftarrow f$ עולה.

יהיו x_1 ו x_2 שני מספרים בקטע $[a,b]$ כך ש $x_1 < x_2$. לפי משפט לגרנז' (משפט 30) קיימת נקודה $x_1 < c < x_2$ כך ש

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$, או $(x_2 - x_1)f'(c) = f(x_2) - f(x_1)$.

לפי ההנחה $f'(x) \geq 0$, וכן $x_2 - x_1 > 0$ ולכן גם $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, כלומר $f(x_2) \geq f(x_1)$.

מסקנה: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, ולכן f עולה.

2. f עולה $\Rightarrow f' \geq 0$.

אם הפונקציה f עולה אזי לכל נקודה $x_0 \in (a,b)$ ולכל $0 < h < b - x_0$ מתקיים $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$, ולכן גם $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$, ומאחר שהפונקציה f גזירה בנקודה x_0

הרי שמתקיים

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

ב. הפונקציה f יורדת אם ורק אם הפונקציה $-f$ עולה. לפי חלק א' של טענה זו הפונקציה $-f$ עולה אם ורק אם $(-f)' \geq 0$, כלומר אם ורק אם $-f' \geq 0$, דהיינו, אם ורק אם $f' \leq 0$. □

<u>טענה 33:</u> אם הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) אזי

א. אם לכל $x \in (a,b)$ מתקיים $f'(x) > 0$ אזי f עולה ממש בקטע.

ב. אם לכל $x \in (a,b)$ מתקיים $f'(x) < 0$ אזי f יורדת ממש בקטע.

הוכחה: א. יהיו x_1 ו x_2 שני מספרים בקטע $[a,b]$ כך ש $x_1 < x_2$. לפי משפט לגרנז' (משפט 30) קיימת נקודה $x_1 < c < x_2$ כך ש $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$. לפי הנתון $f'(c) > 0$, וכן $x_2 - x_1 > 0$, ולכן גם $f(x_2) - f(x_1) > 0$, או $f(x_2) > f(x_1)$.

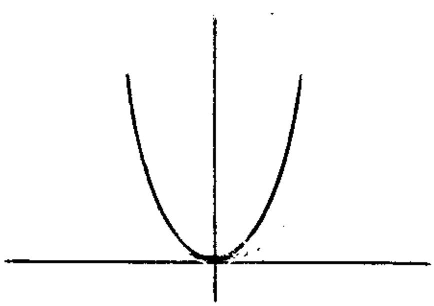
מסקנה: $x_1 < x_2 \Leftarrow f(x_2) > f(x_1)$, ולכן הפונקציה f עולה ממש.

ב. ההוכחה מושארת לקורא. □

<u>הערה:</u> הטענה ההפוכה אינה נכונה. כלומר, יכול להיות שהפונקציה f עולה ממש ואף על פי כן קיימת נקודה x_0 כך ש $f'(x_0) = 0$. לדוגמה, $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^3$. $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, ובכל זאת f עולה ממש בקטע $[-1,1]$.

<u>דוגמה 34:</u>

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$ (ציור 23).
כזכור, $f'(x) = 2x$, ולכן $f'(x) > 0$ אם ורק אם $x > 0$, ו $f'(x) < 0$ אם ורק אם $x < 0$. ואמנם, f יורדת כאשר $x < 0$ ועולה כאשר $x > 0$.



ציור 23

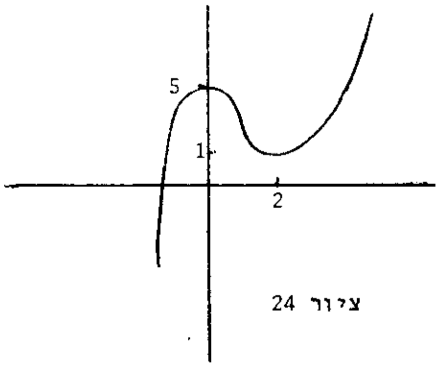
ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

(ציור 24). $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

כאשר $x < 0$ $f'(x) > 0$

$0 < x < 2$ $f'(x) < 0$

$x > 2$ $f'(x) > 0$



ציור 24

לפי הטענות דלעיל הפונקציה f עולה כאשר $0 > x$ או כאשר $2 < x$, ויורדת כאשר $0 < x < 2$.

ג. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = xe^x$

(ציור 25).

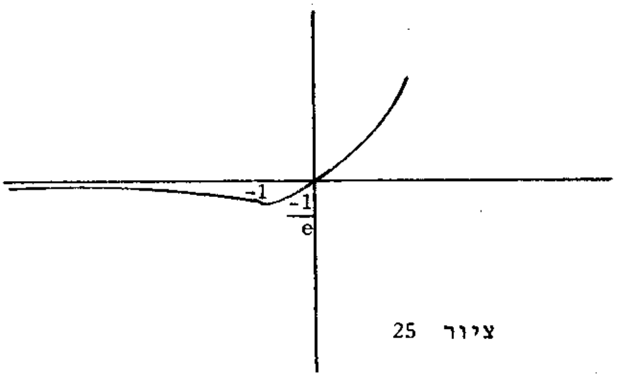
$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$.

כאשר $x < -1$ $f'(x) < 0$,

וכאשר $x > -1$ $f'(x) > 0$, ולכן

כאשר $x < -1$ הפונקציה f יורדת

וכאשר $x > -1$ הפונקציה f עולה.



ציור 25

סעיף 9: אכסטרמום של פונקציה

בפרק ב' הגדרנו נקודת מכסימום של פונקציה בקטע כנקודה x_0 כך שלכל נקודה x בקטע מתקיים $f(x_0) \geq f(x)$. נעיין שנית בפונקציה $f:R \to R$ הנתונה ע"י $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ (דוגמה 34 ב', ציור 24). הפונקציה מקבלת מכסימום בקטע $[-1,10]$ בנקודה $x_0 = 10$, ואף על פי כן ברור שבנקודה $x = 0$ "קורה משהו" הקשור אף הוא למכסימום. נגדיר אפוא:

<u>הגדרה 35</u>: תהי $f:A \to R$ פונקציה כלשהי. אנו נאמר שהפונקציה f מקבלת מכסימום לוקלי בנקודה x_0, ונקרא לנקודה x_0 נקודת מכסימום לוקלי, אם

א. x_0 היא נקודה פנימית של A.

ב. קיים $h > 0$ כך שהפונקציה f מקבלת מכסימום בקטע $(x_0 - h, x_0 + h)$ בנקודה x_0.

אנו נאמר שהפונקציה f מקבלת מינימום לוקלי בנקודה x_0, ונקרא לנקודה x_0 נקודת מינימום לוקלי, אם

א. x_0 היא נקודה פנימית של A.

ב. קיים $h > 0$ כך שהפונקציה f מקבלת מינימום בקטע $(x_0 - h, x_0 + h)$ בנקודה x_0.

נקודה $x_0 \in A$ תקרא נקודת מכסימום (מינימום) גלובלי של הפונקציה f אם לכל $x \in A$ מתקיים $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$.

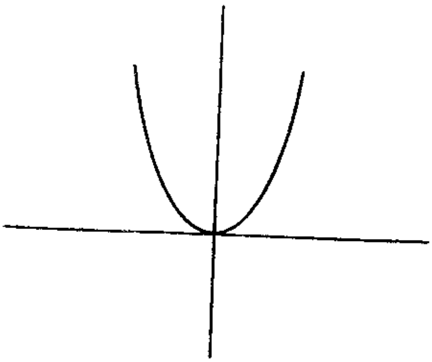
עד כה כינינו נקודות אלו בשם נקודת מכסימום ונקודת מינימום סתם, עיין בפרק ב' הגדרה 59.

נקודות מכסימום לוקלי ונקודות מינימום לוקלי של פונקציה תקראנה "נקודות אכסטרמום" או "נקודות קיצון".

הערה: נקודת מכסימום גלובלי לא חייבת להיות נקודת מכסימום לוקלי, ונקודת מינימום גלובלי לא חייבת להיות נקודת מינימום לוקלי, וזאת במקרה שהיא איננה נקודה פנימית של הקבוצה A.

דוגמה 36:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$ (ציור 26). הנקודה $x = 0$ היא נקודת מינימום גלובלי, וגם נקודת מינימום לוקלי.



ציור 26

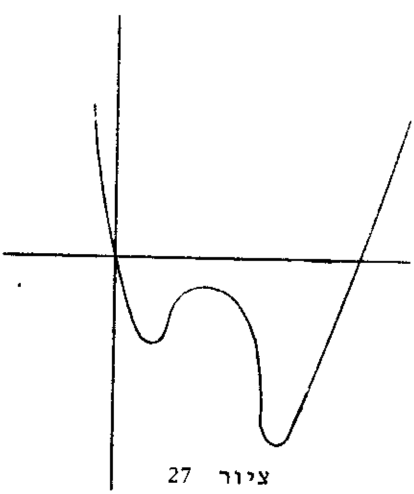
ב. $f:[-5,10] \to R$ נתונה ע"י

$$f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 84x^2 - 96x$$

(ציור 27). הנקודה $x = 2$ היא נקודת מכסימום לוקלי, אבל היא אינה נקודת מכסימום גלובלי. הנקודה $x = 10$ היא נקודת מכסימום גלובלי אבל אינה נקודת מכסימום לוקלי. הנקודה $x = 1$ היא נקודת מינימום לוקלי אבל אינה נקודת מינימום גלובלי. לבסוף, הנקודה $x = 4$ היא נקודת מינימום לוקלי וגם נקודת מינימום גלובלי.

<u>טענה 37</u>: אם הפונקציה הגזירה f מקבלת מכסימום לוקלי או מינימום לוקלי בנקודה x_0 אזי $f'(x_0) = 0$

הוכחה: נובעת מטענות 25 ו 26 דלעיל. □



ציור 27

כפי שכבר ראינו, התאפסות הנגזרת היא אמנם תנאי הכרחי למכסימום לוקלי או למינימום לוקלי, אבל היא אינה תנאי מספיק. נביא עתה תנאי מספיק.

<u>טענה 38</u>: תהי $f:A \to R$ פונקציה גזירה, ותהי x_0 נקודה פנימית של A.

א. תנאי הכרחי ומספיק לכך שהנקודה x_0 תהיה נקודת מכסימום הוא שקיים $h > 0$ כך שלכל נקודה $x \in (x_0 - h, x_0)$ מתקיים $f'(x) \geq 0$, ולכל נקודה $x \in (x_0, x_0 + h)$ מתקיים $f'(x) \leq 0$.

ב. תנאי הכרחי ומספיק לכל שהנקודה x_0 תהיה נקודת מינימום הוא שקיים $h > 0$ כך שלכל נקודה $x \in (x_0 - h, x_0)$ מתקיים $f'(x) \leq 0$, ולכל נקודה $x \in (x_0, x_0 + h)$ מתקיים $f'(x) \geq 0$.

ג. אם קיים $h > 0$ כך שלכל נקודה $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ מתקיים $f'(x) > 0$, או שלכל נקודה x בקטע מתקיים $f'(x) < 0$, אזי x_0 אינה לא נקודת מכסימום ואף לא נקודת מינימום.

הוכחה: התנאים מספיקים:

א. לפי טענה 32 הפונקציה f עולה בקטע $(x_0 - h, x_0)$ ויורדת בקטע $(x_0, x_0 + h)$, ולכן לכל $x \in (x_0 - h, x_0)$ מתקיים $f(x_0) \geq f(x)$, ואף לכל $x \in (x_0, x_0 + h)$ מתקיים $f(x_0) \geq f(x)$, ולכן x_0 היא נקודת מכסימום.

ב. ההוכחה מושארת כתרגיל.

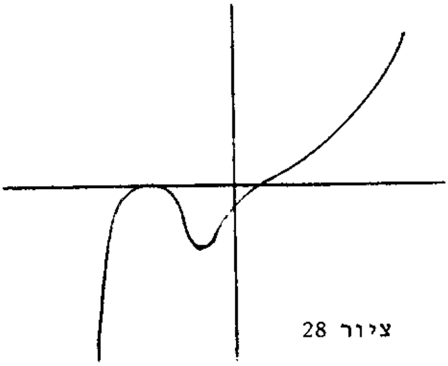
ג. כנ"ל.

התנאים הכרחיים: הדבר נובע מכך שמצבים א'-ג' כוללים את כל המצבים האפשריים. □

<u>דוגמה 39</u>: $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2$ (ציור 28).

$$f'(x) = 3(x - 1)^2(x + 1)^2 + 2(x - 1)^3(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1)(5x+1)$$

והנגזרת מתאפסת בנקודות 1, -0.2, -1.



ציור 28

בקטע $(-1.1,-1)$ $f' > 0$, ובקטע $(-1,-0.9)$
$f' < 0$, ולכן $x = -1$ היא נקודת מכסימום.

בקטע $(-0.3,-0.2)$ $f' < 0$, ובקטע $(-0.2,-0.1)$
$f' > 0$, ולכן $x = -0.2$ היא נקודת מינימום.

בקטע $(0.9,1.1)$ $f' > 0$, ולכן $x = 1$ אינה
נקודת מכסימום ואינה נקודת מינימום.

נעיין עתה שנית בתנאי המספיק למכסימום. כדי שהנקודה x_0 תהיה נקודת מכסימום מספיק שהפונקציה f' תהיה חיובית לפני הנקודה x_0, ושלילית אחריה. במילים אחרות, מספיק שהפונקציה f' תרד משמאל לימין בסביבת הנקודה x_0, ושתתאפס בנקודה x_0 עצמה. כזכור, אם נגזרתה של פונקציה שלילית הרי שהפונקציה יורדת ממש, ובמקרה שלנו, אם הפונקציה היא פונקציה גזירה הרי שתנאי מספיק לכך שהנקודה x_0 תהיה נקודת מכסימום הוא בסביבת הנקודה x_0 תהיה הנגזרת של f' שלילית, ושבנקודה x_0 עצמה f' תתאפס. לפני שננסח טענה זו באופן מדויק נגדיר את מושג הנגזרת מסדר n.

<u>הגדרה 40</u>: תהי f פונקציה גזירה. אם הפונקציה f' גזירה אזי נגזרתה תכונה בשם "הנגזרת מסדר שני של הפונקציה f", ותסומן ב f'' או ב $f^{(2)}$.

נניח שהגדרנו את הנגזרות מסדר $1,2,\dots,n-1$ של הפונקציה f. אם הנגזרת מסדר $n-1$ גזירה אזי נגזרתה תכונה בשם "הנגזרת מסדר n של הפונקציה f", ותסומן ב $f^{(n)}$.

דוגמה 41:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f^{(2)}(x) = 12x^2$$

$$f^{(3)}(x) = 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

$$f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = 0$$

ב. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^n$. כפי שקל לראות $f^{(n)}(x) = n!$.

את מה שהסברנו לעיל נוכל לנסח עתה בטענה הבאה:

טענה 42: תהי f פונקציה הגזירה פעמיים בסביבת הנקודה x_0. אם $f'(x_0) = 0$ ו $f''(x_0) < 0$ אזי x_0 היא נקודת מכסימום.

אם $f'(x_0) = 0$ ו $f''(x_0) > 0$ אזי x_0 היא נקודת מינימום.

חשיבותו של תנאי זה היא בכך שהוא נותן לנו תנאי מספיק לכך שהנקודה x_0 תהיה נקודת מכסימום או מינימום של פונקציה על סמך תכונות הפונקציה בנקודה x_0 בלבד, והוא איננו דורש מאיתנו לבדוק מה קורה בסביבתה של הנקודה.

תנאי זה הוא תנאי מספיק בלבד (ולא תנאי הכרחי), כפי שתוכיח הדוגמה הבאה.

דוגמה 43: $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^4$. הפונקציה f מקבלת מינימום בנקודה $x_0 = 0$. ואמנם, $f'(0) = 0$, ואף על פי כן $f''(0) = 0$.

את יתרת הסעיף ננצל להבאת שמושים לטענה 42.

דוגמה 44:

א. טענה: לכל $x > -1$ מתקיים $\ln(1 + x) \leq x$.

הוכחה: נתבונן בפונקציה $f:(-1,\infty)\to R$ הנתונה ע"י $f(x) = x - \ln(1 + x)$, ונחפש את הנקודות בהן הפונקציה מקבלת מינימום גלובלי. מאחר שלקרן פתוחה אין נקודות קצה, הרי שנקודת מינימום גלובלי תהיה גם נקודת מינימום לוקלי. אם בנקודה כזו הפונקציה אי-שלילית (כלומר ערכה גדול או שווה לאפס), הרי שבכל נקודה x יתקיים $f(x) \geq 0$, או $x \geq \ln(1 + x)$.

נחפש איפוא נקודות מינימום של הפונקציה f. תנאי הכרחי ראשון לכך הוא התאפסות הנגזרת הראשונה. כלומר

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{1 + x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1 = \frac{1}{1 + x} \quad \Rightarrow$$

$$1 + x = 1 \quad \Rightarrow$$

$$x = 0$$

נבדוק מהו סימנה של הנגזרת השניה בנקודה $x = 0$.

$$f''(x) = \frac{1}{(1 + x)^2} \quad \Rightarrow$$

$$f''(0) = \frac{1}{(1 + 0)^2} = 1 > 0$$

ולכן הנקודה $x = 0$ היא נקודת מינימום.

ועתה, מאחר ש

$$f(0) = 0 - \ln 1 = 0 - 0 = 0$$

הרי שלכל מספר ממשי x מתקיים $x \geq \ln(1 + x)$.

ב. פירמה מעוניינת להביא את רווחיה למכסימום. נניח שהיא מייצרת מוצר x שמחירו P_x באמצעות גורם יצור a שמחירו P_a (P_x ו P_a קבועים). פונקצית היצור $f:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $x = f(a)$, ונניח שלכל $x > 0$ מתקיים $f''(x) < 0$.
רווחיה של הפירמה כפונקציה של כמות גורם הייצור a נתונים ע"י $g(a) = P_x f(a) - P_a a$. נניח שהפונקציה g מקבלת מכסימום גלובלי. מנקודת ראות כלכלית הנחה זו סבירה למדי, שהרי אחרת נקבל פירמה עם רווח אינסופי.
נקודה כזו תהיה הנקודה $a = 0$, או נקודה פנימית. אם נניח ש $f(0) = 0$ אזי גם $g(0) = 0$, וברור שאם יש נקודה בה יש לפירמה רווח חיובי אזי הנקודה $x_0 = 0$ אינה נקודת מכסימום גלובלי. נחפש איפוא נקודות מכסימום גלובלי שהן גם נקודות פנימיות, ובמלים אחרות, נקודות שהן גם מכסימום לוקלי.

$$g(a) = P_x f(a) - P_a a$$

$$g'(a) = P_x f'(a) - P_a$$

$$g''(a) = P_x f''(a)$$

$$g'(a) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$P_x f'(a) - P_a = 0 \quad \Rightarrow$$

$$f'(a) = \frac{P_a}{P_x}$$

$$g''(0) = P_x f''(a) < 0 \qquad \text{(לפי ההנחה)}$$

מסקנה: מכסימום רווח מתקבל כאשר $f'(a) = \frac{P_a}{P_x}$.

נביא עתה דוגמה לפונקצית ייצור של פירמה.
$f:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(a) = 10\sqrt{a}$.

$$f'(a) = \frac{10}{2\sqrt{a}} = \frac{5}{\sqrt{a}}$$

$$f''(a) = -\frac{2.5}{a\sqrt{a}} < 0$$

ולכן נקודת מכסימום רווח תהיה הנקודה בה מתקיים $\frac{5}{\sqrt{a}} = \frac{P_a}{P_x}$, או $a = \frac{25P_x^2}{P_a^2}$.

ג. טענה: לכל p מתקיים $p(1 - p) \le 0.25$

הוכחה: נסמן $f(p) = p(1 - p)$, ונחפש נקודת מכסימום גלובלי, שכפי שכבר ציינו חייבת להיות נקודת מכסימום לוקלי.

$$f'(p) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1 - p - p = 0 \quad \Rightarrow$$

$$p = 0.5$$

$$f''(p) = -2 < 0$$

ולכן הנקודה $p = 0.5$ היא נקודת מכסימום.

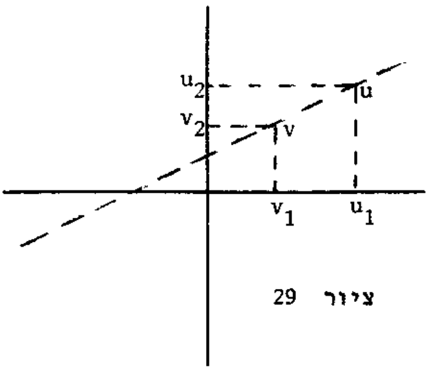
$f(0.5) = 0.25$ ולכן לכל p מתקיים $p(1 - p) \le 0.25$.

מסקנה פשוטה מהטענה האחרונה היא שאם a הוא מספר חיובי כלשהו,אזי המכפלה $x(a - x)$ מקבלת מכסימום כאשר $x = a - x = 0.5a$. מכך ניתן למשל להסיק שמכל החצרות בעלות היקף נתון, החצר בעלת השטח המכסימלי היא החצר בעלת צורת ריבוע.

סעיף 10: פונקציות קמורות וקעורות

תהיינה $u = (u_1,u_2)$ ו $v = (v_1,v_2)$* שתי נקודות במישור xy, כמוראה בציור 29.
מהי משוואת הקו הישר העובר דרך שתי הנקודות הללו?

כידוע, נוסחתו של קו במישור היא $y = ax + b$.
שתי הנקודות u ו v נמצאות על הקו המבוקש, ולכן
מתקיים



ציור 29

$$(1) \quad u_2 = au_1 + b$$

$$(2) \quad v_2 = av_1 + b$$

קיבלנו איפוא שתי משוואות עם שני נעלמים
(a ו b). נפתור אותן ונקבל

$$a = \frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$$

$$b = \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{u_1 - v_1}$$

<u>טענה 45</u>: אם הנקודה $w = (w_1,w_2)$ נמצאת על הקו הישר $y = ax + b$ העובר
דרך שתי הנקודות u ו v (כלומר, אם מתקיים $w_2 = aw_1 + b$) אזי
קיים מספר ממשי λ כך ש

$$w_1 = \lambda u_1 + (1 - \lambda)v_1$$

$$w_2 = \lambda u_2 + (1 - \lambda)v_2$$

או בסימון מקוצר $\quad w = \lambda u + (1 - \lambda)v$

---

* בלי הגבלת הכלליות נניח ש $u_1 > v_1$. אם $u_1 = v_1$ אין לדיון משמעות, ואם $u_1 < v_1$
נוכל להפוך את הסימנים.

הוכחה: נסמן: $\lambda = \dfrac{w_1 - v_1}{u_1 - v_1}$; ועתה

$$\lambda u_1 + (1 - \lambda)v_1 = \left(\frac{w_1 - v_1}{u_1 - v_1}\right) u_1 + \left(1 - \frac{w_1 - v_1}{u_1 - v_1}\right) v_1 =$$

$$\frac{w_1u_1 - v_1u_1 + u_1v_1 - v_1^2 - w_1v_1 + v_1^2}{u_1 - v_1} = \frac{w_1(u_1 - v_1)}{u_1 - v_1} = w_1$$

כזכור, אם הקו $y = ax + b$ עובר דרך שתי הנקודות u ו v אזי

$$a = \frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1} \quad , \quad b = \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{u_1 - v_1}$$

מאחר שגם הנקודה w נמצאת על קו ישר זה מתקיים $w_2 = aw_1 + b$, או

$$w_2 = \left(\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}\right) w_1 + \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{u_1 - v_1} =$$

$$\frac{w_1u_2 - v_1u_2}{u_1 - v_1} + \frac{u_1v_2 - v_1v_2 - w_1v_2 + v_1v_2}{u_1 - v_1} =$$

$$\left(\frac{w_1 - v_1}{u_1 - v_1}\right)u_2 + \left(1 - \frac{w_1 - v_1}{u_1 - v_1}\right) v_2 = \lambda u_2 + (1 - \lambda)v_2 \qquad \square$$

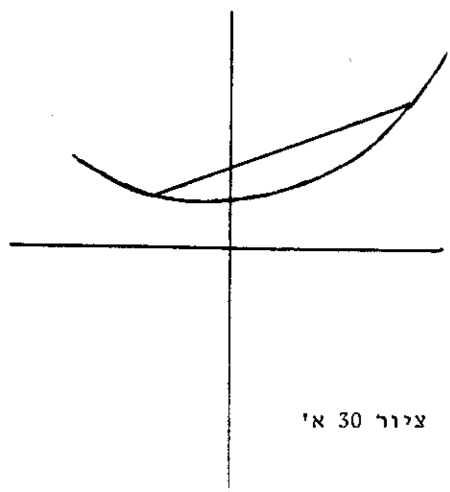
קל לראות שהמספר λ שהוגדר לעיל מקיים $0 \le \lambda \le 1$ אם ורק אם $0 \le w_1 - v_1 \le u_1 - v_1$, כלומר אם ורק אם $v_1 \le w_1 \le u_1$.

מסקנה: הנקודה w נמצאת על הקטע הסגור המחבר את שתי הנקודות u ו v אם ורק אם קיים מספר ממשי $0 \le \lambda \le 1$ כך ש $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$.

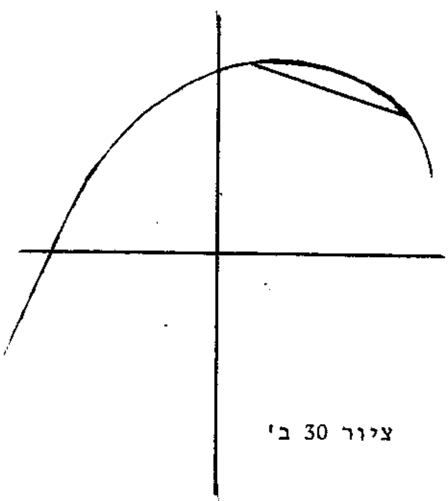
<u>הגדרה 46</u>: א. הפונקציה f תקרא קמורה בקטע $[a,b]$ אם לכל זוג נקודות x ו y בקטע, ולכל $0 \leq \lambda \leq 1$, מתקיים $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

ב. הפונקציה f תקרא קעורה בקטע $[a,b]$ אם לכל זוג נקודות x ו y בקטע, ולכל $0 \leq \lambda \leq 1$, מתקיים $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

הסבר: נעזר בציור 30. משמעות ההגדרה היא שפונקציה היא פונקציה קמורה אם כל קטע המחבר שתי נקודות על גרף הפונקציה נמצא בין שתי הנקודות הללו מעל לגרף הפונקציה (ציור 30 א'), והפונקציה היא פונקציה קעורה אם כל קטע המחבר שתי נקודות על גרף הפונקציה נמצא בין אותן שתי נקודות מתחת לגרף הפונקציה (ציור 30 ב').



ציור 30 א'



ציור 30 ב'

<u>דוגמה 47</u>:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$.

טענה: f קמורה.

הוכחה: תהיינה x ו y שתי נקודות. כל אחת מהשורות הבאות נכונה אם ורק אם גם השורה שאחריה נכונה. (הסימן ⇔ פרושו אם ורק אם).

$$f(\lambda x+ (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \Leftrightarrow$$

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 \le \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2x^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy + (1 - \lambda)^2y^2 \le \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\lambda(1 - \lambda)xy \le (\lambda - \lambda^2)x^2 + (1 - \lambda - (1 - \lambda)^2)y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\lambda(1 - \lambda)xy \le \lambda(1 - \lambda)x^2 + (1 - \lambda)(1 - (1 - \lambda))y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2xy \le x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \le x^2 - 2xy + y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \le (x - y)^2$$

והשורה האחרונה כמובן נכונה.

ב. $f:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \sqrt{x}$.

טענה: f קעורה.

הוכחה: תהיינה x ו y שתי נקודות בקרן $[0,\infty)$. כל אחת מהשורות הבאות נכונה אם ורק אם גם השורה שאחריה נכונה.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\lambda x + (1-\lambda)y} \geq \lambda\sqrt{x} + (1-\lambda)\sqrt{y} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \geq \lambda^2 x + 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{xy} + (1-\lambda)^2 y \qquad \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - \lambda^2)x + (1 - \lambda - (1-\lambda)^2)y \geq 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{xy} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)\lambda y \geq 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{xy} \qquad \Leftrightarrow$$

$$x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

והשורה האחרונה כמובן נכונה.

משתי הדוגמאות האחרונות ברור ששיטת הבדיקה הישירה הינה מסובכת למדי. מטרתינו בסעיף זה היא להביא שיטה פשוטה שבעזרתה נוכל לבדוק האם פונקציה היא פונקציה קמורה או קעורה. נפתח בטענה הבאה:

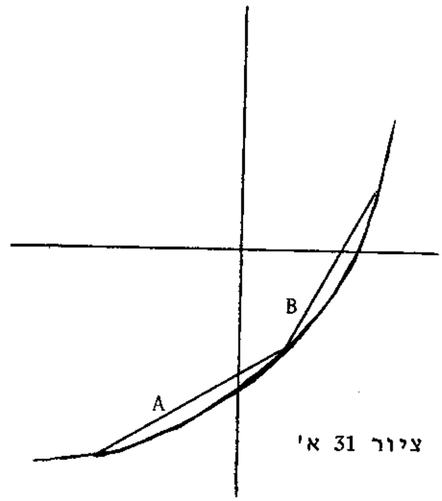
<u>טענה 48</u>: א. הפונקציה f קמורה אם ורק אם לכל קטע $[a,b]$, ולכל x, $a < x < b$, מתקיים

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

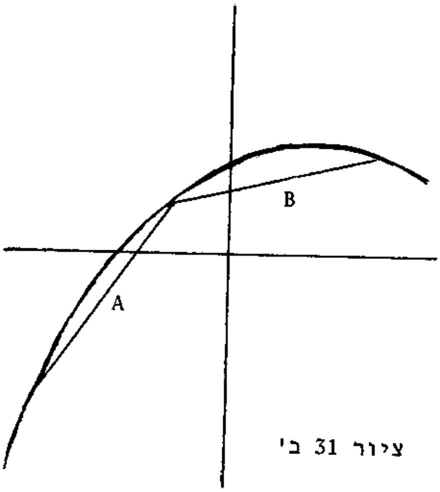
ב. הפונקציה f קעורה אם ורק אם לכל קטע $[a,b]$, ולכל x, $a < x < b$, מתקיים

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

הסבר: בעיין בציור 31. משמעות הטענה היא שאם הפונקציה f קמורה אזי שפוע הקטע A קטן משפוע הקטע B (ציור 31 א'), ואם הפונקציה f קעורה אזי שפוע הקטע A גדול משפוע הקטע B (ציור 31 ב').



ציור 31 א'



ציור 31 ב'

הוכחה:

א.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x - a} \cdot f(x) + \frac{1}{b - x} \cdot f(x) \le \frac{1}{x - a} \cdot f(a) + \frac{1}{b - x} \cdot f(b) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x - a} + \frac{1}{b - x}\right) \cdot f(x) \le \frac{1}{x - a} \cdot f(a) + \frac{1}{b - x} \cdot f(b) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) \le \frac{\frac{1}{x - a}}{\frac{1}{x - a} + \frac{1}{b - x}} \cdot f(a) + \frac{\frac{1}{b - x}}{\frac{1}{x - a} + \frac{1}{b - x}} \cdot f(b)$$

נסמן:
$$\lambda = \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}}$$

$$1 - \lambda = 1 - \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}} = \frac{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x} - \frac{1}{x-a}}{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}} =$$

$$\frac{\frac{1}{b-x}}{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}}$$

ועתה

$$\lambda a + (1-\lambda)b = \frac{\frac{a}{x-a}}{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}} + \frac{\frac{b}{b-x}}{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}} =$$

$$\frac{\frac{a}{x-a} + \frac{b}{b-x}}{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}} = \frac{\frac{ab - ax + bx - ba}{(x-a)(b-x)}}{\frac{b - x + x - a}{(x-a)(b-x)}} = \frac{(b-a)x}{b-a} = x$$

ולכן

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b-x} \Leftrightarrow$$

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) = f(x) \le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

ב. ההוכחה מושארת לקורא. □

<u>טענה 49</u>: א. הפונקציה f קמורה אם ורק אם לכל קטע $[a,b]$, לכל זוג מספרים

x ו y בקטע כך ש $x < y < b$, ולכל מספר h כך ש

$0 < h < \min\{y - x , b - y\}$ מתקיים

$$f(x + h) - f(x) \leq f(y + h) - f(y)$$

ב. הפונקציה f קעורה אם ורק אם לכל קטע $[a,b]$, לכל זוג מספרים

x ו y בקטע כך ש $x < y < b$, ולכל מספר h כך ש

$0 < h < \min\{y - x , b - y\}$ מתקיים

$$f(x + h) - f(x) \geq f(y + h) - f(y)$$

הוכחה: א. לפי טענה 48 א'

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x} \leq \frac{f(y) - f(x + h)}{y - (x + h)} \leq \frac{f(y + h) - f(y)}{y + h - y}$$

ולכן

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(y + h) - f(y)}{h}$$

ומאחר ש $h > 0$ נקבל

$$f(x + h) - f(x) \leq f(y + h) - f(y).$$

ב. ההוכחה מושארת לקורא. □

<u>טענה 50</u>: תהי f פונקציה הגזירה פעמיים.

א. הפונקציה f קמורה אם ורק אם לכל קטע (a,b) ולכל $x \in (a,b)$ מתקיים $f''(x) \geq 0$.

ב. הפונקציה f קעורה אם ורק אם לכל קטע (a,b) ולכל $x \in (a,b)$ מתקיים $f''(x) \leq 0$.

הוכחה:

א. לפי טענה 49 אם הפונקציה f קמורה בקטע (a,b) אזי לכל $a \leq x < y < b$ ולכל $0 < h < \min\{y - x , b - y\}$ מתקיים

$$f(x + h) - f(x) \leq f(y + h) - f(y)$$

ומאחר ש $h > 0$ מתקיים גם

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(y + h) - f(y)}{h}\right]$$

או $\quad f'(x) \leq f'(y)$

מסקנה: אם $x < y$ אזי $f'(x) \leq f'(y)$, כלומר f' היא פונקציה עולה, ומאחר שכך נגזרתה (שלפי ההנחה קיימת) הינה אי-שלילית.
במילים אחרות $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

נניח עתה שלכל $x \in (a,b)$ מתקיים $f''(x) \geq 0$ ולכן הפונקציה f' אינה יורדת. תהי x נקודה בקטע (a,b). לפי משפט לגרנז' (משפט 30) קיימות שתי נקודות, $x < y < b$, $a < z < x$ כך ש

$$f'(y) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

מאחר שהפונקציה f' אינה יורדת הרי ש $f'(z) \leq f'(y)$ ולכן

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

מאחר שאי-שוויון זה נכון לכל קטע $[a,b]$ ולכל $x \in (a,b)$ הרי שלפי טענה 48 אי הפונקציה f קמורה.

ב. ההוכחה מושארת לקורא. □

דוגמה 51:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$. $f''(x) = 2 > 0$, ולכן f קמורה.

ב. $f:(0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $f(x) = \sqrt{x}$.

כזכור, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0$ שהרי $x > 0$. מסקנה: f קעורה.

דוגמה 52: פונקצית הצריכה של כל פרט במשק היא $C(y)$ (y - הכנסה). כידוע, הנש"ץ (נטיה שולית לצרוך, MPC בלע"ז) שווה לנגזרתה של פונקציה זו.

על הפונקציה C נניח את שתי ההנחות הבאות

א. הפונקציה C קעורה.

ב. $C(0) > 0$, ו C היא פונקציה עולה.

טענה: במשך בו שני פרטים, עני עם הכנסה y_1 ועשיר עם הכנסה y_2 ($y_1 < y_2$), העברת סכום t, $t < \frac{y_2 - y_1}{2}$, מהעשיר לעני תגדיל את סך הצריכה במשק.

הוכחה: הצריכה לפני הטלת המס היתה $C(y_1) + C(y_2)$. אחרי הטלת המס הצריכה היא $C(y_1 + t) + C(y_2 - t)$. מאחר שהפונקציה C הינה פונקציה קעורה ו $y_2 > y_1$ אזי מאחר ש $y_1 < y_1 + t < y_2 - t < y_2$ הרי שלפי טענה 48 ב'

$$C(y_1 + t) - C(y_1) \geq C(y_2) - C(y_2 - t)$$

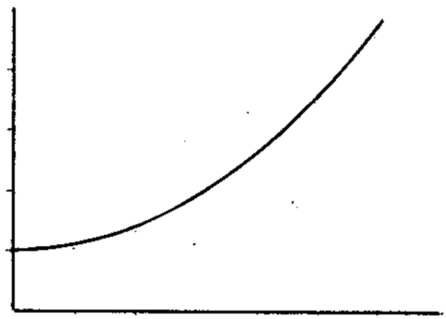
ולכן $C(y_1 + t) + C(y_2 - t) \geq C(y_1) + C(y_2)$.

פרק ד' - האינטגרל

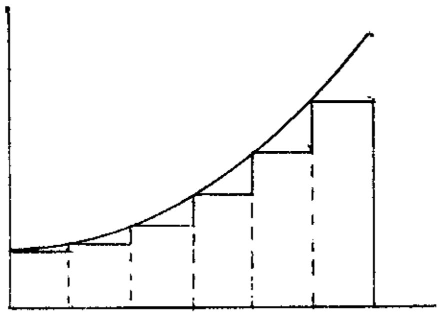
סעיף 1: האינטגרל המסוים

דוגמה 1: בציור 32 נתון הגרף של הפונקציה $f:[0,\infty) \to R$ הנתונה ע"י $f(x) = 10 + x^2$. בדוגמה זו ננסה לחשב את שטחו של השטח המקווקו OABC הכלוא בין ציר ה x, ציר ה y, גרף הפונקציה f, והקו הניצב לציר ה x בנקודה $x = 6$. נסמן שטח זה ב S. מאחר שגרף הפונקציה איננו קו ישר, ברור שאי אפשר לחשב את השטח של S באמצעות נוסחה פשוטה, כפי שנהוג לחשב שטח מרובע או משולש. ננסה איפוא להתקרב אל השטח S באמצעות צורות שאת שטחן אנו יודעים לחשב.

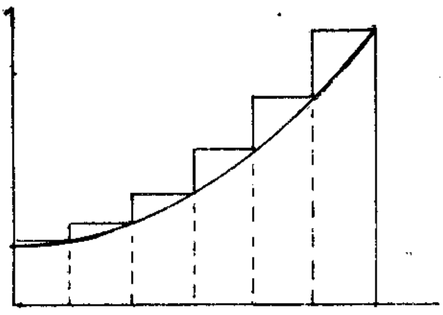
בציור 33 א' בנינו צורה חדשה שנסמנה ב $\underline{S_1}$, המורכבת מששה מלבנים, כל אחד מהם בעל בסיס באורך 1 הנמצא על ציר ה x, והמכילה את S. בציור 33 ב' בנינו צורה שנסמנה ב $\overline{S_1}$, המורכבת אף היא מששה מלבנים בעלי בסיסים כנ"ל והמוכלת ב S. כפי שקל לראות, אי אפשר להגדיל את גובהו של אף אחד מהמלבנים שב $\overline{S_1}$ מבלי לפגוע ביחס $\overline{S_1} \subset S$, ואי אפשר להקטין את גובהו של אף אחד מהמלבנים שב $\underline{S_1}$ מבלי לפגוע ביחס $S \subset \underline{S_1}$.



ציור 32



ציור 33 א'



ציור 33 ב'

נחשב עתה את השטחים של $\underline{S_1}$ ושל $\overline{S_1}$ על ידי חשוב סכום שטחי המלבנים המרכיבים אותם.

$$\underline{S_1} = 1\cdot f(1) + 1\cdot f(2) + \ldots + 1\cdot f(6) = 151$$

$$\overline{S_1} = 1\cdot f(0) + 1\cdot f(1) + \ldots + 1\cdot f(5) = 115$$

באופן דומה נסמן ב $\underline{S_t}$ את השטח החוסם את S והמורכב ממלבנים שאורך בסיסם t ושאי אפשר להקטין את גובהו של אף אחד מהם מבלי לפגוע ביחס $S \subset \underline{S_t}$, ונסמן ב $\overline{S_t}$ את השטח החסום ב S והמורכב ממלבנים שאורך בסיסם t ושאי אפשר להגדיל את גובהו של אף אחד מהם מבלי לפגוע ביחס $\overline{S_t} \subset S$.

בטבלה הבאה מופיעים השטחים של $\underline{S_t}$, ושל $\overline{S_t}$ עבור כמה ערכים שונים של t.

t	$\overline{S_t}$	$\underline{S_t}$
1	115	151
0.5	123.25	141.25
0.25	127.56	136.56
0.1	130.21	133.81
0.01	131.82	132.18
0.001	132.98	132.02

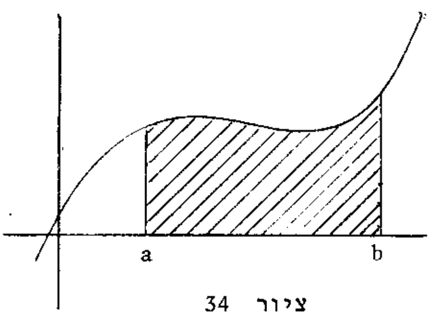
כאשר $t \to 0$ מתקיים $\lim_{t\to 0} \underline{S_t} = \lim_{t\to 0} \overline{S_t} = 132$, ולכן נקבע שהשטח של S הוא 132.

ננסה עתה לתת משמעות כלכלית לשטח שחשבנו. נניח שפירמה מיצרת סוכר (x), ושפונקצית ההיצע שלה נתונה ע"י $P(x) = 10 + x^2$, כאשר x נמדד בטונות, ו $P(x)$ בלירות. כיצד נבנתה עקומה זו? כאשר פירמה נמצאת בתחרות היא מסכימה למכור את היחידה השולית במחיר כזה שהרווח שלה ממכירתה יהיה אפס. ברור שהיא לא תסכים למכור במחיר נמוך יותר, כי אז יהיה לה כדאי יותר לא ליצר יחידה זו כלל, ולהגדיל את רווחיה. כמו כן ברור שהיא לא תדרוש מחיר יותר גבוה, שהרי לא תוכל לקבלו, כי תמיד תמצא פירמה זהה שתסכים למכור יחידה זו במחיר יותר נמוך. על מנת שהרווח של הפירמה מהיחידה האחרונה יהיה שווה לאפס חייב להתקיים שוויון בין המחיר שהפירמה דורשת בשבילה לבין ההוצאה הדרושה ליצורה, הוצאה אותה נהוג לכנות בשם ההוצאה השולית. פונקצית ההיצע הינה, אם כן, פונקצית ההוצאה השולית, ונסמנה ב MC (Marginal Cost).

סך ההוצאות הדרושות ליצור מספר כלשהו של יחידות הוא סכום ההוצאות השוליות ליצור כל יחידה ויחידה. אם הפירמה חייבת ליצר ביחידות של טונות שלמות אזי ברור שסך ההוצאה ליצור 6 טונות הוא $\underline{S_1}$ (עיין לעיל). אם היא יכולה ליצר ביחידות של חצי טונה אזי סך ההוצאה ליצור 6 טונות הוא $\underline{S_{0.5}}$, וכו'. אם נניח שהפירמה יכולה ליצר ביחידות קטנות כרצוננו אזי סך ההוצאה הוא S.

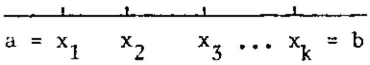
מסקנה: סך ההוצאה הדרוש ליצור x_0 יחידות שווה לשטח הכלוא בין ציר ה x, ציר ה y, גרף פונקצית ההיצע והקו הניצב לציר ה x בנקודה $x = x_0$.

תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$. מטרתינו היא לחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה x, ושני הקווים הניצבים לציר ה x בנקודות a ו b (השטח המקווקו שבציור 34). הדרך הפורמלית בה נלך דומה מאד לדרך בה חשבנו את השטח שבדוגמה1 בהבדל היחיד שאורכי בסיסי המלבנים בשלב ה n לא יהיו בהכרח שווים זה לזה.



ציור 34

<u>הגדרה 2</u>: א. סדרת הנקודות $\{x_i\}_{i=1}^{k}$
תקרא סדרת חלוקה של הקטע
$[a,b]$ אם



1. $x_k = b$, $x_1 = a$
2. $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$

ב. סדרת חלוקה תקרא בשם סדרת
n אם לכל i, $1 \leq i < k$, מתקיים $x_{i+1} - x_i \leq \frac{1}{n}$.

הסבר: סדרת חלוקה מחלקת את הקטע $[a,b]$ לסדרת קטעים, והיא מכונה בשם סדרת n אם אורכו של כל אחד מהקטעים הללו איננו עולה על $\frac{1}{n}$.

<u>סמון</u>: סדרת n תסומן ע"י $\underline{\overline{X}}_n$.

$\underline{\overline{X}}_n$ הוא סימון של סדרה סופית של מספרים, ולא של מספר בודד. מספר האיברים המינימלי בסדרה $\underline{\overline{X}}_n$ היא $[(b - a)n] + 1$. (החלק השלם של $(b - a)n$ פלוס אחד). מאליו מובן שאם $m < n$ אזי כל סדרת n היא גם סדרת m, שהרי לכל $1 \leq i < k$ מתקיים

$$x_{i+1} - x_i \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{m} .$$

כזכור, מטרתינו היא לחשב את השטח הנמצא מתחת לגרף הפונקציה f בין הנקודות a ו b. תהי $\underline{\overline{X}}_n = x_1, x_2, \ldots, x_k$ חלוקת n של הקטע $[a,b]$. נסמן ב m_i את הערך המינימלי של הפונקציה f בקטע $[x_i, x_{i+1}]$, ונסמן ב M_i את הערך המכסימלי של הפונקציה בקטע זה.* לכל $x \in [x_i, x_{i+1}]$ מתקיים איפוא $m_i \leq f(x) \leq M_i$. נסמן:

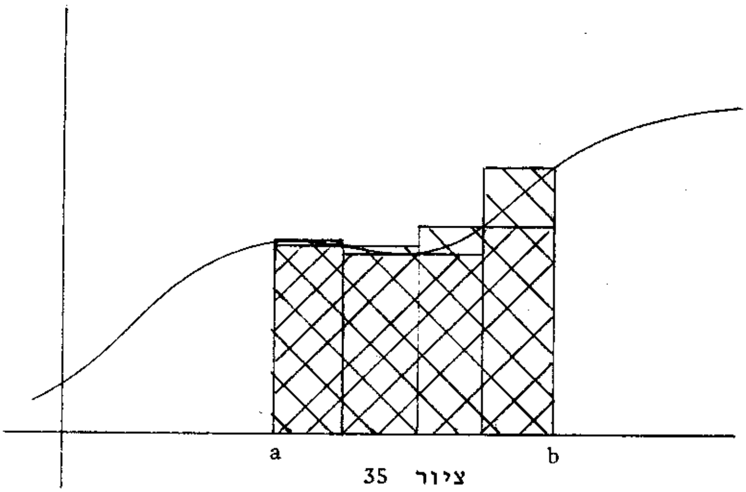
$$\overline{S}(\underline{\overline{X}}_n) = \sum_{i=1}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)m_i$$

$$\underline{S}(\underline{\overline{X}}_n) = \sum_{i=1}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)M_i$$

---

* למען הדיוק יש לכתוב inf במקום מינימום ו sup במקום מכסימום, שהרי איננו עוסקים רק בפונקציות רציפות, ולכן אין כל בטחון שהפונקציה מקבלת מכסימום ומינימום בכל קטע.

$\overline{S}(\underline{\overline{X}}_n)$ הוא סכום השטחים של $k - 1$ מלבנים, כאשר בסיסו של המלבן ה i הוא באורך $x_{i+1} - x_i$ וגובהו שווה ל m_i. $\underline{S}(\underline{\overline{X}}_n)$ הוא סכום השטחים של $k - 1$ מלבנים בעלי בסיסים כנ"ל, ואשר גובהם שווה ל M_i (ציור 35). לכל סדרת n $\underline{\overline{X}}_n$ מתקיים כמובן $\overline{S}(\underline{\overline{X}}_n) \le \underline{S}(\underline{\overline{X}}_n)$.



ציור 35

בדוגמה 1 ראינו כי ככל שמקטינים את בסיסי המלבנים כן מתקרבים זה לזה סכומי השטחים של המלבנים החוסמים וסכומי השטחים של המלבנים החסומים. נגדיר איפוא

<u>הגדרה 3</u>: תהי f פונקציה החסומה בקטע $[a,b]$. אם קיים מספר S כך שלכל סדרה $\{\underline{\overline{X}}_n\}_{n=1}^{\infty}$ של סדרות n של הקטע $[a,b]$ קיימים שני הגבולות $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}(\underline{\overline{X}}_n)$ ו $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}(\underline{\overline{X}}_n)$ ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(\underline{\overline{X}}_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(\underline{\overline{X}}_n) = S$$

אזי נאמר שהפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ונסמן זאת ע"י $S = \int_a^b f(x)dx$.

שים לב לכך שהסדרה $\{\underline{\overline{X}}_n\}_{n=1}^{\infty}$ איננה סדרה של מספרים, אלא סדרה של סדרות סופיות של מספרים. הסדרות $\{\underline{S}(\underline{\overline{X}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{\overline{S}(\underline{\overline{X}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ לעומת זאת הן שתי סדרות אינסופיות רגילות של מספרים. משמעות הגדרה 3 היא שאם ככל שנעדן את החלוקה כן ילכו סכום שטחי המלבנים החוסמים וסכום שטחי המלבנים החסומים ויתקרבו זה לזה, אזי יש משמעות למושג השטח שנמצא מתחת לגרף הפונקציה והוא שווה לגבול משותף זה.

אם הפונקציה מקבלת ערכים שליליים אזי נקבל מלבנים בעלי גובה שלילי (שהרי $m_i \le f(x_i) < 0$), ולכן נתייחס אל שטח הנמצא מתחת לציר ה x כאל שטח שלילי.

<u>טענה 4</u>: פונקציה רציפה היא פונקציה אינטגרבילית.

לא נוכיח טענה זו, אולם נשתמש בה רבות בהמשך.

תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ותהי $\underline{\overline{X}}_n$ סדרת n של קטע זה. כפי שכבר ציינו, לכל $x \in [x_i,x_{i+1}]$ מתקיים $m_i \le f(x) \le M_i$. תהי $t_1,\ldots,t_{k-1}$ סדרה של נקודות בקטעים הללו, נקודה בכל קטע. כלומר, לכל i, $1 \le i < k$, מתקיים $t \in [x_i,x_{i+1}]$. לאור האמור לעיל הרי שלכל i מתקיים $m_i \le f(t_i) \le M_i$, ולכן מתקיים גם $(x_{i+1} - x_i)m_i \le (x_{i+1} - x_i)f(t_i) \le (x_{i+1} - x_i)M_i$. אם נסכם נקבל

$$\overline{S}(\underline{\overline{X}}_n) = \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i)m_i \le \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i)f(t_i) \le \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i)M_i = \underline{S}(\underline{\overline{X}}_n)$$

נסמן את הסדרה $t_1,\ldots,t_{k-1}$ ב T_n, ונסמן את הסכום $\sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i)f(t_i)$ ב $S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n)$. הסדרה $\{S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים, המקיימת לכל n

$$\overline{S}(\underline{\overline{X}}_n) \le S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n) \le \underline{S}(\underline{\overline{X}}_n)$$

אם הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי שתי הסדרות $\{\overline{S}(\underline{\overline{X}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{\underline{S}(\underline{\overline{X}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לאותו גבול, אותו סמנו ב S, ולפי משפט הסנדויץ לסדרות (פרק א' טענה 26) הרי שגם הסדרה $\{S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ולאותו גבול, דהיינו ל S. אם הפונקציה f רציפה אזי לפי טענה 4 היא גם אינטגרבילית, ולכן אנו יודעים ששתי הסדרות $\{\overline{S}(\underline{\overline{X}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{\underline{S}(\underline{\overline{X}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לאותו גבול S, ושכל סדרה מהצורה $\{S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אף היא ל S.

מסקנה: אם הפונקציה f רציפה אזי מספיק לחשב את גבולה של סדרה $\{S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n)\}_{n=1}^{\infty}$ אחת על מנת לדעת את ערכו של האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$.

<u>דוגמה 5</u>:

א. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = c$. תהי $\underline{\overline{X}}_n = \{x_i\}_{i=1}^{k}$ חלוקת n של הקטע $[a,b]$, ותהי $T_n = \{t_i\}_{i=1}^{k-1}$ סדרה של נקודות בקטעים הללו. f פונקציה רציפה, ועי"כ נחשב את גבול הסדרה $\{S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n)\}_{n=1}^{\infty}$

$$S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n) = \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c(x_{i+1} - x_i) = c\sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i) =$$

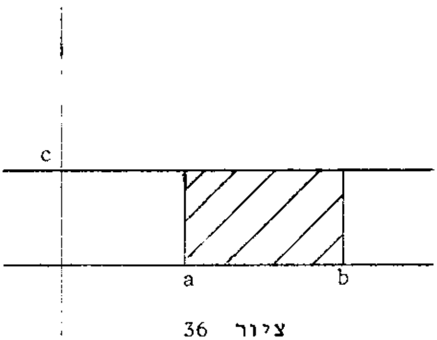
$$c(x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \ldots + x_{k-1} - x_{k-2} + x_k - x_{k-1}) =$$

$$c(x_k - x_1) = c(b - a)$$

סכום זה לא תלוי ב n, ולכן

$$\int_a^b cdx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n) = c(b - a)$$

כפי שניתן לראות מציור 36, $c(b-a)$ הוא אמנם שטח המלבן הנמצא מתחת לגרף הפונקציה בין a ל b.



ציור 36

ב. $f:R\to R$ נתונה ע"י $f(x)=x$.

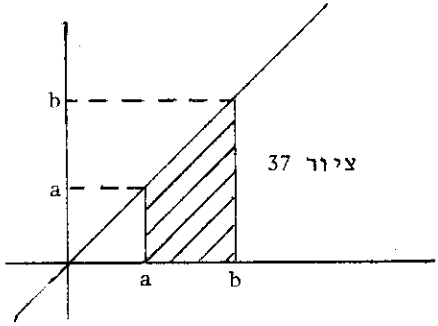
תהי $\underline{X}_n=\{x_i\}_{i=1}^{k}$ חלוקת n של הקטע $[a,b]$, ותהי $T_n=\{t_i\}_{i=1}^{k-1}$ סדרה של נקודות בקטעים הללו. מאחר שהפונקציה f רציפה אנו יכולים לבחור כל סדרה שהיא, נבחר איפוא את הסדרה $\{t_i\}_{i=1}^{k-1}$ כך שלכל i, $1\le i<k$, מתקיים $t_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ (כלומר t_i הוא אמצע הקטע $[x_i,x_{i+1}]$).

$$S_{\underline{X}_n}(T_n)=\sum_{i=1}^{k-1}f(t_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1}^2-x_i^2)=\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2+x_3^2-x_2^2+\dots+x_k^2-x_{k-1}^2)=$$

$$\frac{1}{2}(x_k^2-x_1^2)=\frac{b^2-a^2}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{b^2-a^2}{2}$$

השטח מתחת לגרף הפונקציה (ציור 37) הוא טרפז שגובהו $b-a$ ואורכי בסיסיו הם b ו a. כפי שאנו יודעים, שטחו של טרפז כזה הוא $\frac{(b+a)}{2}(b-a)$, או $\frac{b^2-a^2}{2}$.



ציור 37

ג. $f:R \to R$ נתונה ע"י $f(x) = x^2$. תהי $\underline{\overline{X}}_n = \{x_i\}_{i=1}^{k}$ חלוקת n של הקטע $[a,b]$, ותהי $T_n = \{t_i\}_{i=1}^{k-1}$ סדרה של נקודות בקטעים הללו. מאחר שהפונקציה f רציפה אנו יכולים לבחור כל $\underline{\overline{X}}_n$ ו T_n שהן, נחלק איפוא את הקטע $[a,b]$ ל $k - 1$ קטעים שווים (כך שאורכם לא יעלה על $\frac{1}{n}$) באופן הבא

$$x_1 = a \quad , \quad x_2 = a + \frac{b - a}{k - 1} \quad , \quad x_3 = a + \frac{2(b - a)}{k - 1} \quad , \; \dots ,$$

$$x_j = a + \frac{(j - 1)(b - a)}{k - 1} \; , \dots , \; x_k = b$$

כמו כן נקבע לכל i, $1 \le i < k$, $t_i = x_{i+1}$.

$$S_{\underline{\overline{X}}_n}(T_n) = \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} f\left(a + \frac{i(b - a)}{k - 1}\right)\left(a + \frac{i(b - a)}{k - 1} - a - \frac{(i - 1)(b - a)}{k - 1}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left(a + \frac{i(b - a)}{k - 1}\right)^2 \left(\frac{b - a}{k - 1}\right) =$$

$$\left(\frac{b - a}{k - 1}\right)\left[\sum_{i=1}^{k-1} a^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2\,ai(b - a)}{k - 1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i^2(b - a)^2}{(k - 1)^2}\right] =$$

$$\left(\frac{b - a}{k - 1}\right)(k - 1)a^2 + \left(\frac{b - a}{k - 1}\right)\left(\frac{2a(b - a)}{k - 1}\right)\sum_{i=1}^{k-1} i + \left(\frac{b - a}{k - 1}\right)\left(\frac{b - a}{k - 1}\right)^2 \sum_{i=1}^{k-1} i^2$$

טענת עזר: לכל n מתקיים

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{(k + 1)k}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

הטענה השניה מוכחת בנספח 1, הוכחת הטענה הראשונה מושארת לקורא.
נציב זאת בסכום דלעיל, ונקבל

$$(b-a)a^2 + \left(\frac{b-a}{k-1}\right)^2 \cdot 2a \cdot \left(\frac{k(k-1)}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{k-1}\right)^3 \left(\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}\right) =$$

$$(b-a)a^2 + a(b-a)^2 \frac{k}{k-1} + \frac{(b-a)^3}{6} \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \frac{2k-1}{k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$(b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{6} \cdot 2 =$$

$$a^2(b-a) + a(b^2 - 2ab + a^2) + \frac{b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3}{3} =$$

$$a^2b - a^3 + ab^2 - 2a^2b + a^3 + \frac{b^3}{3} - b^2a + ba^2 - \frac{a^3}{3} =$$

$$\frac{b^3 - a^3}{3}$$

מסקנה: $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$

דוגמה אחרונה זו מדגימה את הקושי הטמון בחשוב האינטגרל המסוים באמצעות הגדרה 3.
בהמשך הפרק נלמד שיטה פשוטה יותר לחשוב אינטגרלים מסויימים.

סעיף 2: תכונות יסודיות של האינטגרל המסויים

הערה: טענות 6-9 נכונות לכל פונקציה אינטגרבילית, אולם אנחנו נוכיח אותן רק לפונקציות רציפות.

טענה 6: אם הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי $\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

הוכחה: תהי $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ חלוקת n של הקטע $[a,b]$ (כלומר, כך שאורכו של כל קטע קטן מ $\frac{1}{n}$), ותהי $T_n = \{t_i\}_{i=1}^{k-1}$ סדרה של נקודות בקטעים הללו.

$$\int_a^b c\,f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} c\,f(t_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$\lim_{n\to\infty} c \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = c\int_a^b f(x)dx \quad \square$$

טענה 7: אם שתי הפונקציות f ו g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אזי גם הפונקציות $f + g$ ו $f - g$ אינטגרביליות בקטע זה, ומתקיים

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (f - g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

הוכחה: תהיינה $\underline{X}_n = \{x_i\}_{i=1}^{k}$ ו $T_n = \{t_i\}_{i=1}^{k-1}$ סדרות כבהוכחה הקודמת.

$$\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (f \pm g)(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (f(t_i) \pm g(t_i))(x_{i+1} -$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} g(t_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad \square$$

כפי שראינו בדוגמה 5 ב' ו ג'

$$\int_0^6 x\,dx = \frac{6^2 - 0^2}{2} = 18$$

$$\int_0^6 x^2dx = \frac{6^3 - 0^3}{3} = 72$$

מסקנה: האינטגרל של מכפלת שתי פונקציות לא זהה בהכרח למכפלת האינטגרלים.

<u>טענה 8</u>: אם הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ו $a < c < b$, אזי

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

הוכחה: תהיינה $\underline{X}_n = \{x_i\}_{i=1}^{k}$ ו $T_n = \{t_i\}_{i=1}^{k-1}$ סדרות כבהוכחת טענה 6.

בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח שקיים i, נסמנו i_0, כך ש $c = x_{i_0}$, כי אחרת נעדן את החלוקה על-ידי חלוקת הקטע $[x_i,x_{i+1}]$ המכיל את c לשני קטעים, $[x_i,c]$ ו $[c,x_{i+1}]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{i_0-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=i_0}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i_0-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=i_0}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \square$$

הוכחה: נסמן: $\varepsilon = f(c) > 0$. מאחר שהפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ הרי שקיים $\delta_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ כך שלכל $x \in [a,b]$ שמקיים $|x - c| < \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ מתקיים $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

ובפרט מתקיים לכל x כזה

$$f(x) > f(c) - \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

קיים איפוא קטע שנסמנו $[k,\ell]$ כך שלכל נקודה $x \in [k,\ell]$ מתקיים $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

ועתה

$$\int_a^b f(x)dx = \qquad \text{(לפי טענה 8)}$$

$$\int_a^k f(x)dx + \int_k^\ell f(x)dx + \int_\ell^b f(x)dx$$

לכל נקודה $x \in [a,k]$ מתקיים $f(x) \geq 0$, ולכן לפי טענה 9 $\int_a^k f(x)dx \geq 0$

לכל נקודה $x \in [\ell,b]$ מתקיים $f(x) \geq 0$, ולכן לפי טענה 9 $\int_\ell^b f(x)dx \geq 0$

לכל נקודה $x \in [k,\ell]$ מתקיים $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן לפי טענה 10

$$\int_k^\ell f(x)dx \geq \int_k^\ell \frac{\varepsilon}{2}\, dx = \qquad \text{(לפי דוגמה 5 א')}$$

$$(\ell - k)\frac{\varepsilon}{2} > 0$$

מסקנה: $\int_a^b f(x)dx \geq 0 + (\ell - k)\frac{\varepsilon}{2} + 0 > 0$.

□

הוכחה: נסמן: $\varepsilon = f(c) > 0$. מאחר שהפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ הרי שקיים $\delta_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ כך שלכל $x \in [a,b]$ שמקיים $|x - c| < \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ מתקיים $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ובפרט מתקיים לכל x כזה

$$f(x) > f(c) - \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

קיים איפוא קטע שנסמנו $[k,\ell]$ כך שלכל נקודה $x \in [k,\ell]$ מתקיים $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

ועתה

$$\int_a^b f(x)dx = \qquad \text{(לפי טענה 8)}$$

$$\int_a^k f(x)dx + \int_k^\ell f(x)dx + \int_\ell^b f(x)dx$$

לכל נקודה $x \in [a,k]$ מתקיים $f(x) \geq 0$, ולכן לפי טענה 9 $\int_a^k f(x)dx \geq 0$

לכל נקודה $x \in [\ell,b]$ מתקיים $f(x) \geq 0$, ולכן לפי טענה 9 $\int_\ell^b f(x)dx \geq 0$

לכל נקודה $x \in [k,\ell]$ מתקיים $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן לפי טענה 10

$$\int_k^\ell f(x)dx \geq \int_k^\ell \frac{\varepsilon}{2}\,dx = \qquad \text{(לפי דוגמה 5 א')}$$

$$(\ell - k)\,\frac{\varepsilon}{2} > 0$$

מסקנה: $\int_a^b f(x)dx \geq 0 + (\ell - k)\,\frac{\varepsilon}{2} + 0 > 0$. □

סעיף 3: פונקציה קדומה

בפרק ג' דוגמה 31 א' ראינו שאם הנגזרת של הפונקציה f שווה לאפס, אזי קיים קבוע c כך שלכל x מתקיים $f(x) = c$. בסעיף זה נעסוק בהרחבת נושא זה לפונקציות יותר כלליות, כלומר נעסוק בשאלה מתי ניתן לגלות את הפונקציה המקורית מתוך נגזרתה.

הגדרה 12: הפונקציה F תקרא פונקציה קדומה של הפונקציה f, אם לכל נקודה x מתקיים $F'(x) = f(x)$.

דוגמה 13: הנגזרת של הפונקציה $F(x)$ היא $F'(x) = 2x$. מהי הפונקציה F?

הפונקציה F יכולה להיות x^2, היא יכולה להיות $x^2 + 57$, $x^2 - 3.5$, ולמעשה, היא יכולה להיות $x^2 + c$ עבור כל מספר ממשי c.

עתה ברור מדוע רשמנו בהגדרה 12 "פונקציה קדומה" ולא "הפונקציה הקדומה", שהרי קיימות פונקציות אשר להן כמה פונקציות קדומות שונות.

בטענה הבאה נמצא קשר בין אוסף הפונקציות הקדומות של פונקציה כלשהי.

טענה 14: אם הפונקציה F היא פונקציה קדומה של הפונקציה f, אזי הפונקציה G הינה פונקציה קדומה של הפונקציה f אם ורק אם קיים קבוע c כך ש $G = F + c$.

הוכחה: ברור שאם $F = G + c$ אזי $F' = G'$. נניח איפוא שלכל x מתקיים $F'(x) = G'(x)$. נסמן: $H = F - G$. מטענה 11 שבפרק ג' נובע שלכל x מתקיים $H'(x) = 0$. לפי דוגמה 31 א' שבפרק ג', אותה צטטנו בתחילת סעיף זה, קיים c כך שלכל x מתקיים $H(x) = c$, או $F(x) - G(x) = c$, כלומר $F(x) = G(x) + c$. □

<u>הגדרה 15</u>: אם הפונקציה F היא פונקציה קדומה של הפונקציה f אזי נאמר שהפונקציה F היא אינטגרל של הפונקציה f, ונסמן $F = \int f(x)dx$.

הערה: אין סימון זה זהה לסימון שבסעיף 1, שהרי שם ציינו מהם גבולות האינטגרל. הסימון $\int_a^b f(x)dx$ הוא מספר, והוא שווה לשטח שבין גרף הפונקציה ובין ציר ה x בין a ל b. הסמון $\int f(x)dx$ לעומת זאת הוא אוסף פונקציות, אוסף הפונקציות שנגזרתן שווה ל f.

מטענה 14 נובע, שאם גילינו פונקציה קדומה אחת של הפונקציה f, גילינו למעשה את כל הפונקציות הקדומות שלה.

<u>דוגמה 16</u>:

א. מאחר ש $(2x)' = 2$ הרי ש $\int 2dx = 2x + c$.

ב. באופן כללי $\int adx = ax + c$ (a קבוע).

ג. מאחר ש $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$ הרי ש $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + c$

ד. מאחר ש $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ הרי ש $\int\frac{1}{x}dx = \ln x + c$.

<u>דוגמה 17</u>:

א. מאחר ש $(\alpha F)' = \alpha F'$ (α קבוע) הרי שאם $F' = f$ אזי $(\alpha F)' = \alpha f$ ולכן

$$\int\alpha f(x)dx = \alpha F(x) + c' = \alpha(F(x) + c) = \alpha\int f(x)dx$$

ב. אם $F' = f$ ו $G' = g$ אזי $(F \pm G)' = f \pm g$, ולכן

$$\int(f \pm g)(x)dx = (F \pm G)(x) + c = (F(x) + c') \pm (G(x) + c'') =$$

$$\int f(x)dx \pm \quad g(x)dx$$

סעיף 4: טכניקות של אינטגרציה

בסעיף זה נציג מספר שיטות לחשוב אינטגרלים. לאור האמור בסעיף הקודם הטענה הבאה אינה זקוקה להוכחה:

טענה 18: א. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

ב. $\int e^x dx = e^x + c$

ג. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na} + c$

נביא עתה שלש שיטות לחשוב אינטגרלים.בכל דוגמה מומלץ לבדוק את התוצאה ע"י גזירתה.

א. פרוק: בעזרת דוגמה 17 וטענה 18 נוכל לחשב אינטגרלים דוגמת $\int(5x^7 - 8x + 9)dx$.

ואמנם

$\int(5x^7 - 8x + 9)dx =$ (לפי דוגמה 17 ב')

$\int(5x^7)dx - \int(8x)dx + \int 9dx =$ (לפי דוגמה 17 א')

$5\int x^7 dx - 8\int xdx + \int 9dx =$ (לפי טענה 18 א' ודוגמה 16 ב')

$$\frac{5x^8}{8} + c_1 - \frac{8x^2}{2} - c_2 + 9x + c_3 =$$

$$\frac{5x^8}{8} - 4x^2 + 9x + c$$

ב. אינטגרציה בחלקים: כזכור, אם u ו v הן שתי פונקציות גזירות אזי $(uv)' = u'v + uv'$ ולכן מאחר ש uv היא פונקציה קדומה של הפונקציה $(uv)'$ הרי ש

$$uv = \int(u'v + uv')dx = \int u'vdx + \int uv'dx$$

ולכן $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

כדי להשתמש בשיטה זו עלינו לפרק בשלב ראשון את הפונקציה f, שאת האינטגרל שלה אנו מחפשים, למכפלה של שתי פונקציות $u \cdot v'$, ויתירה מזו, עלינו גם לדעת לחשב את האינטגרל $\int u'v$.

נחשב בשיטה זו את ארבעת האינטגרלים הבאים:

1) $\int xe^x dx$

נפרק את הפונקציה xe^x למכפלה של שתי פונקציות $u = x$ ו $v' = e^x$.
אם $v' = e^x$ אזי $v = e^x$ ואנו מקבלים

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int x'e^x dx =$$

$$xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x - 1) + c$$

2) $\int \ln x dx$

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \int x' \cdot \ln x dx =$$

$$x\ln x - \int x(\ln x)'dx = x\ln x - \int \frac{x}{x} dx =$$

$$x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

3) $\int e^{2x} dx$

$$\int e^{2x} dx = \int e^x e^x dx = \int e^x (e^x)'dx = e^x e^x - \int (e^x)'e^x dx =$$

$$e^{2x} - \int e^x e^x dx = e^{2x} - \int e^{2x} dx$$

כלומר
$$\int e^{2x} dx = e^{2x} - \int e^{2x} dx$$

ולכן
$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

4) $\int e^{nx}dx$

$$\int e^{nx}dx = \int e^{(n-1)x}e^{x}dx = \int e^{(n-1)x}(e^{x})'dx =$$

$$e^{(n-1)x}e^{x} - \int(n-1)e^{(n-1)x}e^{x}dx = e^{nx} - (n-1)\int e^{nx}dx$$

כלומר $\int e^{nx}dx = e^{nx} - (n-1)\int e^{nx}dx$

או $n\int e^{nx}dx = e^{nx}$

ולכן $\int e^{nx}dx = \frac{e^{nx}}{n} + c$

ג. <u>שיטת ההצבה:</u> נניח שהפונקציה F היא פונקציה קדומה של הפונקציה f.

כזכור מכללי הגזירה של הפונקציה המורכבת הרי ש

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

עובדה זו מאפשרת לנו לחשב אינטגרלים של פונקציות מהצורה $f(g(x))g'(x)$

כאשר ידועה לנו פונקציה קדומה של הפונקציה f.

נחשב בשיטה זו את ששת האינטגרלים הבאים:

1) $\int 2xe^{x}dx$

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int (x^2)'e^{x^2}dx = e^{x^2} + c$$

2) $\int \ell n(3x)dx$

$$\int \ell n(3x)dx = \int\frac{1}{3}\cdot 3\ell n(3x)dx =$$

$$\frac{1}{3}\int(3x)'\ell n(3x)dx =$$ (עיין 2 לעיל)

$$\frac{1}{3}[3x(\ell n(3x) - 1)] + c = x(\ell n(3x) - 1) + c$$

$\int \frac{n}{x} dx$ (3

שיטה א':

$$\int \frac{n}{x} dx = n\int \frac{1}{x} dx = n\ln x + c$$

שיטה ב':

$$\int \frac{n}{x} dx = \int \frac{nx^{n-1}}{x^n} dx =$$

$$\int \frac{(x^n)'}{x^n} dx = \ln(x^n) + c = n\ln x + c$$

$\int \frac{7x^6 - 6}{x^7 - 6x + 1} dx$ (4

$$\int \frac{7x^6 - 6}{x^7 - 6x + 1} dx = \frac{(x^7 - 6x + 1)'}{x^7 - 6x + 1} dx =$$

$$\ln(x^7 - 6x + 1) + c$$

$\int \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ (5

$$\int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \int (\ln x)'(\ln x)^n dx =$$

$$\frac{(\ln x)^{n+1}}{n + 1} + c$$

$\int e^{-2x} dx$ (6

$$\int e^{-2x} dx = \int \frac{-2}{-2} e^{-2x} dx = \frac{1}{-2} \int (-2x)' e^{-2x} dx =$$

$$\frac{-e^{-2x}}{2} + c$$

סעיף 5: הקשר בין האינטגרל המסויים והפונקציה הקדומה

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. נבנה עתה את הפונקציה $F:[a,b] \to R$ באופן הבא - $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. כלומר, $F(x)$ הוא ערך האינטגרל המסויים של הפונקציה f בקטע $[a,x]$.

משפט 19: (המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי):

א. אם הפונקציה f היא פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציה $F:[a,b] \to R$ הנתונה ע"י $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה f.

ב. אם הפונקציה G היא פונקציה קדומה של הפונקציה f אזי $\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$

הוכחה:

א. תהי x_0 נקודה בקטע (a,b). עלינו להראות שהפונקציה F גזירה בנקודה x_0, וכן עלינו להראות שנגזרתה שווה ל $f(x_0)$. כלומר, אנו רוצים להראות ש

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

כזכור, $\int_a^b cdx = c(b - a)$ ולכן

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) =$$

$$\frac{1}{h}\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_a^{x_0} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt = \quad \text{(לפי טענה 8)}$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt = \quad \text{(לפי טענה 7)}$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt$$

יהי $\varepsilon > 0$. מאחר שהפונקציה f רציפה הרי שקיים $\delta > 0$ כך שלכל t שמקיים $|t - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. במילים אחרות, אם $|h| < \delta$ אזי לכל $t \in [x_0-h, x_0 + h]$ מתקיים $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

ולכן

$$\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt\right| =$$

$$\frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt\right| \le$$ (לפי פרק א' טענה 5 ד')

$$\frac{1}{|h|}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt < \frac{1}{|h|}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dt =$$

$$\frac{1}{|h|}\varepsilon(x_0 + h - x_0) = \frac{\varepsilon h}{|h|} \le \varepsilon$$

כלומר הפונקציה F גזירה בנקודה x_0, ונגזרתה שווה ל $f(x_0)$. מסקנה: הפונקציה F היא פונקציה קדומה של הפונקציה f.

ב. לפי טענות 8 ו 14 ולפי חלק א' של טענה זו, ובסימונים של חלק א', נקבל ש

$$G(\beta) - G(\alpha) = (F(\beta) + c) - (F(\alpha) + c) =$$ (לפי טענה 8 ע"י העברת אגף)

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{x_0}^{\beta} f(t)dt - \int_{x_0}^{\alpha} f(t)dt =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$ □

<u>סמון</u>: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

מסקנה: אם הפונקציה F היא פונקציה קדומה של הפונקציה f אזי לפי משפט 19 ב'

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

דוגמה 20:

א.
$$\int_0^6 (10 + x^2)dx =$$

$$\left(10x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^6 = 60 + \frac{216}{3} - 0 = 132$$

ב.
$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1$$

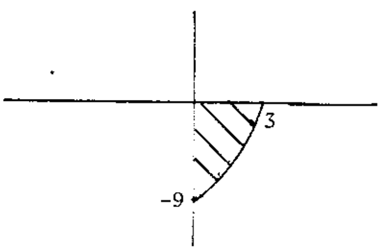
ג.
$$\int_0^e \ln x dx = (x\cdot\ln x - x)\Big|_1^e = (e\cdot 1 - e) - (0 - 1) = 1$$

ד.
$$\int_0^3 (x^2 - 9)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 9x\right)\Big|_0^3 = 9 - 27 - 0 = -18$$

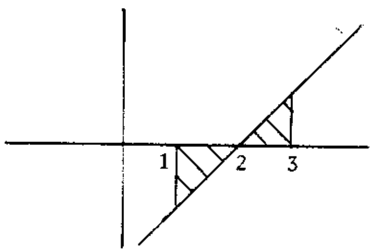
השטח שחשבנו הוא השטח המקווקו שבציור 38 א'. שטח זה אמנם שלילי שהרי הוא נמצא מתחת לציר ה x.

ה.
$$\int_1^3 (x - 2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^3 = 4.5 - 6 - (0.5 - 2) = 0$$

השטח שחשבנו הוא השטח המקווקו שבציור 38 ב'. שטח זה אמנם שווה לאפס שהרי הוא מורכב משני משולשים חופפים, אחד בעל שטח חיובי (הימני) ואחד בעל שטח שלילי (השמאלי



ציור 38 א'



ציור 38 ב'

<u>הגדרה 21</u>: א. אם הגבול $\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt$ קיים אזי נאמר שהפונקציה f אינטגרבילית בקרן $[a,\infty)$, ונסמן $\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt$.

ב. אם הגבול $\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt$ קיים אזי נאמר שהפונקציה f אינטגרבילית בקרן $(-\infty,x]$, ונסמן $\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt$.

<u>דוגמה 22</u>:

א. $$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x t^n e^{-t}dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x t^n(-e^{-t})'dt =$$

$$\lim_{x\to\infty} -e^{-t}t^n\Big|_0^x - \lim_{x\to\infty}\int_0^x (t^n)'(-e^{-t})dt = 0 - 0 + \lim_{x\to\infty} n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt = n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$$

נסמן: $I_n = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt$. קיבלנו איפוא כי $I_n = n\,I_{n-1}$. אם נמשיך נקבל

$$I_n = n\,I_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \dots = n!\,I_0 =$$

$$n!\int_0^\infty e^{-t}dt = -n!\,e^{-t}\Big|_0^\infty = -n!\cdot 0 - (-n!\cdot 1) = n!$$

ב. $$\int_{-\infty}^0 e^{-t}dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 e^{-t}dt = \lim_{x\to-\infty} -e^{-t}\Big|_x^0 = -1 + \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \to \infty$$

ולכן הפונקציה e^{-x} אינה אינטגרבילית בקרן $(-\infty,0]$, ואין להשתמש בסימון $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx$.

סעיף 6: דוגמאות כלכליות

דוגמה 23: נניח משק תחרותי בו מחיר המוצר x קבוע ושווה ל P. כידוע, אם פירמה מחליטה לייצר מוצר זה אזי היא תייצר אותה כמות x_0 כך שיתקיים $MC(x_0) = P$, וזאת בתנאי שהפונקציה f עולה בנקודה x_0.

מהאמור לעיל עדיין אין לדעת האם הפירמה בכלל תייצר. ואמנם, היא תייצר רק אם יהיה לה רווח חיובי, לפחות בטווח הקצר. במילים אחרות, היא תייצר רק אם סך הפדיון שלה יהיה גדול מסך ההוצאות של הטווח הקצר.

סך הפדיון מייצור x_0 יחידות הוא כמובן $P\cdot x_0$, וכפי שכבר ציינו בראש הפרק, סך ההוצאות (של הטווח הקצר) שווה לשטח שמתחת לעקומת MC (היא עקומת ההיצע) מאפס ועד לנקודה x_0. על מנת שלפירמה יהיה כדאי לייצר חייב אם כן להתקיים

$$(1)\quad P\cdot x_0 \ge \int_0^{x_0} MC(t)dt$$

נסמן: $TVC = \int_0^{x_0} MC(t)dt$ (Total Variable Cost).

תנאי (1) יכתב עתה

$$(2)\quad P\cdot x_0 \ge TVC(x_0)$$

או

$$(3)\quad P \ge \frac{TVC(x_0)}{x_0}$$

נסמן: $AVC(x_0) = \frac{TVC(x_0)}{x_0}$ (Average Variable Cost).

ותנאי (3) יכתב עתה $P \ge AVC(x_0)$.

נניח שהמחיר בשוק הוא 4 ל"י ליחידה. פונקצית ההוצאה השולית של פירמה א' היא

$$MC_1(x) = x^2 - 2x + 1$$

של פירמה ב'

$$MC_2(x) = x^2 - 8x + 16$$

ושל פירמה ג'

$$MC_3(x) = x^2 - 14x + 49$$

פונקציות סך ההוצאות המשתנות של שלוש הפירמות תהיה

$$TVC_1(x) = \int_0^x (t^2 - 2t + 1)dt = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + t\right)\Big|_0^x =$$

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + x$$

$$TVC_2(x) = \int_0^x (t^2 - 8t + 16)dt = \left(\frac{t^3}{3} - 4t^2 + 16t\right)\Big|_0^x =$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x$$

$$TVC_3(x) = \int_0^x (t^2 - 14t + 49)dt = \left(\frac{t^3}{3} - 7t^2 + 49t\right)\Big|_0^x =$$

$$\frac{x^3}{3} - 7x^2 + 49x$$

ופונקציות ההוצאות הממוצעות המשתנות תהיינה

$$AVC_1(x) = \frac{\frac{x^3}{3} - x^2 + x}{x} = \frac{x^2}{3} - x + 1$$

$$AVC_2(x) = \frac{\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x}{x} = \frac{x^2}{3} - 4x + 16$$

$$AVC_3(x) = \frac{\frac{x^3}{3} - 7x^2 + 49x}{x} = \frac{x^2}{3} - 7x + 49$$

כל פירמה שמייצרת, מייצרת במצב בו $MC(x) = P$. מאחר שהמחיר הוא 4 ל"י ליחידה הרי ש

$$MC_1(x) = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

$$MC_2(x) = 4 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 4 \Rightarrow x_1 = 6 \ , \ x_2 = 2$$

$$MC_3(x) = 4 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 4 \Rightarrow x_1 = 9 \ , \ x_2 = 5$$

התנאי השני, היינו ש MC נמצאת בחלקה העולה יביא אותנו למסקנה הבאה: אם הפירמות תייצרנה, אזי הן תייצרנה את הכמויות הבאות: $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_3 = 9$.

נציב ערכים אלו בפונקציות ההוצאות הממוצעות המשתנות אותן חשבנו ונקבל

$$AVC_1(3) = \frac{3^2}{3} - 3 + 1 = 1 < 4$$

$$AVC_2(6) = \frac{6^2}{3} - 4 \cdot 6 + 16 = 4$$

$$AVC_3(9) = \frac{9^2}{3} - 7 \cdot 9 + 49 = 13 > 4$$

מסקנה: לפירמה א' יהיו רווחים, והיא תייצר 3 יחידות, לפירמה ב' לא יהיו רווחים אבל גם לא הפסדים, והיא תייצר 6 יחידות, ואילו לפירמה ג' יהיו הפסדים אם תייצר, ועל כן היא לא תייצר כלל.

<u>דוגמה 24</u>: כזכור, ערכן הנוכחי של a לירות שימסרו לנו בעוד t שנים ברבית רציפה 100r אחוזים בשנה הוא ae^{-rt}.

נניח שיש לנו אגרת חוב הנותנת לנו הכנסה קבועה של a ל"י לשנה במשך T שנים, וכמו כן נניח ששער הרבית הרציפה במשק היא r אחוזים לשנה. מהו ערכה הנוכחי של אגרת חוב זו ביום הקניה?

במשך יחידת הזמן $\left[t_0, t_0 + \frac{1}{n}\right]$ נקבל $\frac{a}{n}$ ל"י וערכן הנוכחי יהיה $\frac{a}{n}e^{-rt_0}$

נחלק את הזמן עד סוף השנה T ל $T \cdot n$ יחידות שאורך כל אחת מהן הוא $\frac{1}{n}$. הערך הנוכחי של זרם התקבולים יהיה

$$\sum_{i=1}^{T\cdot n} \frac{a}{n} e^{\frac{-ri}{n}}$$

ואם נשתמש בסמונים של סעיף א' ונציב $x_i = t_i$, $x_{T\cdot n+1} = T$, $t_i = \frac{i}{n}$, נקבל $f(t_i) = ae^{-rt_i}$

$$\sum_{i=1}^{T\cdot n} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{T\cdot n} \frac{a}{n} e^{\frac{-ri}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^T ae^{-rx}dx =$$

$$a\int_0^T e^{-rx}dx = \frac{a}{r}\left(-e^{-rx}\right)\Big|_0^T = -\frac{a}{r}e^{-rT} + \frac{a}{r}e^{-r\cdot 0} =$$

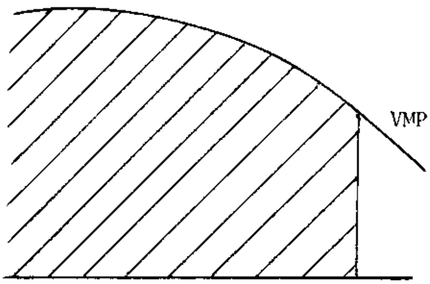
$$\frac{a}{r}(1 - e^{-rT}) \quad .$$

אם האגרת היא מסוג קונסול, הייגו אגרת חוב הנותנת a ל"י לשנה עד סוף כל הדורות יהיה ערכה המהוון

$$\lim_{T\to\infty} \frac{a}{r}(1 - e^{-rt}) = \frac{a}{r}(1 - 0) = \frac{a}{r} \quad .$$

<u>דוגמה 25</u>: עקומת VMP (Value of Marginal Product): כידוע, תהיה פירמה מוכנה לשלם לכל פועל את ערך תפוקתו השולית, כלומר שכר השווה לתפוקה השולית שהוא מייצר כפול מחירה בשוק, ומכאן אנו מקבלים את פונקצית הביקוש של הפירמה לעובדים.
מאחר שבתחרות מחיר המוצר קבוע ואנו מניחים תפוקה שולית עולה עד לנקודה מסויימת, ותפוקה שולית יורדת מנקודה זו ואילך, הרי שנקבל את עקומת VMP, היא עקומת הבקוש לעובדים שבציור 39.

ציור 39



מהו סך ערך התפוקה המיוצרת ע"י L_0 עובדים? ערך התפוקה של הפועל הראשון הוא VMP(1), של הפועל השני VMP(2), ושל הפועל ה n VMP(n). בסופו של דבר, ע"י חלוקה ליחידות עבודה קטנות וסכימה נקבל שסך ערך התפוקה המיוצרת ע"י L_0 פועלים הוא השטח שמתחת לעקומת VMP עד לנקודה L_0, דהיינו $\int_0^{L_0} VMP(x)dx$.

פרק ה': פונקציות של כמה משתנים

בשלושת הפרקים האחרונים עסקנו בפונקציות של משתנה יחיד, דהיינו בפונקציות המתאימות לכל מספר ממשי מספר אחר. לאורך פרקים אלו נתקלנו גם בדוגמאות כלכליות רבות, כגון פונקציות ייצור, פונקציות ביקוש, פונקציות היצע ועוד.

פונקצית ייצור למשל, היא פונקציה המתאימה לכל כמות של גורם היצור את כמות התפוקה הניתנת ליצור בעזרתו. התורה שפתחנו בפרקים האחרונים לא מאפשרת לנו לטפל במצבים בהם מוצר מיוצר באמצעות שני גורמי ייצור ויותר, ומטרתינו בפרק זה היא להרחיב את מושג הפונקציה ליותר ממשתנה אחד. ההוכחות בפרק זה יהיו בדרך כלל יותר מסובכות מאשר בפרקים הקודמים, ועל חלק מהן נוותר.

סעיף 1: מרחבי R^k

הגדרה 1: א. וקטור ממימד k מעל לממשיים הוא סדרה $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ של מספרים ממשיים. המספרים הללו יקראו הרכיבים (קואורדינטות בלעז) של הוקטור, כאשר המספר הראשון בסדרה הוא הרכיב הראשון, המספר השני הוא הרכיב השני וכו'.

ב. המרחב R^k הוא אוסף כל הוקטורים ממימד k מעל לממשילם.

סמון: נסמן וקטורים ע"י אות לטינית קטנה עם קו מתחתיה $\underline{a}$, $\underline{b}$ וכו', ואת הרכיב ה i של הוקטור $\underline{a}$ ע"י a_i. צורתו המפורשת של הוקטור $\underline{a}$ תהיה איפוא $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$. לעתים נתייחס אל $\underline{a}$ כאל נקודה, ואל R^k כאל מרחב של נקודות.

דוגמה 2:

א. המרחב R^2 הוא אוסף כל הזוגות הסדורים* של מספרים ממשיים (a_1,a_2). ניתן לזהות מרחב זה עם המישור כאשר הרכיב הראשון הוא שעורה האופקי של הנקודה, והרכיב השני הוא שעורה האנכי. לעתים נסמן את איברי מרחב זה ב (x,y) ולא ב (a_1,a_2).

---

* כלומר, שני הזוגות (1,2) ו (2,1) שונים זה מזה.

ב. המרחב R^3 הוא אוסף כל השלשות של מספרים ממשיים (a_1,a_2,a_3), והוא ניתן לזיהוי עם המרחב.

ג. נניח שיש בעולם k מוצרים שונים, ולכל אדם בעולם יש "סלי" מסויים המורכב מהמוצרים הללו. סל זה ניתן לכתיבה בצורת וקטור $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ שפרושו הוא שה"סלי" מכיל a_1 יחידות ממוצר מספר 1, a_2 יחידות ממוצר מספר 2,..., ו a_k יחידות ממוצר מספר k.

<u>הגדרה 3</u>: יהיו $\underline{a}$ ו $\underline{b}$ וקטורים ב R^k. נגדיר עליהם פעולה, שנכנה אותה בשם חבור, באופן הבא:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1,a_2,\ldots,a_k) + (b_1,b_2,\ldots,b_k) =$$

$$(a_1 + b_1 \,,\, a_2 + b_2,\ldots,a_k + b_k)$$

הסבר: $\underline{a} + \underline{b}$ הוא וקטור שהרכיב ה i שלו הוא הסכום של הרכיב ה i של $\underline{a}$ והרכיב ה i של $\underline{b}$. שים לב: פעולת החבור מוגדרת אך ורק על וקטורים הנמצאים באותו מרחב, ולכן אין לחבר וקטור מ R^2 עם וקטור מ R^3 וכדומה.

<u>דוגמה 4</u>:

א. $(2,3)+ (5,7) = (7,10)$

ב. $(-1,0,8) + (1,1.37,-5) = (0,1.37,3)$

ג. אם צרכן א' בעל סל המוצרים $\underline{a} = (a_1,a_2,\ldots,a_k)$ מתחתן עם צרכנית ב' בעלת סל המוצרים $\underline{b} = (b_1,b_2,\ldots,b_k)$ אזי סל המוצרים המשותף של הזוג הצעיר יהיה

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1 \,,\, a_2 + b_2,\ldots,a_k + b_k)$$

הוקטור $(0,0,\ldots,0)$ ייקרא בשם וקטור האפס, ויסמון ע"י $\underline{0}$. כפי שקל לראות, לכל וקטור $\underline{a}$ מתקיים

א. $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$

ב. $\underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$

ג. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{a} \Leftarrow \underline{b} = \underline{0}$

הגדרה 5: יהיו $\underline{a}$ ו $\underline{b}$ וקטורים ב R^k. נגדיר עליהם פעולה, שנכנה אותה בשם חסור, באופן הבא:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1 \ , \ a_2 - b_2, \ldots, a_k - b_k)$$

הגדרה 6: יהי $\underline{a}$ וקטור ב R^k, ויהי t מספר ממשי ("סקלר"). נגדיר עליהם פעולת "כפל בסקלר" באופן הבא:

$$t \cdot \underline{a} = t(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (ta_1, ta_2, \ldots, ta_k)$$

דוגמה 7:

א. $8 \cdot (1,4.5) = (8,36)$

ב. $-2.5 \cdot (4,0,-2) = (-10,0,5)$

ג. $0 \cdot (1,5,7,3,-3) = (0,0,0,0,0)$

טענה 8: יהיו $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו $\underline{c}$ וקטורים ב R^k, ויהיו t ו u מספרים ממשיים.

א. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

ב. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

ג. אם $\underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$ אזי $\underline{b} = (-1) \cdot \underline{a}$

ד. אם $t \cdot \underline{a} = \underline{0}$ ו $\underline{a} \neq \underline{0}$ (כלומר קיים i, $1 \leq i \leq k$, כך ש $a_i \neq 0$) אזי $= 0$

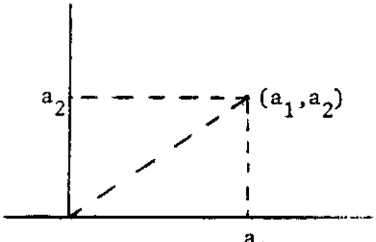
ה. $t \cdot (u \cdot \underline{a}) = (tu) \cdot \underline{a}$

ו. $t \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = t \cdot \underline{a} + t \cdot \underline{b}$

ז. $(t + u) \cdot \underline{a} = t \cdot \underline{a} + u \cdot \underline{a}$.

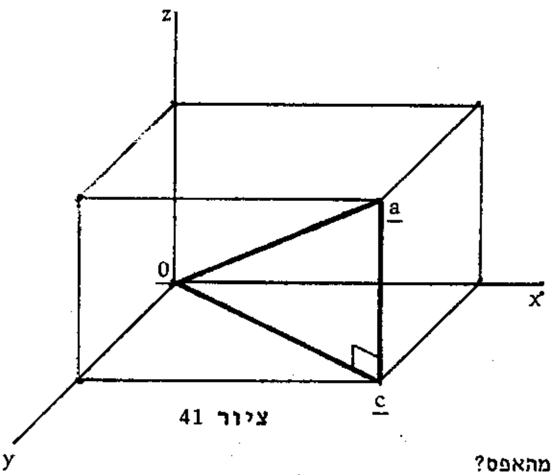
הוכחת טענה 8 מושארת לקורא.

עתה, משהגדרנו פעולות חבור וכפל בסקלר, נוכל להתחיל ללכת באותה דרך בה הלכנו כפרקים אי-גי כאשר טפלנו במספרים הממשיים, אשר בסמון החדש זהים למרחב R^1, כאשר המספר הממשי a מזוהה עם הוקטור החד מימדי (a).



ציור 40

בפרק אי הגדרנו ערך מוחלט של נקודה x, וציינו שערך מוחלט זה, $|x|$, הוא מרחקה של הנקודה x מהאפס. נעיין בציור 40. לפי משפט פיתגורס מרחקה של הנקודה (a_1,a_2) מהאפס הוא $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.



ציור 41

נעיין עתה בציור 41. זהו ציור של המרחב התלת מימדי. הצירים x ו y נמצאים במשור הדף, והציר z מאונך כביכול למישור הדף.

הנקודה a היא הנקודה (12,9,20). מהו מרחקה מהאפס?
הנקודה c היא ההיטל של הנקודה a על המשור xy , כלומר $\underline{c} = (12,9,0)$.
המרחק של c מ 0 הוא $\sqrt{12^2 + 9^2} = 15$. המשולש a c 0 הוא משולש ישר זווית ב c, ולכן המרחק של a מ 0 הוא $\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. קיבלנו איפוא שמרחקה של הנקודה (12,9,20) מהאפס שווה ל $\sqrt{12^2 + 9^2 + 20^2}$.

משמעות גיאומטרית זו משמשת כמוטיבציה להגדרה הבאה.

הגדרה 9: יהי $\underline{x}$ וקטור ב R^k. הנורמה של $\underline{x}$, שנסמנה ב $||\underline{x}||$, תהיה $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}$. המשמעות של הנורמה של $\underline{x}$ הינה כאמור המרחק של הוקטור $\underline{x}$ מהאפס.

שים לב: $||\underline{x}||$ הוא מספר ממשי, ולא וקטור.

טענה 10: א. $||\underline{x}|| = 0$ אם ורק אם $\underline{x} = \underline{0}$.

ב. $||\lambda \cdot \underline{x}|| = \lambda ||\underline{x}||$ לכל λ ממשי.

ג. $||\underline{x} + \underline{y}|| \le ||\underline{x}|| + ||\underline{y}||$

הוכחה:

א. $\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} = 0 \Rightarrow ||\underline{x}|| = 0$.

$||\underline{x}|| = 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = 0$. לכל i $x_i^2 \ge 0$,

ולכן כדי שהסכום יהיה שווה לאפס חייב כל אחד מהמחוברים להיות שווה לאפס. כלומר, לכל i חייב להתקיים $x_i = 0$, ובמילים אחרות $\underline{x} = \underline{0}$.

ב.

$$||\lambda \cdot \underline{x}|| = ||(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k)|| =$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\lambda^2 \cdot x_i^2)} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{k} x_i^2} =$$

$$\lambda \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} = \lambda ||\underline{x}||$$

ג. טענה זו תשאר ללא הוכחה. □

בפרק א' הגדרנו את המרחק בין שתי נקודות כערך המוחלט של הפרשן.
נגדיר אם כן ב R^k

הגדרה 11: יהיו $\underline{x}$ ו $\underline{y}$ שני וקטורים ב R^k. המרחק ביניהם, שנסמנו ב $d(\underline{x},\underline{y})$, יהיה $||\underline{x} - \underline{y}||$. (כזכור, זהו מספר ממשי, ולא וקטור!).

טענה 12: א. $d(x,y) = 0$ אם ורק אם $\underline{x} = \underline{y}$.

ב. לכל זוג וקטורים $\underline{x}$ ו $\underline{y}$ מתקיים $d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{y},\underline{x})$.

ג. לכל שלושה וקטורים $\underline{x}$, $\underline{y}$ ו $\underline{z}$ מתקיים

$$d(\underline{x},\underline{z}) \leq d(\underline{x},\underline{y}) + d(\underline{y},\underline{z})$$

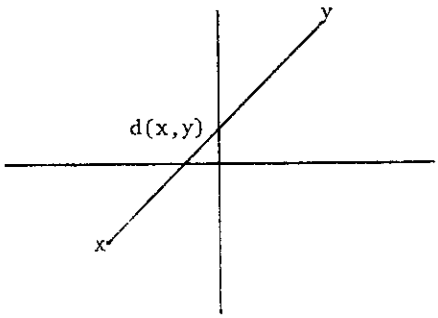
הוכחה: א.

$$d(\underline{x},\underline{y}) = 0 \iff$$

$$||\underline{x} - \underline{y}|| = 0 \iff \text{(לפי טענה 10 א')}$$

$$\underline{x} - \underline{y} = \underline{0} \iff$$

$$\underline{x} = \underline{y}$$



ציור 42

ב. $d(\underline{x},\underline{y}) = ||\underline{x} - \underline{y}|| = ||(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_k - y_k)|| =$

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} (y_i - x_i)^2 = ||\underline{y} - \underline{x}|| =$$

$$d(\underline{y},\underline{x})$$

ג. $d(\underline{x},\underline{z}) = ||\underline{x} - \underline{z}|| =$

$||(\underline{x} - \underline{y}) + (\underline{y} - \underline{z})|| \leq$ (לפי טענה 10 ג')

$$||\underline{x} - \underline{y}|| + ||\underline{y} - \underline{z}|| = d(\underline{x},\underline{y}) + d(\underline{y},\underline{z})$$

בפרק א' אמרנו שסדרת הנקודות על הישר $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול x_0 אם $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0) = 0$. באופן דומה נגדיר ב R^k התכנסות כדלקמן:

<u>הגדרה 13</u>: תהי $\{\underline{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת וקטורים ב R^k. אנו נאמר שסדרה זו מתכנסת לגבול $\underline{x}^0$ אם $\lim_{n\to\infty} d(\underline{x}^n,\underline{x}^0) = 0$. נסמן זאת ע"י $\lim_{n\to\infty} \underline{x}^n = \underline{x}^0$, או ע"י $\underline{x}^n \to \underline{x}^0$.

שים לב: הסדרה $\{\underline{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של וקטורים. הסדרה $\{d(\underline{x}^n,\underline{x}^0)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים, שעליה הגדרנו התכנסות לגבול בפרק א'.

הערה: הסימון $\underline{x}^n$ פירושו הוקטור שמספרו הסדורי בסדרה הוא n (ולא $\underline{x}$ בחזקת n). צורתו המפורשת של וקטור זה תהיה $\underline{x}^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n)$. גם כאשר נרצה לדבר על x_i בחזקת n נשתמש בסימון x_i^n, אך בכל מקרה יובן מההקשר למה הכוונה.

<u>דוגמה 14</u>: $\{\underline{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של וקטורים ב R^3 כאשר $\underline{x}^n = \left(1\ ,\ 2 + \frac{1}{n}\ ,\ \frac{5}{n}\right)$.

טענה: $\underline{x}^n \to (1\ ,\ 2\ ,\ 0)$.

הוכחה: נסמן: $\underline{x}^0 = (1,2,0)$.

$$\lim_{n\to\infty} d(\underline{x}^n,\underline{x}^0) = \lim_{n\to\infty}\left|\left|\left(1,2 + \frac{1}{n},\frac{5}{n}\right) - (1,2,0)\right|\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|\left(1 - 1,\ 2 + \frac{1}{n} - 2,\frac{5}{n} - 0\right)\right|\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|\left(0,\ \frac{1}{n}\ ,\ \frac{5}{n}\right)\right|\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(0\ +\frac{1}{n^2} + \frac{25}{n^2}\right)} = 0$$

<u>טענה 15</u>: תהי $\{\underline{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של וקטורים ב R^k. $\underline{x}^n \to \underline{x}^0$ אם ורק אם לכל i, $1 \le i \le k$, מתקיים $x_i^n \to x_i^0$.

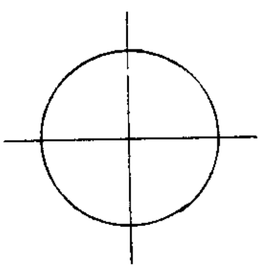
הסבר: הטענה טוענת ש $\underline{x}^n \to \underline{x}^0$ אם ורק אם הסדרה של מספרים ממשיים שהאיבר ה n שלה הוא הרכיב הראשון של הוקטור $\underline{x}^n$ מתכנסת ל x_1^0 (הרכיב הראשון של $\underline{x}^0$), הסדרה של מספרים ממשיים שהאיבר ה n שלה הוא הרכיב השני של הוקטור $\underline{x}^n$ מתכנסת ל x_2^0, ..., והסדרה של מספרים ממשיים שהאיבר ה n שלה הוא הרכיב k של הוקטור $\underline{x}^n$ מתכנסת ל x_k^0.

נקבל טענה זו ללא הוכחה.

תלמיד המתקשה בהבנת החומר יכול בקריאה ראשונה לדלג על המשך הסעיף, ולעבור לסעיף הבא.

תהי x נקודה ב R^1 (הוא ציר המספרים), ויהי $a > 0$. קימות בדיוק שתי נקודות שונות, $x + a$ ו $x - a$, שמרחקן מהנקודה x שווה ל a. בפרט, אם $x = 0$ אזי יש רק שתי נקודות, a ו $-a$, שערכן המוחלט שווה ל a. עובדה זו אפשרה לנו להגדיר על R^1 סדר באופן טבעי, כאשר כל מספר חיובי גדול מכל מספר שלילי ומהאפס, כל מספר שלילי קטן מכל מספר חיובי ומהאפס, הסדר בין המספרים החיוביים נקבע לפי ערכם המוחלט (שהרי לא קיימים שני מספרים חיוביים שונים בעלי אותו ערך מוחלט), והסדר בין המספרים השליליים נקבע בהיפוך לערכם המוחלט.

ב R^k אין זה כה פשוט להגדיר סדר. לכאורה ניתן להגדיר זאת באופן הבא: $\underline{x} > \underline{y}$ אם ורק אם $||\underline{x}|| > ||\underline{y}||$. מסתבר שבמקרה כזה יהיו איברים רבים שקולים. ב R^2 למשל תהיינה כל הנקודות על מעגל שמרכזו בראשית שקולות זו לזו (ציור 43).



ציור 43

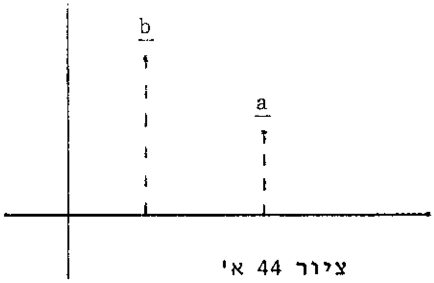
אם לעומת זאת נגדיר יחס סדר כך שלא יהיו בו נקודות שקולות, נאלץ לוותר על תכונות טובות אחרות. לדוגמה, נגדיר על R^2 (המישור) יחס סדר באופן הבא:

תהיינה $\underline{a} = (a_1, a_2)$ ו $\underline{b} = (b_1, b_2)$ שתי נקודות ב R^2. $\underline{a}$ תהיה גדולה מ $\underline{b}$ אם ורק אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

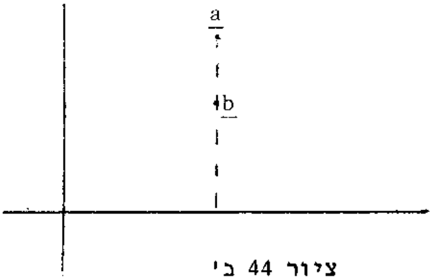
א. $a_1 > b_1$

ב. $a_1 = b_1$ ו $a_2 > b_2$

הסבר: נעביר דרך $\underline{a}$ ו $\underline{b}$ (ציור 44) ישרים מקבילים לציר ה y. אם $\underline{a}$ נמצאת על ישר הנמצא מימין לישר עליו נמצאת $\underline{b}$ אזי מתקיים תנאי א' (ציור 44 א'), ו $\underline{a}$ גדולה מ $\underline{b}$. אם הן נמצאות על אותו ישר אנכי, ו $\underline{a}$ נמצאת מעל ל $\underline{b}$ אזי מתקיים תנאי ב' (ציור 44 ב'), וגם אז $\underline{a}$ גדולה מ $\underline{b}$.



ציור 44 א'



ציור 44 ב'

מהגדרת הסדר נובע שהנקודה $(1,0)$ גדולה מכל אחת מהנקודות $\left(1 - \frac{1}{n},1\right)$, שהרי תנאי א' מתקיים. כפי שקל לראות, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n},1\right) = (1,1)$, ומתנאי ב' נובע שהנקודה $(1,1)$ גדולה מהנקודה $(1,0)$. אנו רואים איפוא שלמרות שהנקודה $(1,0)$ גדולה מכל איברי הסדרה, הרי שגבול הסדרה גדול ממש מ $(1,0)$, ועל כן לא נוכל להרחיב את טענה 27 שבפרק א' אפילו לא ל R^2 (כאשר יחס הסדר הוא כפי שהוגדר לעיל).

בעייה זו, דהיינו, כיצד ניתן לסדר את הנקודות של R^k הינה בעלת חשיבות רבה בכלכלה. לדוגמה, כל צרכן מדרג לפי העדפותיו את אוסף הסלים, ובכך הוא מגדיר למעשה סדר על R^k.

סעיף 2: פונקציות של כמה משתנים

בפרק ב' הגדרנו פונקציות על המספרים הממשיים. פונקציות אלו היו התאמות, שהתאימו לאיברים מציר המספרים מספרים ממשיים כלשהם.

תהי A קבוצה של וקטורים ב R^k. לכל איבר בקבוצה זו, כלומר, לכל וקטור שנמצא בקבוצה A, נתאים מספר ממשי. להתאמה כזו נקרא פונקציה מ R^k לתוך R (שהרי הפונקציה מתאימה לוקטורים מספרים ממשיים). הקבוצה A תיקרא תחום ההגדרה של הפונקציה.

נסמן זאת ע"י $f:A \to R$, ואם $A = R^k$ אזי נסמן $f:R^k \to R$.

לעיתים נקרא לפונקציה כזו פונקציה k - מימדית.

<u>דוגמה 16</u>:

א. יהי $x = (x_1,x_2,x_3)$. $f:R^3 \to R$ נתונה ע"י $f(\underline{x}) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

f מתאימה לכל וקטור $\underline{x} \in R^3$ את הממוצע החשבוני של הרכיבים שלו.

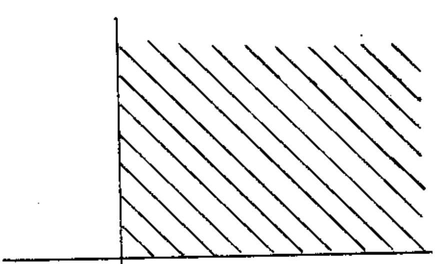
ב. $f:R^k \to R$ נתונה ע"י $f(\underline{x}) = x_1$. f מתאימה לכל וקטור $\underline{x} \in R^k$ את הרכיב הראשון שלו. פונקציה זו נקראת פונקצית ההטלה על הרכיב הראשון.

ג. באופן דומה, $f:R^k \to R$ הנתונה ע"י $f(\underline{x}) = x_i$ $(1 \leq i \leq k)$ נקראת פונקצית ההטלה על הרכיב ה i.

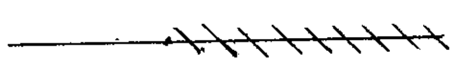
<u>סמון</u>: במקום לכתוב $f((x_1,\ldots,x_k))$ נכתוב $f(x_1,\ldots,x_k)$.

<u>הגדרה 17</u>: הרביע החיובי של R^k הוא אוסף כל הוקטורים $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ שכל הרכיבים שלהם אי שליליים. כלומר, לכל i, $1 \leq i \leq k$, מתקיים $x_i \geq 0$.

בציור 45 מופיעים הרביע החיובי של R (ציור 45 א') והרביע החיובי של R^2 (ציור 45 ב').



ציור 45 ב'



ציור 45 א'

סמון: הרביע החיובי של R^k יסומן ב R^k_+.

דוגמה 18: $f:R^2_+ \to R$ נתונה ע"י $f(\underset{\sim}{x}) = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$. f היא הממוצע ההנדסי של הרכיבים של הוקטור $\underset{\sim}{x}$.

במשק עם שני מוצרים נוכל לזהות את R^2_+ עם מרחב הסלים האפשריים. הפונקציה f שבדוגמה 18 תוכל במקרה כזה להיות פונקצית תועלת.

כאשר טפלנו בפונקציות מ R ל R מצאנו דרך גרפית נוחה על מנת להציג את הפונקציה באופן גיאומטרי, וזאת ע"י ציור גרף הפונקציה במערכת צירים דו-מימדית.

מאחר שפונקציה מR^2 ל R מתאימה לכל נקודה במישור מספר ממשי הרי שנוכל להרחיב הצגה זו למערכת צירים תלת-מימדית, כאשר על ציר ה z נמדוד את ערך הפונקציה בנקודה כגון (x,y) הנמצאת במישור xy. מאחר שפונקציה מ R^2 ל R מתאימה לכל נקודה במישור מספר ממשי הרי שגרף הפונקציה יהיה משטח.

דוגמה 19:

א. $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = 1$.

תאורה הגרפי של פונקציה זו הוא מישור המקביל למישור ה xy בגובה של יחידה אחת מעליו.

ב. $f:R^2_+ \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = \min\{x,y\}$.

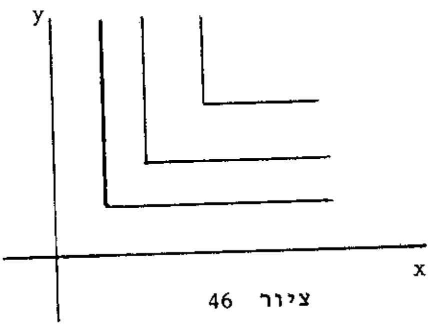
תאורה הגרפי של פונקציה זו הוא רבע פירמידה מרובעת אין סופית שבבסיסה על R^2_+.

על מנת להקל עלינו בתאורה הגרפי של פונקציה נגדיר את המושג הבא:

<u>הגדרה 20</u>: תהי A קבוצה של וקטורים ב R^k, ותהי $f:A \to R$ פונקציה כלשהי. אנו נאמר ששני הוקטורים $\underline{a}$ ו $\underline{b}$ הנמצאים בקבוצה A נמצאים על אותה עקומת שוות ערך של הפונקציה f אם ורק אם $f(\underline{a}) = f(\underline{b})$.

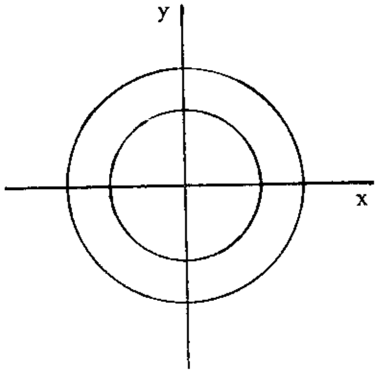
<u>דוגמה 21</u>:

א. נחזור לדוגמה 19. עקומת שוות ערך של הפונקציה $f:R^2 \to R$ הנתונה ע"י $f(x,y) = 1$ (דוגמה א') היא המישור כולו. עקומות שוות ערך של הפונקציה $f:R_+^2 \to R$ הנתונה ע"י $f(x,y) = \min\{x,y\}$ (דוגמה ב') הן השוקים האינסופיות של זויות שקדקודן על האלכסון הראשי של המישור xy (האלכסון שלאורכו $x = y$), ואשר שוקיהן מקבילות לציר ה x ולציר ה y. (ציור 46).



ציור 46

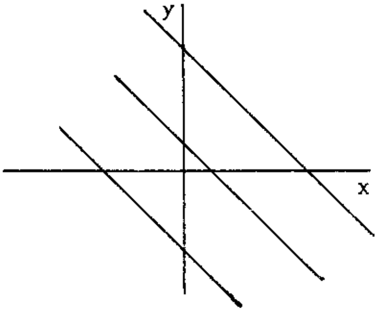
ב. $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
עקומות שוות ערך של פונקציה זו הן מעגלים במשור xy שמרכזם בראשית.
(ההוכחה לכך נובעת בקלות ממשפט פיתגורס, עיין ציור 47).



ציור 47

ג. $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = x^2 + y^2$.
עקומות שוות ערך של פונקציה זו תהיינה זהות לעקומות שוות ערך של הדוגמה הקודמת.

ד. $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = x + y$.
עקומות שוות ערך של פונקציה זו מצויירות בציור 48.



ציור 48

הערה: שים לב לכך שעקומות שוות ערך של פונקציה f מ R^2 ל R נמצאות במישור xy, ולא במרחב. למעשה, ציור עקומות שוות ערך של פונקציה הוא ציור מפה טופוגרפית של המשטח הנוצר על ידה.

מעתה, יקל עלינו לתת לפונקציה תאור גרפי, שהרי אנו יודעים כיצד נראים קוי הגובה שלה. כל שעלינו עוד לדעת הוא מהו ההפרש האנכי בין קבוצות של קווי גובה על מנת שנוכל לקבל מושג כלשהו על תאורה הגרפי של הפונקציה.

לדוגמה, תאורה הגרפי של הפונקציה שבדוגמה 21 ב' הוא חרוט הפוך אינסופי שקדקודו באפס, ושל הפונקציה שבדוגמה 21 ג' הוא גביע אינסופי ללא בסיס.

למונח "עקומות שוות ערך" חשיבות רבה בכלכלה. אנו מגדירים עקומות אדישות כעקומות שלאורכן תועלת הצרכן קבועה, עקומות שוות תפוקה כעקומות שלאורכן מיוצרת תפוקה קבועה בעזרת צרופים שונים של גורמי יצור, ועוד.

תהי f פונקציה דו-מימדית שתחום ההגדרה שלה ב R^2 והטווח שלה הוא קבוצה A המוכלת ב R, ותהי g פונקציה חד מימדית שתחום ההגדרה שלה הוא A והטווח שלה הוא R. הפונקציה h הנתונה ע"י $h(\underline{x}) = g(f(\underline{x}))$ היא פונקציה דו מימדית מתחום ההגדרה של f ל R.

<u>דוגמה 22</u>: $f:R_+^2 \to [0,\infty) \subset R$ נתונה ע"י $f(\underline{x}) = \ln(x_1+1) + \ln(x_2+1)$.
$g:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $g(z) = e^z$.

$$h(\underline{x}) = g(f(\underline{x})) = g(\ln(x_1+1) + \ln(x_2+1)) =$$

$$e^{\ln(x_1+1) + \ln(x_2+1)} = e^{\ln((x_1+1)(x_2+1)} =$$

$$(x_1+1)(x_2+1)$$

<u>טענה 23</u>: תהי $f:R^2 \to A \subset R$ פונקציה דו מימדית, ותהי $g:A \to R$ פונקציה חד מימדית. אם הפונקציה g היא פונקציה חד חד ערכית אזי עקומות שוות ערך של הפונקציה $h:R^2 \to R$ הנתונה ע"י $h(\underline{x}) = g(f(\underline{x}))$ זהות לעקומות שוות ערך של הפונקציה f.

הוכחה: עלינו להראות שלכל שתי נקודות $\underline{x}$ ו $\underline{y}$ ב R^2 מתקיים $f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ אם ורק אם $h(\underline{x}) = h(\underline{y})$. כזכור, פונקציה מונוטונית ממש היא פונקציה חד חד ערכית (פרק ב' טענה 14), ולכן

[הנקודות $\underline{x}$ ו $\underline{y}$ נמצאות על אותה עקומת שוות ערך של הפונקציה h] $\Rightarrow$

$h(\underline{x}) = h(\underline{y})$ $\Rightarrow$

$g(f(\underline{x})) = g(f(\underline{y}))$ $\Rightarrow$ (שהרי g חח"ע)

$f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ $\Rightarrow$

[הנקודות $\underline{x}$ ו $\underline{y}$ נמצאות על אותה עקומת שוות ערך של הפונקציה f]

הכוון ההפוך:

[הנקודות $\underline{x}$ ו $\underline{y}$ נמצאות על אותה עקומת שוות ערך של הפונקציה f] $\Rightarrow$

$f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ $\Rightarrow$

$g(f(\underline{x})) = g(f(\underline{y}))$ $\Rightarrow$

$h(\underline{x}) = h(\underline{y})$ $\Rightarrow$

[הנקודות $\underline{x}$ ו $\underline{y}$ נמצאות על אותה עקומת שוות ערך של הפונקציה h]

דוגמה 24: $f:R^2 \to [0,\infty) \subset R$ נתונה ע"י $f(x,y) = x^2 + y^2$. $g:[0,\infty) \to R$ נתונה ע"י $g(z) = e^z + \sqrt{z}$. g היא פונקציה מונוטונית עולה ממש, ולכן לפונקציה $h:R^2 \to R$ הנתונה ע"י $h(x,y) = e^{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}$ אותן עקומות שוות ערך כמו לפונקציה f, שכפי שכבר ראינו הן מעגלים שמרכזם בראשית.

דוגמה 24 מבהירה לנו את התועלת שבטענה 23, שהרי בלעדיה היינו מתקשים למדי במציאת עקומת שוות הערך של הפונקציה h שבדוגמה האחרונה.

בפרק ב' הגדרנו את מושג הגבול של פונקציה בנקודה, ואף הבאנו לכך שתי הגדרות שקולות. באופן דומה למה שעשינו שם נביא גם כאן שתי הגדרות שקולות למושג הגבול של פונקציה בנקודה, אך לא נוכיח את שקילותן.

הגדרה 25: תהי A קבוצה של וקטורים ב R^k, תהי $f:R^k \to R$ פונקציה k מימדית, ותהי $\underline{x}^0$ נקודה הנמצאת ב R^k. אנו נאמר שהפונקציה f מתכנסת בנקודה $\underline{x}^0$ לגבול ℓ אם לכל סדרה של וקטורים $\{\underline{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת

1) $\underline{x}^n \in A$ לכל n

2) $\underline{x}^n \neq \underline{x}^0$ לכל n

3) $\underline{x}^n \to \underline{x}^0$

מתקיים $f(\underline{x}^n) \to \ell$.

הגדרה 26: תהי A קבוצה של וקטורים ב R^k, ותהי $\underline{x}^0$ נקודה הנמצאת ב R^k. אנו נאמר שהפונקציה f מתכנסת לגבול ℓ בנקודה $\underline{x}^0$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_\varepsilon > 0$ כך שלכל וקטור $\underline{x} \in A$ המקיים $0 < d(\underline{x},\underline{x}^0) < \delta_\varepsilon$ מתקיים $|f(\underline{x}) - \ell| < \varepsilon$.

<u>סמון</u>: תהי f פונקציה k מימדית. אם ℓ הוא גבול הפונקציה f בנקודה $\underline{x}^0$ אזי נסמן זאת ע"י $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} f(\underline{x}) = \ell$ או ע"י $f(\underline{x}) \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{x}^0]{} \ell$.

נעבור עתה ונביא שתי הגדרות שקולות למושג רציפות הפונקציה בנקודה, אך לא נוכיח את שקילותן.

<u>הגדרה 27</u>: תהי A קבוצה של וקטורים ב R^k. הפונקציה $f:A \to R$ תיקרא רציפה בנקודה $\underline{x}^0$ $(\underline{x}^0 \in A)$ אם $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} f(\underline{x})$ קיים ושווה ל $f(\underline{x}^0)$.

<u>הגדרה 28</u>: תהי A קבוצה של וקטורים ב R^k. הפונקציה $f:A \to R$ תיקרא רציפה בנקודה $\underline{x}^0$ $(\underline{x}^0 \in A)$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_\varepsilon > 0$ כך שלכל וקטור $\underline{x} \in A$ המקיים $d(\underline{x},\underline{x}^0) < \delta_\varepsilon$ מתקיים $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0)| < \varepsilon$.

<u>הגדרה 29</u>: תהי A קבוצה של וקטורים ב R^k. הפונקציה $f:A \to R$ תיקרא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה ב A.

<u>דוגמה 30</u>:

א. $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(\underline{x}) = x_1 \cdot x_2$. תהי $\{\underline{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של וקטורים ב R^2 המתכנסת לגבול $\underline{x}^0$.

טענה: $f(\underline{x}^n) \to f(\underline{x}^0)$.

הוכחה: $f(\underline{x}^n) = x_1^n \cdot x_2^n$. כפי שציינו בטענה 15 אם $\underline{x}^n \to \underline{x}^0$ אזי $x_1^n \to x_1^0$ וכן $x_2^n \to x_2^0$. לפי טענה 29 שבפרק א' נקבל ש

$$f(\underline{x}^n) = x_1^n \cdot x_2^n \to x_1^0 \cdot x_2^0 = f(\underline{x}^0)$$

ב. $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(\underline{x}) = [x_1] + [x_2]$.

טענה: הפונקציה f לא רציפה בנקודה $\underline{0}$.

הוכחה: $f(\underline{0}) = [0] + [0] = 0 + 0 = 0$.

לפי טענה 15 דלעיל הסדרה $\left\{\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל $\underline{0}$, אבל לכל $n \geq 1$ מתקיים

$$f\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \left[-\frac{1}{n}\right] + \left[-\frac{1}{n}\right] = (-1) + (-1) = -2$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = -2 \neq 0 = f(\underline{0}).$$

* * *

<u>הגדרה 31</u>: הקבוצה $A \subset R^k$ תיקרא קבוצה סגורה, אם לכל סדרה מתכנסת לגבול של וקטורים $\{\underline{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$, שכל איבריה נמצאים בקבוצה A, מתקיים שגם הגבול נמצא ב A.

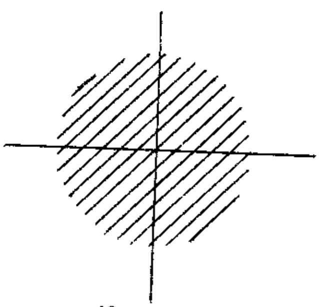
הסבר: ההגדרה דלעיל מוציאה מכלל אפשרות מצבים בהם קיימת סדרה מתכנסת שכל איבריה נמצאים בקבוצה סגורה A, אבל גבולה נמצא מחוץ לקבוצה. ההגדרה אינה טוענת שכל סדרה בקבוצה סגורה מתכנסת.

<u>הגדרה 32</u>: הקבוצה $A \subset R^k$ תיקרא קבוצה פתוחה אם לכל וקטור $\underline{x} \in A$ קיים מספר ממשי $\varepsilon_{\underline{x}} > 0$ כך שלכל וקטור $\underline{y} \in R^k$ שמקיים $d(\underline{y},\underline{x}) < \varepsilon_{\underline{x}}$ מתקיים $\underline{y} \in A$.

<u>דוגמה 33</u>:

א. הקטע $[a,b]$ ב R^1 הוא קבוצה סגורה.

ב. אוסף הנקודות (x,y) ב R^2 כך ש $x^2 + y^2 < 1$ הוא קבוצה פתוחה (ציור 49).



ציור 49

ג. R_{+}^{k} היא קבוצה סגורה.

ד. R^k היא קבוצה פתוחה וגם קבוצה סגורה.

ה. המספרים הרציונליים ב R^1 אינם קבוצה פתוחה ואף לא קבוצה סגורה.

הוכחה: ברור שהם לא קבוצה פתוחה, שהרי הם אינם מכילים קטע. הם גם לא קבוצה סגורה, שהרי הגבול של סדרת המספרים הרציונליים $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ (e) איננו רציונלי.

מכאן ואילך נעסוק אך ורק בקבוצות פתוחות או סגורות.

<u>הגדרה 34</u>: תהי A קבוצה ב R^k. הנקודה $\underline{x} \in A$ תיקרא נקודה פנימית של A אם קיים $\varepsilon_{\underline{x}} > 0$ כך שלכל נקודה $\underline{y} \in R^k$ המקיימת $d(\underline{y},\underline{x}) < \varepsilon_{\underline{x}}$ מתקיים $\underline{y} \in A$.

נקודה $\underline{x} \in A$ תיקרא נקודת קצה של A אם $\underline{x}$ איננה נקודה פנימית של A.

<u>דוגמה 35</u>:

א. A היא קבוצת הנקודות ב R^k שמרחקן מהאפס קטן או שווה ל 1. הנקודות הפנימיות הן הנקודות שמרחקן מהאפס קטן מ 1, ונקודות הקצה הן הנקודות שמרחקן מהאפס שווה ל 1.

ב. A היא קבוצת המספרים השלמים ב R^1 (הישר). לקבוצה זו אין נקודות פנימיות, וכל נקודותיה הן נקודות קצה.

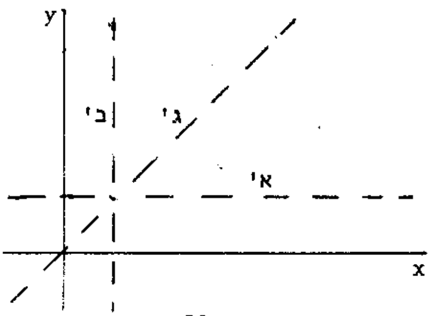
ג. A היא R^k. לקבוצה זו אין נקודות קצה, וכל נקודותיה הן נקודות פנימיות. ככלל, כל נקודותיה של קבוצה פתוחה הן נקודות פנימיות, כפי שנובע מהגדרת קבוצה פתוחה ומהגדרת נקודה פנימית.

סעיף 3: נגזרות חלקיות

בפרק ג', כאשר דברנו על פונקציה של משתנה יחיד,ציינו שסימן הנגזרת מאפשר לנו לדעת האם הפונקציה עולה או יורדת. מטרתינו בסעיף זה ובבאים אחריו היא לבדוק האם יש משמעות למושג העליה והירידה של פונקציה של כמה משתנים, ואם כן ננסה למצוא שיטה שתאפשר לנו לבדוק באופן נוח מתי פונקציה עולה או יורדת, וכן למצוא נקודות מכסימום ומינימום של פונקציה של כמה משתנים.

המונח "פונקציה עולה" או "פונקציה יורדת" הינו למעשה חסר מובן כאשר מדובר בפונקציה של כמה משתנים, כל עוד לא ציינו מהו כוון ההתקדמות. הדוגמה הבאה תבהיר נקודה זו.

דוגמה 36: $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y)\ x - y$. נצא מהנקודה $(1,1)$. אם נזוז במקביל לציר ה x (קו א' שבציור 50) נמצא שהפונקציה עולה, שהרי x גדל ו y לא משתנה. אם לעומת זאת ננוע במקביל לציר ה y (קו ב' שבציור) נמצא שהפונקציה יורדת, שהרי y גדל ו x לא משתנה. לבסוף, אם ננוע לאורך האלכסון הראשי (קו ג' שבציור) נמצא שהפונקציה לא עולה ולא יורדת.



ציור 50

נפתח איפוא ונגדיר

הגדרה 37: תהי A קבוצה של וקטורים ב R^2, תהי (x^o,y^o) נקודה פנימית של A, ותהי $f:A \to R$ פונקציה דו מימדית.

א. אם הגבול $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x^o + h,y^o) - f(x^o,y^o)}{h}$ קיים אזי הוא יקרא בשם המספר הנגזר של הפונקציה f בנקודה (x^o,y^o) לפי המשתנה הראשון (או "לפי x"),ויסומן באחד משלושת האופנים הבאים:

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x^o,y^o)$

2) $f_x(x^o,y^o)$ (במקומות מסויימים גם ע"י $f'_x(x^o,y^o)$)

3) $f_1(x^o,y^o)$ (במקומות מסויימים גם ע"י $f'_1(x^o,y^o)$)

ב. אם הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(x^o,y^o+h)-f(x^o,y^o)}{h}$ קיים אזי הוא ייקרא בשם המספר הנגזר של הפונקציה f בנקודה (x^o,y^o) לפי המשתנה השני (או "לפי y") ויסומן באחד משלושת האופנים הבאים:

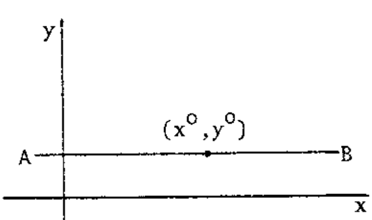
1) $\frac{\partial f}{\partial y}(x^o,y^o)$

2) $f_y(x^o,y^o)$ (במקומות מסויימים גם ע"י $f'_y(x^o,y^o)$)

3) $f_2(x^o,y^o)$ (במקומות מסויימים גם ע"י $f'_2(x^o,y^o)$)

הסבר: בעיין בחלק א' של הגדרה 37. בחלק זה y קבוע $(y = y^o)$ ואילו x משתנה, ולכן אנו יכולים להתייחס אל f כאל פונקציה של x בלבד, כאשר y היא פרמטר. באופן פורמלי נוכל להגדיר פונקציה $f^{y^o}:R\to R$ הנתונה ע"י $f^{y^o}(x) = f(x,y^o)$. במקרה כזה אנו רואים שהמספר הנגזר של הפונקציה f בנקודה (x^o,y^o) לפי המשתנה הראשון שווה למספר הנגזר של הפונקציה החד מימדית f^{y^o} בנקודה x^o.

תחום ההגדרה של הפונקציה f נמצא במישור, אך התנועות היחידות שמותר לנו לבצע בחלק א' של הגדרה 37 הן לאורך הקו המקביל לציר ה x והעובר דרך הנקודה (x^o,y^o) (קו AB שבציור 51). נעמיד מישור ניצב למישור הדף דרך קו זה. אם אינך מסוגל לדמיין זאת לעצמך, הנח שאנו בונים קיר דק ("בעובי אפס") כאשר המישור שבציור הוא הקרקע, והקו AB הוא בסיסו של הקיר. על קיר זה נשרטט את הפונקציה $f^{y^o}(x) = f(x,y^o)$ באופן הבא: לכל נקודה (x,y^o) על בסיסו של הקיר נחשב את המספר $f(x,y^o)$, ונסמן על הקיר נקודה בגובה זה מעל לנקודה (x,y^o).



ציור 51

המספר הנגזר בנקודה x^o של הפונקציה שהתקבלה על הקיר שווה למספר הנגזר של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x^o,y^o) לפי x.

באופן דומה נוכל לתאר את מובן המספר הנגזר של הפונקציה f בנקודה (x^o,y^o) לפי המשתנה השני.

נרחיב עתה את הגדרה 32 לפונקציה של k משתנים.

<u>הגדרה 38</u>: תהי A קבוצת נקודות ב R^k, תהי $\underline{x}^o=(x_1^o,\dots,x_k^o)$ נקודה פנימית של A ותהי $f:A\to R$ פונקציה k מימדית. אם הגבול

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1^o,\dots,x_{i-1}^o,x_i^o+h,x_{i+1}^o,\dots,x_k^o)-f(x_1^o,\dots,x_{i-1}^o,x_i^o,x_{i+1}^o,\dots,x_k^o)}{h}$$

קיים הוא ייקרא בשם המספר הנגזר של הפונקציה f בנקודה $\underline{x}^o$ לפי המשתנה ה i, ויסומן באחד משני האופנים הבאים:

1) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^o,\dots,x_k^o)$

2) $f_i(x_1^o,\dots,x_k^o)$ (במקומות מסויימים גם ע"י $f_i'(x_1^o,\dots,x_k^o)$).

נביא עתה מספר דוגמאות למושגים האחרונים שהגדרנו.

<u>דוגמה 39</u>:

א. $f:R^2\to R$ נתונה ע"י $f(x,y)=x-y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^o,y^o)=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^o,y^o)=-1$$

ב. $f:R^2\to R$ נתונה ע"י $f(x,y)=x^y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^o,y^o)=y^o x^{o\,y^o-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^o,y^o)=x^{o\,y^o}\ln x^o$$

ג. $f:R^k \to R$ נתונה ע"י $f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot x_i$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^o) = i$$

ד. $f:R^4 \to R$ נתונה ע"י $f(\underline{x}) = \frac{x_1 x_2 + x_3}{(x_4 + 1)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^o) = \frac{x_2^o}{(x_4^o + 1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^o) = \frac{x_1^o}{(x_4^o + 1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x}^o) = \frac{1}{(x_4^o + 1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4}(\underline{x}^o) = \frac{(-2)(x_1^o \cdot x_2^o + x_3^o)}{(x_4^o + 1)^3}$$

<u>הגדרה 40</u>: תהי $f:R^k \to R$ פונקציה של k משתנים. הפונקציה $g:R^k \to R$ הנתונה ע"י $g(\underline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ תיקרא בשם הנגזרת החלקית של הפונקציה f לפי המשתנה ה i, ותסומן ב f_i (במקומות מסויימים גם ע"י f_i').

<u>דוגמה 41</u>: $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = 3x^2y^3$, $g:R^2 \to R$ נתונה ע"י $g(x,y) = 6xy^3$ ו $h:R^2 \to R$ נתונה ע"י $h(x,y) = 9x^2y^2$. כפי שקל לראות $g = f_1$ ו $h = f_2$.

בפרק ג' ציינו שאם מוצר x מיוצר באמצעות גורם יצור a ופונקצית היצור היא $g(a)$,
אזי כאשר מיצרים בעזרת a^o יחידות a התפוקה השולית של a ביצור x שווה ל

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a^o + h) - g(a^o)}{h} = g'(a^o)$$

באופן דומה, אם מוצר x מיוצר באמצעות שני גורמי יצור a ו b, ופונקצית היצור היא
$x = f(a,b)$, אזי כאשר מיצרים בעזרת a^o יחידות a ו b^o יחידות b התפוקה השולית
של a ביצור x היא

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a^o + h\ ,\ b^o) - f(a^o,b^o)}{h} = f_1(a^o,b^o)$$

והתפוקה השולית של b ביצור x היא

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a^o,b^o + h) - f(a^o,b^o)}{h} = f_2(a^o,b^o)$$

<u>דוגמה 42:</u> פונקצית יצור קוב-דוגלס: $x = Aa^{\alpha}b^{\beta}$ (β,α,A - קבועים. b,a - משתנים)

$$f_1(a,b) = \alpha Aa^{\alpha-1}b^{\beta}$$

$$f_2(a,b) = \beta Aa^{\alpha}b^{\beta-1}$$

נניח ש $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $A = 1$. אם $a = b = 1$ אזי $x = 1$, $f_1(1,1) = \frac{1}{2}$,
$f_2(1,1) = \frac{1}{2}$. אם $a = 4$ ו $b = \frac{1}{4}$ אזי $x = 1$, אבל $f_1\left(4,\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$, $f_2\left(4,\frac{1}{4}\right) = 2$.

מסקנה: צרופים שונים של כמויות גורמי יצור עשויים לתת אותה תפוקה, אבל תפוקתם
השולית עשויה להשתנות ממצב למצב.

נחשב את גמישות פונקצית היצור לפי כל אחד משני גורמי היצור

$$\eta_{x,a} = \frac{f_1(a,b)\cdot a}{f(a,b)} = \frac{\alpha A a^{\alpha-1} b^{\beta}\cdot a}{A a^{\alpha} b^{\beta}} = \alpha$$

$$\eta_{x,b} = \frac{f_2(a,b)\cdot b}{f(a,b)} = \frac{\beta A a^{\alpha} b^{\beta-1}\cdot b}{A a^{\alpha} b^{\beta}} = \beta$$

אם $f:R^2 \to R$ היא פונקציה של שני משתנים הגזירה לפי x ולפי y, אזי גם שתי הפונקציות $f_1(x,y)$ ו $f_2(x,y)$ הינן פונקציות של שני משתנים, ובתור שכאלו נתעניין בנגזרותיהן החלקיות, אם הן קיימות.

בדרך כלל נהוג להשתמש בשתי מערכות הסמונים הבאות, המובאות בטבלה.

סמון א'	סמון ב'	פשר
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$f_{11}(x,y)$	$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$	$f_{12}(x,y)$	$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$	$f_{21}(x,y)$	$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$	$f_{22}(x,y)$	$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$

דוגמה 43: $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y)= x^y$

$$f_1(x,y) = yx^{y-1}$$

$$f_2(x,y) = x^y \ln x$$

$$f_{11}(x,y) = \frac{\partial(yx^{y-1})}{\partial x} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$f_{12}(x,y) = \frac{\partial(yx^{y-1})}{\partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$$

$$f_{21}(x,y) = \frac{\partial(x^y \ln x)}{\partial x} = yx^{y-1}\ln x + \frac{x^y}{x} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}$$

$$f_{22}(x,y) = \frac{\partial(x^y \ln x)}{\partial y} = x^y \ln^2 x$$

אנו רואים שבמקרה זה $f_{12} = f_{21}$. דבר זה נובע מהטענה הכללית הבאה, אותה לא נוכיח.

טענה 44: תהי f פונקציה דו מימדית. אם f_{12} ו f_{21} קיימות ורציפות אזי $f_{12} = f_{21}$.

מן הראוי לציין, שהבדיקה אם פונקציה של כמה משתנים היא רציפה או לא איננה פשוטה, וזאת משום שרציפות הפונקציה לפי כל אחד מהמשתנים, יתרה מזו, אפילו גזירות חלקית של הפונקציה לפי כל אחד מהמשתנים, עדיין איננה מבטיחה את רציפות הפונקציה, כפי שתוכיח הדוגמה הבאה.

דוגמה 45: $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq \underline{0} \\ 0 & (x,y) = \underline{0} \end{cases}$$

הסדרה $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $(0,0)$, והסדרה $\left\{f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1/n^2}{2/n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $\frac{1}{2}$, השונה מערך הפונקציה בנקודה הגבול $(f(\underline{0}) = 0)$. ברור אם כן שהפונקציה f לא רציפה בנקודה $\underline{0}$. נראה כעת כי ל f יש נגזרות חלקיות באפס.

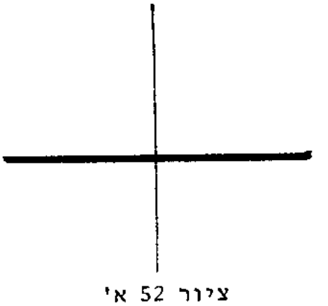
$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

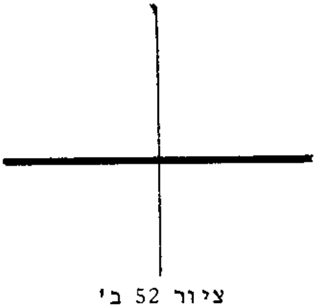
$$f_2(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

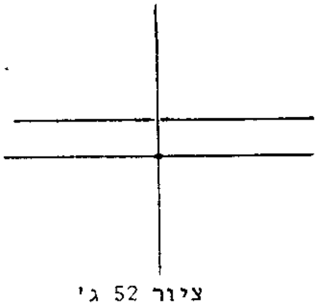
כלומר, גם העובדה שהנגזרות החלקיות קיימות בנקודה (ומכאן, לפי טענה 8 שבפרק ג' מתקבלת גם רציפות הפונקציה לפי כל אחד מהמשתנים), עדיין לא מבטיחה את רציפות הפונקציה בנקודה, וזאת בנגוד לפונקציה של משתנה יחיד, כאשר גזירות הפונקציה גררה את רציפותה.

עובדה זו תראה מתמיהה פחות אם נעיין בציור 52. בחלק א' מובא מישור הניצב למישור xy לאורך ציר ה x, בחלק ב' מובא מישור הניצב למישור xy לאורך ציר ה y, ובחלק ג' מובא מישור הניצב למישור xy לאורך האלכסון הראשי, הקו שלאורכו $x = y$. (באשר לבנית מישור ניצב, עיין לעיל בעמ' 188 בהסבר על בנית הקיר).

אנו רואים איפוא שהפונקציה אינה רציפה, כמוראה בחלק ג' של הציור.


ציור 52 א'


ציור 52 ב'


ציור 52 ג'

סעיף 4: פונקציות הומוגניות

נעיין בשתי הדוגמאות הבאות:

א. נניח משק בו שני מוצרים, x ו y. פונקצית בקוש של צרכן כלשהו למוצר x תהיה פונקציה של מחירי המוצרים, P_x ו P_y, ושל הכנסתו I. כלומר $D = f(P_x, P_y, I)$. כיצד תשתנה הכמות המבוקשת אם המחירים וההכנסה יחולקו ב 10, למשל ע"י החלפת המטבע המקומי במטבע חדש כך שעשר יחידות קודמות יהיו שוות ליחידה חדשה אחת?

ב. נניח שמוצר x מיוצר באמצעות שני גורמי יצור a ו b, כאשר פונקצית היצור היא $x = f(a,b)$. כיצד תשתנה הכמות המיוצרת אם כמויות שני גורמי היצור יוכפלו?

בדרך כלל נניח שבמקרה הראשון הכמות המבוקשת לא תשתנה. במקרה השני הכמות המיוצרת תלויה בתכונות פונקצית היצור, דהיינו, אם פונקצית היצור מקיימת תשואה עולה לגודל (ואז הכמות המיוצרת תגדל ביותר מפי 2), תשואה קבועה לגודל (ואז הכמות המיוצרת תוכפל), או תשואה יורדת לגודל (ואז הכמות המיוצרת תגדל בפחות מפי 2).

בסעיף זה נדון בשנויים בערך הפונקציה הנובעים מהכפלת המשתנים בקבוע.

הגדרה 46: תהי $A \subset R^k$. הפונקציה ה k מימדית $f:A \to R$ תיקרא הומוגנית מסדר p אם לכל מספר חיובי λ ולכל וקטור $\underline{x}$ כך שגם $\underline{x}$ וגם $\lambda \cdot \underline{x}$ נמצאים בתחום ההגדרה של f מתקיים

$$f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda^p f(\underline{x})$$

דוגמה 47:

א. לפי הנחותינו פונקצית הביקוש הומוגנית מסדר אפס $(\lambda^0 = 1)$.

ב. אם פונקצית היצור הומוגנית מסדר p אזי אם $p > 1$ הפונקציה מקיימת תשואה עולה לגודל אם $p = 1$ הפונקציה מקיימת תשואה קבועה לגודל אם $p < 1$ הפונקציה מקיימת תשואה יורדת לגודל.

ג. פונקצית יצור קוב דוגלס: $x = f(a,b) = Aa^{\alpha}b^{\beta}$

$$f(\lambda a,\lambda b) = A(\lambda a)^{\alpha}(\lambda b)^{\beta} = A\lambda^{\alpha}a^{\alpha}\lambda^{\beta}b^{\beta} =$$

$$\lambda^{\alpha+\beta}Aa^{\alpha}b^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}f(a,b)$$

כלומר f הומוגנית מסדר $\alpha + \beta$

ד. $f:R^k \to R$ נתונה ע"י $f(x_1,\dots,x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^7$

$$f(\lambda\cdot\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda x_i)^7 = \sum_{i=1}^{k} \lambda^7 x_i^7 = \lambda^7 \sum_{i=1}^{k} x_i^7 = \lambda^7 f(\underline{x})$$

כלומר f הומוגנית מסדר 7.

ה. $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = x^y$.

פונקציה זו אינה הומוגנית. הוכחה:

$$f(1,1) = 1^1 = 1$$

$$f(2\cdot(1,1)) = f(2,2) = 2^2 = 4 = 2^2\cdot f(1,1)$$

$$f(3\cdot(1,1)) = f(3,3) = 3^3 = 27 = 3^3\cdot f(1,1)$$

מסקנה: הפונקציה f אינה הומוגנית, שהרי אין p קבוע מתאים.

בסעיף 2 דברנו על הרכבת הפונקציה החד מימדית g על הפונקציה הדו מימדית f. נדון עתה במצב ההפוך, דהיינו המצב בו אנו מרכיבים פונקציה k מימדית על פונקציות חד מימדיות.

תהיינה $g^1:R \to R$, $g^2:R \to R$,...., $g^k:R \to R$ k פונקציות חד מימדיות, ותהי $f:R^k \to R$ פונקציה k מימדית. ההעתקה $h(t) = f(g^1(t),\dots,g^k(t))$ היא העתקה חד מימדית מ R לתוך R, וזאת משום שקיים רק משתנה אחד, והוא t.

דוגמה 48:

$g^1:R \to R$ נתונה ע"י $g^1(x) = x$

$g^2:R \to R$ נתונה ע"י $g^2(x) = 2x$

$\vdots$

$g^k:R \to R$ נתונה ע"י $g^k(x) = kx$

$f:R^k \to R$ נתונה ע"י $f(x_1,\dots,x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i$

הפונקציה $h:R \to R$ נתונה ע"י

$$h(t) = f(g^1(t),g^2(t),\dots,g^k(t)) = f(t,2t,\dots,kt) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} it = t\cdot \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)t}{2}$$

כלומר הפונקציה המורכבת h מתאימה לכל מספר t את המספר $\frac{k(k+1)t}{2}$.

נביא עתה טענה ללא הוכחה.

טענה 49: אם $g^1:R \to R$, $g^2:R \to R ,\dots, g^k:R \to R$ הן k פונקציות חד מימדיות גזירות, ו $f:R^k \to R$ היא פונקציה k מימדית הגזירה לפי כל אחד מהמשתנים, אזי הפונקציה $h:R \to R$ הנתונה ע"י

$$h(t) = f(g^1(t), g^2(t),\dots,g^k(t))$$

גזירה אף היא, ומתקיים

$$h'(t) = f_1(g^1(t),g^2(t),\dots,g^k(t))g^{1\prime}(t) + f_2(g^1(t),g^2(t),\dots,g^k(t))g^{2\prime}(t) +\dots+$$

$$f_k(g^1(t),g^2(t),\dots,g^k(t))g^{k\prime}(t)$$

הסבר: המספר הנגזר של הפונקציה h בנקודה t שווה למספר הנגזר של הפונקציה f לפי המשתנה הראשון בנקודה $(g^1(t),g^2(t),\dots,g^k(t))$ כפול המספר הנגזר של הפונקציה g^1 בנקודה t, פלוס המספר הנגזר של הפונקציה f לפי המשתנה השני בנקודה $(g^1(t),g^2(t),\dots,g^k(t))$ כפול המספר הנגזר של הפונקציה g^2 בנקודה t, וכו'.

דוגמה 50:

א. נעיין שנית בדוגמה 48. בדוגמה זו כזכור $g^i(t) = it$, $i = 1,\dots,k$ ואילו

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$g^{i\prime}(t) = i$$

$$f_i(x_1,\dots,x_k) = 1$$

ובסימונים של טענה 49 נקבל עתה

$$h'(t) = (f(g^1(t),\dots,g^k(t))' = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + \dots + 1\cdot k = \frac{k(k+1)}{2}$$

כזכור, $h(t) = \frac{k(k+1)t}{2}$, ואמנם

$$h'(t) = \frac{k(k+1)}{2}$$

ב. $g^1:R \to R$ נתונה ע"י $g^1(t) = t^2$

$g^2:R \to R$ נתונה ע"י $g^2(t) = e^t$

$f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = xy$

$$h(t) = f(g^1(t),g^2(t)) = f(t^2,e^t) = t^2e^t$$

$$h'(t) = 2te^t + t^2e^t = te^t(2 + t)$$

נגזור עתה את h לפי הכלל שבטענה 49. מאחר ש $f_1(x,y) = y$ ו $f_2(x,y) = x$,
וכן $g^{1\prime}(t) = 2t$, $g^{2\prime}(t) = e^t$ הרי שנקבל

$$h'(t) = f_1(g^1(t),g^2(t))g^{1\prime}(t) + f_2(g^1(t),g^2(t))g^{2\prime}(t) =$$

$$g^2(t)g^{1\prime}(t) + g^1(t)g^{2\prime}(t) = e^t\cdot 2t + t^2e^t = te^t(2 + t)$$

והתוצאה זהה לתוצאה הקודמת.

נעזר עתה בטענה 49 כדי להוכיח את המשפט הבא

<u>משפט 51 (אוילר):</u> אם הפונקציה $f:R^2 \to R$ הומוגנית מסדר 1 וגזירה לפי כל אחד מהמשתנים אזי

$$f(x,y) = xf_1(x,y) + yf_2(x,y)$$

הוכחה: יהי (x^o,y^o) וקטור כלשהו. עלינו להראות כי
$f(x^o,y^o) = x^of_1(x^o,y^o) + y^of_2(x^o,y^o)$. נגדיר פונקציה חדשה $h:R \to R$ באופן הבא:

$$h(\lambda) = f(\lambda x^o,\lambda y^o)$$

מאחר שהנגזרת של λx^o לפי λ שווה ל x^o והנגזרת של λy^o לפי λ שווה ל y^o הרי שמטענה 49 נובע כי

$$h'(\lambda) = f_1(\lambda x^o,\lambda y^o)x^o + f_2(\lambda x^o,\lambda y^o)y^o$$

בפרט, עבור $\lambda = 1$ נקבל

$$(1) \quad h'(1) = f_1(x^o,y^o)x^o + f_2(x^o,y^o)y^o$$

מצד שני, מאחר שלפי ההנחה הפונקציה f הומוגנית מסדר ראשון, הרי ש

$$h(\lambda) = f(\lambda x^o,\lambda y^o) = \lambda f(x^o,y^o)$$

ולכן $h'(\lambda) = f(x^o,y^o)$. בפרט עבור $\lambda = 1$ נקבל

$$(2) \quad h'(1) = f(x^o,y^o)$$

מהשוואת (1) ו (2) נקבל

$$f(x^o,y^o) = x^of_1(x^o,y^o) + y^of_2(x^o,y^o) \qquad \square$$

<u>דוגמה 52</u>: מוצר x מיוצר באמצעות שני גורמי יצור, A ו B, ופונקצית היצור $f:R_+^2 \to R$ הומוגנית מסדר 1. כזכור, השכר המשולם עבור כל גורם יצור הוא ערך תפוקתו השולית. כפי שראינו, התפוקה השולית של גורם יצור A היא $f_1(a,b)$, וזו של גורם יצור B היא $f_2(a,b)$. אם מועסקות a יחידות מגורם יצור A אזי סך התשלום עבורן הוא $a\cdot f_1(a,b)$, ובאופן דומה אם מועסקות b יחידות מגורם היצור B אזי התשלום עבורן הוא $bf_2(a,b)$, ולכן סך התשלום עבור גורמי היצור הוא $af_1(a,b) + bf_2(a,b)$. מאחר שהפונקציה f הומוגנית מסדר 1 הרי שלפי משפט אוילר

$$f(a,b) = af_1(a,b) + bf_2(a,b)$$

כלומר, התפוקה $f(a,b)$ מתחלקת כולה כתשלום עבור גורמי היצור.

<u>סעיף 5: נקודות מכסימום ומינימום</u>

<u>הגדרה 53</u>: תהי A קבוצה ב R^k, ותהי $f:A \to R$ פונקציה k מימדית. הנקודה $\underline{x} \in A$ תיקרא נקודת

א. מכסימום גלובלי של f אם לכל נקודה $\underline{y} \in A$ מתקיים $f(\underline{x}) \geq f(\underline{y})$.

ב. מינימום גלובלי של f אם לכל נקודה $\underline{y} \in A$ מתקיים $f(\underline{x}) \leq f(\underline{y})$.

ג. מכסימום לוקלי של f אם $\underline{x}$ נקודה פנימית של A, וקיים $\varepsilon_{\underline{x}} > 0$ כך שלכל נקודה $\underline{y} \in R^k$ המקיימת $d(\underline{x},\underline{y}) < \varepsilon_{\underline{x}}$ מתקיים $f(\underline{x}) \geq f(\underline{y})$.

ד. מינימום לוקלי של f אם $\underline{x}$ נקודה פנימית של A, וקיים $\varepsilon_{\underline{x}} > 0$ כך שלכל נקודה $\underline{y} \in R^k$ המקיימת $d(\underline{x},\underline{y}) \leq \varepsilon_{\underline{x}}$ מתקיים $f(\underline{x}) \leq f(\underline{y})$.

<u>דוגמה 54:</u>

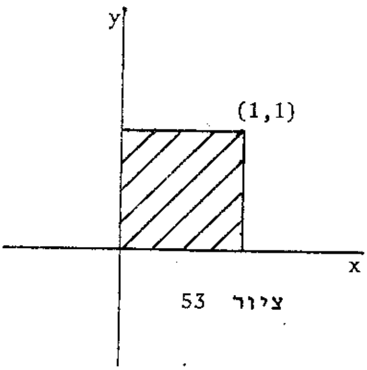
א. $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = -x^2 - y^2$. הנקודה $\underline{0}$ היא נקודת מכסימום גלובלי, שהרי לכל נקודה (x,y) מתקיים

$$f(\underline{0}) = 0 \geq -x^2 - y^2 = f(x,y)$$

הנקודה $\underline{0}$ היא נקודה פנימית של R^2 (מאחר ש R^2 פתוחה הרי שכל נקודותיה הן נקודות פנימיות) ולכן $\underline{0}$ היא גם נקודת מכסימום לוקלי.

ב. הקבוצה $A \subset R^2$ היא הרבוע שקדקודיו $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ (ציור 53).

$f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = x + y$. הנקודה $(1,1)$ היא נקודת מכסימום גלובלי, אבל אינה נקודת מכסימום לוקלי, שהרי הנקודה $(1,1)$ אינה נקודה פנימית של A. באופן דומה, הנקודה $(0,0)$ היא נקודת מינימום גלובלי, אבל אינה נקודת מינימום לוקלי.



ציור 53

מטרתינו בסעיף זה ובבאים אחריו היא למצוא תנאים לכך שנקודה תהיה נקודת מכסימום לוקלי או נקודת מינימום לוקלי של פונקציה.

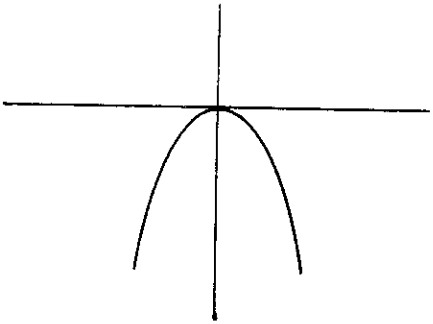
<u>טענה 55:</u> תהי A קבוצה ב R^k, תהי $f:A \to R$ פונקציה k מימדית, ותהי $\underline{x}^o = (x_1^o,\dots,x_k^o)$ נקודה פנימית של A. אם $\underline{x}^o$ היא נקודת מכסימום לוקלי או נקודת מינימום לוקלי של הפונקציה f אזי לכל i, $1 \leq i \leq k$, מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^o) = 0$.

הוכחה: נסמן ב A_i את קבוצת הנקודות x ב R כך ש $(x_1^o,\dots,x_{i-1}^o,x,x_{i+1}^o,\dots,x_k^o) \in A$.
x_i^o היא נקודה פנימית של A_i, כלומר קיים קטע פתוח ש x_i^o במרכזו הנמצא כולו בקבוצה A_i. נגדיר פונקציה חד מימדית $g_i:A_i \to R$ באופן הבא:
$g_i(x) = f(x_1^o,\dots,x_{i-1}^o,x,x_{i+1}^o,\dots,x_k^o)$. כזכור, תנאי הכרחי לכך שהנקודה x_i^o, שהיא נקודה פנימית של A_i, תהיה נקודת מכסימום לוקלי או נקודת מינימום לוקלי של הפונקציה g_i היא שיתקיים $g_i'(x) = 0$ (פרק ג' טענה 37). לפי הגדרת הפונקציה g_i תנאי זה פירושו שיתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^o) = 0$. □

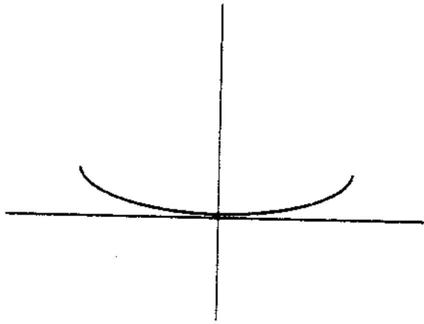
הערות:

א. הדרישה ש $\underline{x}^o$ תהיה נקודה פנימית של הקבוצה A היא חיונית. הנקודה $(1,1)$ שבדוגמה 54 ב' היא נקודת מכסימום (אומנם לא לוקלי) למרות ש $f_1(1,1) = f_2(1,1) = 1$.

ב. התנאי שהובא לעיל (טענה 55) היא תנאי הכרחי בלבד, ואיננו תנאי מספיק. נניח שהמשטח המתאר את הפונקציה הדו מימדית $f:A \to R$ יוצר צורת אוכף של סוס. אם נחתוך את האוכף במרכזו לאורך גב הסוס נקבל חתך כמוראה בציור 54 א', ובנקודה x^o נגזרת הפונקציה אותה חתך זה מתאר שווה לאפס. אם נחתוך את האוכף במרכזו לרוחב גב הסוס נקבל חתך כמוראה בציור 54 ב', ובנקודה y^o נגזרת הפונקציה אותה חתך זה מתאר שווה לאפס. במילים אחרות, שתי הנגזרות החלקיות של הפונקציה הדו מימדית f בנקודה (x^o,y^o) שוות לאפס, ואף על פי כן (x^o,y^o) איננה נקודת מכסימום ואף איננה נקודת מינימום, אלא מה שנהוג לכנות בשם נקודת אוכף, כלומר נקודה שבכוון אחד היא נקודת מינימום (לאורך גב הסוס) ובכוון שני היא נקודת מכסימום (לרוחב גב הסוס). [הפונקציה $f:R^2 \to R$ שבציור 54 (בעמוד הבא) נתונה ע"י $f(x,y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2$.]



ציור 54 ב' -
לרוחב גב הסוס



ציור 54 א' -
לאורך גב הסוס

נביא עתה תנאי מספיק לכך שנקודה תהיה נקודת מכסימום לוקלי או בקודת מינימום לוקלי של פונקציה דו מימדית.

טענה 56: תהי A קבוצה ב R^2, תהי $f:A \to R$ פונקציה הגזירה פעמיים לפי כל אחד מהמשתנים ומקיימת $f_{12} = f_{21}$, ותהי $\underline{x}^0$ נקודה פנימית ב A.

א. אם מתקיימים שלוש התנאים הבאים

1) $f_1(\underline{x}^0) = f_2(\underline{x}^0) = 0$

2) $f_{11}(\underline{x}^0) < 0$ או $f_{22}(\underline{x}^0) < 0$

3) $f_{11}(\underline{x}^0)f_{22}(\underline{x}^0) - [f_{12}(\underline{x}^0)]^2 > 0$

אזי הנקודה $\underline{x}^0$ היא נקודת מכסימום לוקלי של הפונקציה f.

ב. אם מתקיימים תנאי 1 ו 3 דלעיל, ובמקום תנאי 2 מתקיים

'2) $f_{11}(\underline{x}^0) > 0$ או $f_{22}(\underline{x}^0) > 0$

אזי הנקודה $\underline{x}^0$ היא נקודת מינימום לוקלי של הפונקציה f.

הוכחת הטענה חורגת ממסגרתה של חוברת זו.

הערה: אם תנאי 3 מתקיים אזי לא יכול להיות שיתקיים $f_{11}(\underline{x}^0) > 0$ ו $f_{22}(\underline{x}^0) < 0$ או $f_{11}(\underline{x}^0) < 0$ ו $f_{22}(\underline{x}^0) > 0$, שהרי אז יתקיים $f_{11}(\underline{x}^0)f_{22}(\underline{x}^0) < 0$, ומאחר ש $[f_{12}(\underline{x}^0)]^2 \geq 0$ הרי שיתקיים $f_{11}(\underline{x}^0)f_{22}(\underline{x}^0) - [f_{12}(\underline{x}^0)]^2 < 0$ בסתירה לתנאי 3.

נביא עתה טענה נוספת ללא הוכחה.

טענה 57: תהי A קבוצה ב R^2, תהי $f:A \to R$ פונקציה דו מימדית הגזירה פעמים לפי כל אחד מהמשתנים והמקיימת $f_{12} = f_{21}$, ותהי $\underline{x}^0$ נקודה פנימית ב A. תנאי הכרחי לכך שהנקודה $\underline{x}^0$ תהיה נקודת מכסימום לוקלי או נקודת מינימום לוקלי של הפונקציה f הוא שיתקיים

$$f_{11}(\underline{x}^0)f_{22}(\underline{x}^0) - [f_{12}(\underline{x}^0)]^2 \geq 0$$

נסיים סעיף זה בטענה הבאה, שגם אותה לא נוכיח.

טענה 58: תהי $A \subset R^k$ קבוצה סגורה וחסומה (היינו קיים $\alpha \geq 0$ כך שלכל זוג נקודות $x,y \in A$ מתקיים $d(x,y) \leq \alpha$). אם הפונקציה ה k מימדית $f:A \to R$ היא פונקציה רציפה, אזי קיימת נקודה $\underline{x} \in A$ בה הפונקציה f מקבלת מכסימום גלובלי, וקיימת נקודה $\underline{y} \in A$ בה הפונקציה f מקבלת מינימום גלובלי.

סעיף 6: דוגמאות

דוגמה 59: $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$

$$f_1(x,y) = 2(x^2 + y^2)\cdot 2x - 2\cdot 2x = 4x(x^2 + y^2 - 1)$$

$$f_2(x,y) = 2(x^2 + y^2)\cdot 2y - 2\cdot 2y = 4y(x^2 + y^2 - 1)$$

$$f_{11}(x,y) = 12x^2 + 4y^2 - 4$$

$$f_{12}(x,y) = 8xy$$

$$f_{21}(x,y) = 8yx$$

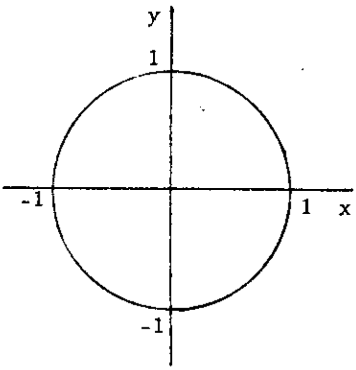
$$f_{22}(x,y) = 4x^2 + 12y^2 - 4$$

$f_{12} = f_{21}$, תחום ההגדרה של f הוא R^2 שכל נקודותיו הן נקודות פנימיות, ועל כן נעזר בטענות 55 ו 56. הנקודות (x,y) בהן מתקיים $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$ הן הנקודות (x,y) הפותרות את מערכת המשוואות

$$(1) \quad 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

$$(2) \quad 4y(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

נקודות אלו הן $x = y = 0$, וכן כל הנקודות (x,y) המקיימות $x^2 + y^2 = 1$, דהיינו כל הנקודות הנמצאות על מעגל ברדיוס אחד שמרכזו באפס (ציור 55).



ציור 55

$$f_{11}(0,0) = -4 < 0$$

$$f_{11}(0,0)f_{22}(0,0) - [f_{12}(0,0)]^2 = (-4)(-4) - 0 = 16 > 0$$

הנקודה $(0,0)$ מקיימת את התנאים 1-3 שבטענה 56, ולכן היא נקודת מכסימום לוקלי. היא אינה נקודת מכסימום גלובלי שהרי $f(2,2) = (2^2 + 2^2)^2 - 2(2^2 + 2^2) + 1 = 49$.
הנקודות האחרות החשודות כנקודות מכסימום או מינימום הן הנקודות (x,y) המקיימות $x^2 + y^2 = 1$. מטענה 55 נובע שאין נקודות מכסימום או מינימום אחרות. תהי איפוא (x,y) נקודה כך ש $x^2 + y^2 = 1$.

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

לכל נקודה $(x,y) \in R^2$ מתקיים

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = ((x^2 + y^2) - 1)^2 \geq 0$$

ולכן כל נקודה (x,y) המקיימת $x^2 + y^2 = 1$ היא נקודת מינימום לוקלי וגם נקודת מינימום גלובלי.

<u>דוגמה 60</u>: פירמה בתחרות מיצרת מוצר x באמצעות שני גורמי יצור a ו b. אנו נניח שפונקצית היצור $f:R_+^2 \to R$ גזירה פעמים ומקיימת

1) $f_{12} = f_{21}$
2) $f_{11} < 0$
3) $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$

מאחר שהפירמה בתחרות הרי שמחיר x וכן מחירי גורמי היצור P_x , P_a , P_b (בהתאמה) קבועים ונתונים לפירמה.

סך התקבולים של הפירמה הוא xP_x, וסך ההוצאות הוא $aP_a + bP_b$. נציב $x = f(a,b)$ ונקבל את פונקצית הרווח $\pi:R_+^2 \to R$ הנתונה ע"י

$$\pi(a,b) = f(a,b)P_x - aP_a - bP_b$$

$$\pi_1(a,b) = f_1(a,b)P_x - P_a$$

$$\pi_2(a,b) = f_2(a,b)P_x - P_b$$

$$\pi_{11}(a,b) = f_{11}(a,b)P_x$$

$$\pi_{12}(a,b) = f_{12}(a,b)P_x$$

$$\pi_{21}(a,b) = f_{21}(a,b)P_x$$

$$\pi_{22}(a,b) = f_{22}(a,b)P_x$$

הנקודות הפנימיות החשודות כנקודות מכסימום הן הנקודות בהן הנגזרות החלקיות π_1 ו π_2 מתאפסות, כלומר הנקודות (a,b) בהן מתקיים

$$(1) \quad f_1(a,b)P_x - P_a = 0$$

$$(2) \quad f_2(a,b)P_x - P_b = 0$$

לפי הנתון $f_{12} = f_{21}$, ולכן $\pi_{12} = \pi_{21}$.

מאחר ש $P_x > 0$ ולפי הנתון $f_{11} < 0$ הרי ש $\pi_{11} < 0$, ומאחר ש $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$ ו $P_x \neq 0$ הרי ש

$$\pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 = f_{11}P_x \cdot f_{22}P_x - (f_{12}P_x)^2 =$$

$$(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)P_x^2 > 0$$

בנקודה (a,b) המקיימת את תנאים (1) ו (2) דלעיל מתקיימים שלושת התנאים של טענה 56 א', ולכן נקודה זו היא נקודת מכסימום רווח.

מהו פרושם הכלכלי של תנאי (1) ו (2)?

מאחר ש $f_1(a,b)$ היא התפוקה השולית של a ביצור x (נמדד ביחידות x) הרי ש $f_1(a,b)P_x$ הוא ערכה בלי"י של תפוקה שולית זאת, ובאופן דומה $f_2(a,b)P_x$ הוא ערכת של התפוקה השולית של גורם היצור b ביצור x. משמעותם הכלכלית של התנאים (1) ו (2) היא שערך התפוקה השולית של כל גורם יצור שווה למחירו.

דוגמה 61: אדם מעונין לבנות תיבה בנפח 8 מטר מעוקב, כך ששטח הפנים שלה יהיה מינימלי, וזאת על מנת לחסוך בעץ לבניה. אם נניח שעובי הדפנות קטן כרצונינו ("אפס"), מה צריכות להיות מידות התיבה המבוקשת?

נסמן את אורכה, רוחבה וגובהה של התיבה ב x y ו z בהתאמה. אם נפחה הוא 8 מטר מעוקב אזי

$$xyz = 8$$

כלומר

$$z = \frac{8}{xy}$$

שטח הפנים של התיבה הוא

$$2xy + 2xz + 2yz$$

ואם נציב $z = \frac{8}{xy}$ נקבל ששטח הפנים של התיבה הוא

$$2xy + \frac{16}{y} + \frac{16}{x}$$

נסמן ב A את קבוצת הנקודות ב R^2 ששני הרכיבים שלהן חיוביים (כגון (5,7) ו (0.3,1) אבל לא (-1,3) ואף לא (0,8)). אנו מחפשים איפוא נקודת מינימום לפונקציה הדו מימדית $f:A \to R$ הנתונה ע"י $f(x,y) = 2xy + \frac{16}{y} + \frac{16}{x}$.

$$f_1(x,y) = 2y - \frac{16}{x^2}$$

$$f_2(x,y) = 2x - \frac{16}{y^2}$$

$$f_{11}(x,y) = \frac{32}{x^3}$$

$$f_{12}(x,y) = 2$$

$$f_{21}(x,y) = 2$$

$$f_{22}(x,y) = \frac{32}{y^3}$$

מאחר שכל נקודותיה של הקבוצה A הן נקודות פנימיות הרי שהנקודות החשודות כנקודות מינימום הן הנקודות בהן הנגזרות החלקיות מתאפסות,דהיינו הנקודות $(x,y) \in A$ בהן מתקיים

$$(1) \quad 2y - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{x^2}$$

$$(2) \quad 2x - \frac{16}{y^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{y^2}$$

נציב את (1) ב (2) ונקבל

$$x = \frac{8}{\left(\frac{8}{x^2}\right)^2} = \frac{8}{\frac{64}{x^4}} = \frac{8x^4}{64} = \frac{x^4}{8} \Rightarrow$$

$$x^3 = 8 \Rightarrow$$

$$x = 2$$

וע"י הצבת $x = 2$ ב (1) נקבל $y = 2$.

כפי שראינו $f_{12} = f_{21}$, ולכן נעזר בטענה 56 ב' על מנת לגלות האם הנקודה (2,2) היא נקודת מינימום

$$f_{11}(2,2) = \frac{32}{2^3} = 4 > 0$$

$$f_{11}(2,2)f_{22}(2,2) - [f_{12}(2,2)]^2 =$$

$$4 \cdot 4 - 4 = 12 > 0$$

ולכן הנקודה (2,2) היא אכן נקודת מינימום של הפונקציה f. כזכור $z = \frac{8}{xy}$,
ולכן מידות התיבה שנפחה 8 מטר מעוקב ששטח הפנים שלה הוא מינימלי הן 2 × 2 × 2.

סעיף 7: מכסימום ומינימום תחת אלוץ; שיטת כופלי לגרנזי

תהיינה A ו B קבוצות חלקיות של R^2 כך ש $A \subset B$, תהי $f:B \to R$ פונקציה דו מימדית ונניח שאנו מעונינים למצוא את הנקודות בהן הפונקציה f מקבלת מכסימום על פני הקבוצה A. כלומר, אנו מעונינים למצוא את הנקודות $\underline{x} \in A$ המקיימות $f(\underline{x}) \geq f(\underline{y})$ לכל $\underline{y} \in A$.

<u>סימון:</u> נסמן את הבעיה דלעיל באופן הבא

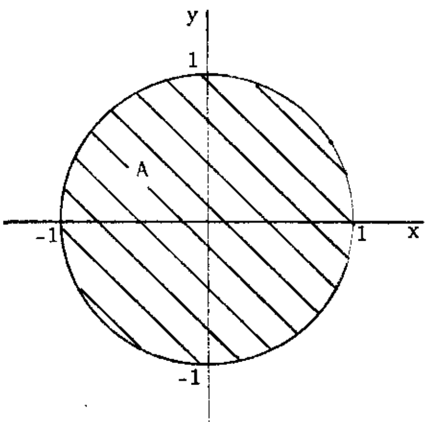
$$\max f(\underline{x})$$
$$\text{s.t. } \underline{x} \in A$$

ובמילים: מכסימום $f(\underline{x})$ תחת האילוץ $\underline{x} \in A$.

<u>דוגמה 62:</u>

א. $f:R^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = (|x| + 1)^y$.
הקבוצה A היא העגול ברדיוס 1 שמרכזו באפס (ציור 56).בעית מציאת המכסימום לפונקציה f על פני הקבוצה A תכתב באופן הבא:

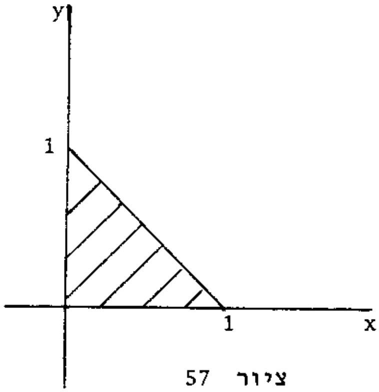
$$\max f(x,y)$$
$$\text{s.t. } x^2 + y^2 \leq 1$$



ציור 56

ב. $f:R_+^2 \to R$ נתונה ע"י $f(x,y) = xy$.
הקבוצה A היא המשולש שקודקודיו הם
$(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ (ציור 57).
בעית מציאת המכסימום לפונקציה f על
פני הקבוצה A תכתב באופן הבא:

$$\max f(x,y)$$
$$\text{s.t. } x + y \le 1 \ , \ x \ge 0 \ , \ y \ge 0$$



ציור 57

מטרתינו בסעיף זה היא להציג שיטה למציאת נקודות מכסימום ומינימום של פונקציה דו מימדית תחת תנאי אילוץ. שיטה זו טובה רק למקרים בהם האילוץ ניתן להכתב כמשוואה, ולא כאי שוויון, כפי שהיו האילוצים בדוגמה 62.

<u>דוגמה 63</u>: פירמה מיצרת מוצר x באמצעות שני גורמי יצור a ו b שמחיריהם, P_a ו P_b בהתאמה, קבועים. מהי הכמות המכסימלית של מוצר x שניתן ליצר תחת האילוץ שההוצאה על גורמי היצור תהיה A לירות?

האילוץ יכתב באופן הבא:

$$aP_a + bP_b - A = 0$$

<u>טענה 64</u>: תהי $f:R^2 \to R$ פונקציה הגזירה פעמים לפי כל אחד מהמשתנים,
תהי $g:R^2 \to R$ פונקציה הגזירה פעמים לפי כל אחד מהמשתנים
ותהי $A \subset R$ קבוצת הנקודות המקיימות $g(x,y) = 0$.
הפונקציה $L:R^3 \to R$ הגזירה פעמים לפי כל אחד מהמשתנים נתונה ע"י

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

תהי (x^o,y^o) נקודה בקבוצה A.

א. אם קיים λ^o כך ש

$$(1) \quad L_1(x^o,y^o,\lambda^o) = 0$$

$$(2) \quad L_2(x^o,y^o,\lambda^o) = 0$$

$$(3) \quad L_3(x^o,y^o,\lambda^o) = 0$$

$$(4) \quad ((g_1g_2(L_{12} + L_{21}) - g_2^2L_{11} - g_1^2L_{22})(x^o,y^o) > 0$$

אזי הנקודה (x^o,y^o) היא נקודת מכסימום של הפונקציה f על פני הקבוצה A.

ב. אם קיים λ^o כך ש

$$(1) \quad L_1(x^o,y^o,\lambda^o) = 0$$

$$(2) \quad L_2(x^o,y^o,\lambda^o) = 0$$

$$(3) \quad L_3(x^o,y^o,\lambda^o) = 0$$

$$(4') \quad ((g_1g_2(L_{12} + L_{21}) - g_2^2\, L_{11} - g_1^2\, L_{22})(x^o,y^o) < 0$$

אזי הנקודה (x^o,y^o) היא נקודת מינימום של הפונקציה f על פני הקבוצה A.

אם הנקודה (x^o,y^o) היא נקודת מכסימום או מינימום של הפונקציה f על פני הקבוצה A
אזי מתקיימים תנאים (3) - (1) דלעיל.

הוכחה: חורגת ממסגרתה של חוברת זו.

הפונקציה L שבטענה תקרא בשם הלגרנזיאן של הפונקציה f, והמספר λ יקרא בשם
כופל לגרנזי.

על מנת להקל בשימוש בשיטה זו, ננסה לפשט את הביטויים שהופיעו בנסוח הטענה.

<u>טענה 65:</u> בסמוני הטענה הקודמת מתקיים

$$L_1(x,y,\lambda) = f_1(x,y) + \lambda g_1(x,y)$$

$$L_2(x,y,\lambda) = f_2(x,y) + \lambda g_2(x,y)$$

$$L_3(x,y,\lambda) = g(x,y)$$

$$L_{11}(x,y,\lambda) = f_{11}(x,y) + \lambda g_{11}(x,y)$$

$$L_{12}(x,y,\lambda) = f_{12}(x,y) + \lambda g_{12}(x,y)$$

$$L_{21}(x,y,\lambda) = f_{21}(x,y) + \lambda g_{21}(x,y)$$

$$L_{22}(x,y,\lambda) = f_{22}(x,y) + \lambda g_{22}(x,y)$$

הוכחה: מושארת כתרגיל לקורא.

<u>מסקנה:</u> אם הפונקציה g נתונה ע"י $g(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ אזי הביטוי

$$((g_1 g_2(L_{12} + L_{21}) - g_2^2 L_{11} - g_1^2 L_{22})(x,y)$$

שווה ל

$$\alpha\beta(f_{12} + f_{21})(x,y) - \beta^2 f_{11} - \alpha^2 f_{22}$$

הוכחה: מושארת כתרגיל לקורא.

נביא עתה מספר שמושים לטענה 64.

<u>דוגמה 66:</u>

א. בסמוני דוגמה 63 בניח כי $f(a,b) = ab$, $A = 1$, $P_a = P_b = 1$, ואנו מחפשים

$$\max ab$$
$$\text{s.t. } a + b - 1 = 0$$

$$L(a,b,\lambda) = ab + \lambda(a + b - 1)$$

(1) $L_1(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow b + \lambda = 0 \Rightarrow b = -\lambda$

(2) $L_2(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow a = -\lambda$

(3) $L_3(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow a + b - 1 = 0$

והפתרון הוא $a = b = 0.5$, $\lambda = -0.5$.

נבדוק האם תנאי 4 מתקיימים. $f_{12} = f_{21} = 1$,$f_{11} = f_{22} = 0$, ומהמסקנה מטענה 65 נובע ש $(0.5,0.5)$ היא אכן נקודת מכסימום שהרי $1\cdot 1(1 + 1) > 0$.

ב. נפתור את דוגמה 63 עבור מקרה בו $f_{11} < 0$ ו $f_{22} < 0$. כלומר, נחפש

$$\max f(a,b)$$
$$\text{s.t. } aP_a + bP_b - A = 0$$

כאשר P_a ו P_b חיוביים, וידוע ש f_{11} ו f_{22} שליליים.

$$L(a,b,\lambda) = f(a,b) + \lambda(aP_a + bP_b - A)$$

(1) $L_1(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow f_1(a,b) + \lambda P_a = 0 \Rightarrow f_1(a,b) = -\lambda P_a$

(2) $L_2(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow f_2(a,b) + \lambda P_b = 0 \Rightarrow f_2(a,b) = -\lambda P_b$

(3) $L_3(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow aP_a + bP_b - A = 0$

<u>דוגמה 66:</u>

א. בסמוני דוגמה 63 נניח כי $f(a,b) = ab$, $A = 1$, $P_a = P_b = 1$, ואנו מחפשים

$$\max ab$$
$$s.t.\ a + b - 1 = 0$$

$$L(a,b,\lambda) = ab + \lambda(a + b - 1)$$

(1) $L_1(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow b + \lambda = 0 \Rightarrow b = -\lambda$

(2) $L_2(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow a = -\lambda$

(3) $L_3(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow a + b - 1 = 0$

והפתרון הוא $a = b = 0.5$, $\lambda = -0.5$.

נבדוק האם תנאי 4 מתקיים. $f_{12} = f_{21} = 1$,$f_{11} = f_{22} = 0$, ומהמסקנה מטענה 65 נובע ש $(0.5,0.5)$ היא אכן נקודת מכסימום שהרי $1\cdot1(1 + 1) > 0$.

ב. נפתור את דוגמה 63 עבור מקרה בו $f_{11} < 0$ ו $f_{22} < 0$. כלומר, נחפש

$$\max f(a,b)$$
$$s.t.\ aP_a + bP_b - A = 0$$

כאשר P_a ו P_b חיובים, וידוע ש f_{11} ו f_{22} שליליים.

$$L(a,b,\lambda) = f(a,b) + \lambda(aP_a + bP_b - A)$$

(1) $L_1(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow f_1(a,b) + \lambda P_a = 0 \Rightarrow f_1(a,b) = -\lambda P_a$

(2) $L_2(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow f_2(a,b) + \lambda P_b = 0 \Rightarrow f_2(a,b) = -\lambda P_b$

(3) $L_3(a,b,\lambda) = 0 \Rightarrow aP_a + bP_b - A = 0$

נחלק את משוואה (1) במשוואה (2) ונקבל

$$\frac{f_1(a,b)}{f_2(a,b)} = \frac{P_a}{P_b}$$

כפי שקל לראות תנאי (4) פרושו ש $2P_aP_b - P_b^2f_{11} - P_a^2f_{22} > 0$. דבר זה מתקיים, שהרי $P_a > 0$, $P_b > 0$, $f_{11} < 0$ ו $f_{22} < 0$.

מסקנה: בנקודת מכסימום של התוצר יחס התפוקות השוליות שווה ליחס מחירי גורמי הייצור.

נספח 1 : הוכחה באינדוקציה

בעיות

1. הוכח שלכל מספר טבעי n המספר $n^3 - n$ מתחלק ב 6.

2. הוכח שלכל מספר טבעי n

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. הוכח שלכל מספר טבעי n מתקיים

$$100^n \geq 4\cdot 5^{n+1}$$

בשלשת הבעיות דלעיל אנו מעוניינים להוכיח תכונה כלשהי, שתהיה נכונה לכל אחד מאיברי סדרה מסויימת. הסדרה הראשונה היא $\{n^3 - n\}_{n=1}^{\infty}$ והסדרה השנייה היא $\{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\}_{n=1}^{\infty}$. הבעיה השלישית ניתנת לכתיבה באופן הבא: הוכח שלכל מספר טבעי n מתקיים $100^n - 4\cdot 5^{n+1} \geq 0$, והסדרה המתאימה לבעיה זו היא $\{100^n - 4\cdot 5^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. לכאורה, כל אחת משלשת הבעיות דלעיל תזדקק לשיטת פתרון משלה.בנספח זה נציג שיטת פיתרון אחת שתהיה ישימה לכל שלושת הבעיות.

<u>שיטת ההוכחה באינדוקציה:</u> תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי. אם האיבר הראשון של הסדרה מקיים תכונה כלשהי, ומהעובדה ש n האיברים הראשונים של הסדרה מקיימים תכונה זו נובע שגם האיבר ה $n + 1$ מקיים אותה, אז כל איברי הסדרה מקיימים את התכונה.
הסבר: נוכיח למשל שהאיבר ה 613 בסדרה מקיים את התכונה. האיבר הראשון בסדרה מקיים אותה, ולכן גם האיבר השני. שני האיברים הראשונים בסדרה מקיימים את התכונה, ולכן גם האיבר השלישי. שלשת האיברים הראשונים..., 611 האיברים הראשונים בסדרה מקיימים את התכונה, ולכן גם האיבר ה 612 מקיים אותה. 612 האיברים הראשונים של הסדרה מקיימים את התכונה,ולכן גם האיבר ה 613 מקיים אותה.

באופן דומה, ניתן להראות שכל איבר מקיים את התכונה. שים לב לכך, שלמרות שיש בסדרה אינסוף איברים, הרי שמספרו הסדורי של כל איבר בסדרה הוא מספר סופי.

נפתור עתה את שלשת הבעיות שהצגנו לעיל בעזרת שיטה זו.

<u>פתרון בעיה 1</u>: עבור $n = 1$ הטענה אומרת ש $1^3 - 1$ מתחלק ב 6, והטענה כמובן נכונה.

נניח שהטענה נכונה עבור n האיברים הראשונים של הסדרה, ונוכיח שהיא נכונה גם עבור האיבר ה $n + 1$. נניח איפוא בפרט שהאיבר ה n, דהיינו $n^3 - n$, מתחלק ב 6, ונוכיח שגם $(n + 1)^3 - (n + 1)$ מתחלק ב 6.

נסמן: $a_n = n^3 - n$, $a_{n+1} = (n + 1)^3 - (n + 1)$. נוכיח ראשית כי $a_{n+1} - a_n$ מתחלק ב 6. ואמנם

$$a_{n+1} - a_n = (n + 1)^3 - (n + 1) - (n^3 - n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 - n^3 + n =$$

$$3n^2 + 3n = 3n(n + 1)$$

n ו $n + 1$ הם שני מספרים עוקבים, ולכן אחד מהם מתחלק ב 2, ולכן $3n(n + 1)$ מתחלק ב 6. $a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + a_n$. מאחר ששני המחוברים מתחלקים ב 6 הרי שגם סכומם, דהיינו a_{n+1}, מתחלק ב 6.

לפי שיטת ההוכחה באינדוקציה הטענה נכונה איפוא לכל n.

פתרון בעיה 2: עבור $n = 1$ הטענה אומרת ש $1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, ולכן עבור $n = 1$ הטענה נכונה. נניח שהיא נכונה עבור n האיברים הראשונים של הסדרה, ונוכיח שהיא נכונה גם עבור האיבר ה $n + 1$.

נניח איפוא בפרט שהטענה נכונה עבור האיבר ה n, כלומר נניח שמתקיים

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ונוכיח שמתקיים גם

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

ואמנם, לפי ההנחה

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + \frac{6(n^2 + 2n + 1)}{6} =$$

$$\frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$

$$\frac{(n+1)[(n+1)+1][(2(n+1)+1]}{6}$$

לפי שיטת ההוכחה באינדוקציה הטענה נכונה איפוא לכל n.

פתרון בעיה 3: עבור $n = 1$ הטענה אומרת ש $100^1 \geq 4\cdot 5^2$, ולכן עבור $n = 1$ הטענה נכונה. נניח שהיא נכונה עבור n האיברים הראשונים של הסדרה, ונוכיח שהיא נכונה גם עבור האיבר ה $n + 1$. נניח איפוא בפרט שהטענה נכונה עבור האיבר ה n, כלומר נניח שמתקיים $100^n \geq 4\cdot 5^{n+1}$, ונוכיח שמתקיים גם $100^{n+1} \geq 4\cdot 5^{(n+1)+1}$

ואמנם:

$$100^{n+1} = 100\cdot 100^n > 5\cdot 100^n \geq \quad \text{(לפי ההנחה)}$$

$$5\cdot 4\cdot 5^{n+1} = 4\cdot 5^{(n+1)+1}$$

לפי שיטת ההוכחה באינדוקציה הטענה נכונה איפוא לכל n.

<u>הערה</u>: זכור ואל תשכח לבדוק תמיד האם הטענה נכונה עבור האיבר הראשון, משום שאם היא אינה נכונה עבור האיבר הראשון הרי שלא הוכחת כלום, כפי שתוכיח הדוגמה הבאה.

<u>דוגמה 4</u>: הוכח שלכל מספר טבעי n המספר $2(3n+1)$ מתחלק ב 6.

"הוכחה": נניח שהטענה נכונה עבור n האיברים הראשונים של הסדרה, ונוכיח שהיא נכונה גם עבור האיבר ה $n+1$. מההנחה נובע אם כן ש $2(3n+1)$ מתחלק ב 6, ואנו רוצים להוכיח שגם $2(3(n+1)+1)$ מתחלק ב 6. נסמן: $a_n = 2(3n+1)$, $a_{n+1} = 2(3(n+1)+1)$.
כפי שהראינו בפתרון בעיה 1 מספיק להראות ש $a_{n+1} - a_n$ מתחלק ב 6. ואמנם

$$a_{n+1} - a_n = 2(3(n+1)+1) - 2(3n+1) =$$

$$6n + 6 + 2 - 6n - 2 = 6$$

6 כמובן מתחלק ב 6, ולכן גם a_{n+1} מתחלק ב 6, ולפי שיטת ההוכחה באינדוקציה הטענה נכונה לכל n.

האמנם? נבדוק מהם איברי הסדרה. הסדרה היא ...8,14,20,26, ואף אחד מאיבריה לא מתחלק ב 6.
הטעות נובעת כמובן מכך שלא בדקנו האם הטענה מתקיימת עבור $n = 1$. בדיקה זו, למרות שבדרך כלל היא פשוטה ביותר, חיונית!

נספח 2 : משפט הבינום של ניוטון

<u>סמון:</u> לכל n טבעי נסמן ב $n!$ (n עצרת) את מכפלת המספרים הטבעיים מ 1 עד n.
כלומר

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$$

<u>דוגמה 1:</u>

א. $1! = 1$

ב. $5! = 120$

ג. $10! = 3628800$

ד. $69! \approx 1.71122\cdot 10^{98}$

<u>סמון:</u> $0! = 1$

מהסימונים דלעיל נובע שלכל n טבעי מתקיים

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1)$$

$$n! = (n-1)!\cdot n$$

<u>סמון:</u> לכל מספר טבעי n ולכל מספר שלם k, $0 \le k \le n$, נסמן

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>טענה 2:</u> לכל n טבעי מתקיים $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

הוכחה:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1$$ □

טענה 3: לכל n טבעי ולכל $0 \le k < n$ מתקיים

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

הוכחה:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} =$$

$$\frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k)(k+1)} =$$

$$\frac{n!k + n! + n!n - n!k}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$ □

משפט 4 (משפט הבינום של ניוטון): יהיו a ו b מספרים ממשים כלשהם, ויהי n מספר טבעי. בתנאים אלו

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots +$$

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

הוכחה: נוכיח את המשפט באינדוקציה. עבור $n = 1$ המשפט טוען ש

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 =$$ (לפי טענה 2)

$$1\cdot a + 1\cdot b = a + b$$

והמשפט נכון ל $n = 1$.

נניח שהמשפט נכון עבור n האיברים הראשונים של הסדרה $\{(a + b)^n\}_{n=1}^{\infty}$,
ונוכיח שהוא נכון גם עבור האיבר ה $n + 1$. נניח איפוא בפרט שמתקיים

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^nb^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0b^n$$

ונוכיח שמתקיים גם

$$(a + b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{1} a^nb^1 + \dots + \binom{n+1}{0} a^0b^{n+1}$$

ואמנם:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n\cdot(a + b) = a(a + b)^n + b(a + b)^n =$$ (לפי ההנחה)

$$a\binom{n}{0} a^nb^0 + a\binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \dots + a\binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + a\binom{n}{n} a^0b^n +$$

$$b\binom{n}{0} a^nb^0 + b\binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \dots + b\binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + b\binom{n}{n} a^0b^n =$$

$$\binom{n}{0} a^{n+1}b^0+\binom{n}{1} a^nb^1 + \dots + \binom{n}{n} ab^n + \binom{n}{0} a^nb^1+ \binom{n}{1} a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0b^{n+1}$$

נשנה את סדר האיברים בביטוי האחרון ונקבל

$$\binom{n}{0} a^{n+1}b^0 + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] a^nb^1+ \dots +$$

$$\left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right]a^{n-k}b^{k+1} + \dots + \binom{n}{n} a^0b^{n+1}$$

לפי טענה 2 דלעיל $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$

ובעזרת טענה זו וטענה 3 נקבל שהביטוי האחרון שווה ל

$$\binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{1} a^nb^1 + \dots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k + \dots + \binom{n+1}{n+1} a^0b^{n+1}$$

לפי משפט ההוכחה באינדוקציה המשפט נכון אם כן לכל n.

<u>דוגמה 5</u>:

א. $(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^2b^0 + \binom{2}{1} a^1b^1 + \binom{2}{2} a^0b^2 =$

$a^2 + 2ab + b^2$

ב. $(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^3b^0 + \binom{3}{1} a^2b^1 + \binom{3}{2} a^1b^2 + \binom{3}{3} a^0b^3 =$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ג. $(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4b^0 + \binom{4}{1} a^3b^1 + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} a^0b^4 =$

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$