<u>מבוא לתורת המשחקים לתלמידי משפטים ופילוסופיה – פתרון תרגיל 9</u>

1. תחילה, נראה דוגמא ל- SPE בו שחקן 1 מקבל את כל היחידה.

נסתכל על צירוף האסטרטגיות הבא של שלושת השחקנים:

שחקן 1 מציע את החלוקה (1,0,0) , שחקן 2 מסכים לכל חלוקה , שחקן 3 מסכים לכל חלוקה בתנאי ששחקן 2 הסכים לפניו, ואחרת דוחה את ההצעה.

נראה שמתקיים שיווי משקל בכל תת-משחק. נסתכל תחילה על תתי-המשחק בהם פועל שחקן 3 לאחר ששחקן 2 הסכים להצעתו של שחקן 1. במקרה זה, אם שחקן 3 דוחה את ההצעה, התשלום שלו יהיה 0, ואם הוא מקבל את ההצעה תשלומו יהיה החלק שלו בחלוקה, שהינו תמיד לפחות 0. לכן בתתי-משחק אלה אופטימלי עבורו להסכים. בתתי-המשחק, בהם שחקן 3 פועל לאחר ששחקן 2 דחה את הצעתו של שחקן 1, התשלום של שחקן 3 יהיה 0 ללא תלות בפעולתו, כי החלוקה ממילא לא מתבצעת, לכן בפרט אופטימלי עבורו לדחות את ההצעה. עכשיו נסתכל על תתי-המשחק המתחילים בפעולתו של שחקן 2. אם שחקן 2 דוחה את ההצעה, תשלומו יהיה 0. אם הוא מסכים להצעה של שחקן 1 , תשלומו יהיה החלק שלו בחלוקה (כיוון ששחקן 3 יסכים אחריו). בגלל שחלקו בחלוקה הינו לפחות 0, אופטימלי עבור שחקן 2 להסכים לכל הצעה של שחקן 1. בהנתן ששחקנים 2 ו- 3 מסכימים לכל הצעה אחד אחרי השני, עבור שחקן 1 אופטימלי להציע את ההצעה שתתן לו את התשלום הגבוה ביותר, כלומר (1,0,0).

קיימים SPE נוספים, בהם שחקן 1 מקבל את כל היחידה. אם, למשל, נשנה את האסטרטגיה של שחקן 3 לאסטרטגיה בה, כאשר חלקו בחלוקה המוצעת הינו 0 והחלוקה שונה מ- (1,0,0) , הוא דוחה את ההצעה גם אם שחקן 2 הסכים לפניו, עדיין נקבל שיווי משקל בכל תת-משחק ותוצאת המשחק עדיין תהיה קבלת כל היחידה ע״י שחקן 1.

נראה שלא קיימים SPE בהם שחקן 1 אינו מקבל את כל היחידה.

נבדוק שני מקרים אפשריים:

1) נניח בשלילה שקיים SPE בו מתבצעת חלוקה $(x,y,1-x-y)$ כך שלא מתקיים $x=1$, כלומר $x<1$.

שחקן 1 יכול לסטות ולהציע חלוקה בה הוא מקבל x_1, כך ש- $x<x_1<1$ וכל אחד משני השחקנים האחרים מקבל קצת יותר מאפס כך שביחד השחקנים 2 ו- 3 מקבלים $1-x_1$. כיוון שמדובר ב- SPE, שחקנים 2 ו- 3 יסכימו להצעה זו. כלומר, בהנתן האסטרטגיות של השחקנים 2 ו- 3, שחקן 1 יכול להגדיל את התשלום שלו ע״י סטיה. בסתירה לכך שזהו SPE.

2) נניח בשלילה שקיים SPE בו לא מתבצעת חלוקה. בשיווי משקל כזה התשלום של שחקן 1 הינו 0. כדאי לשחקן 1 לסטות ולהציע חלוקה בה כל אחד משני השחקנים האחרים מקבל קצת יותר מאפס. כיוון

שמדובר ב- SPE, שחקנים 2 ו-3 יסכימו כל אחד בתורו להצעה כזו, והתשלום של שחקן 1 יגדל מ- 0 לקצת פחות מ- 1. בסתירה לכך שזהו SPE.

בסה״כ הראינו שתוצאת SPE היחידה במשחק זה היא כזו בה שחקן 1 מקבל את כל היחידה.

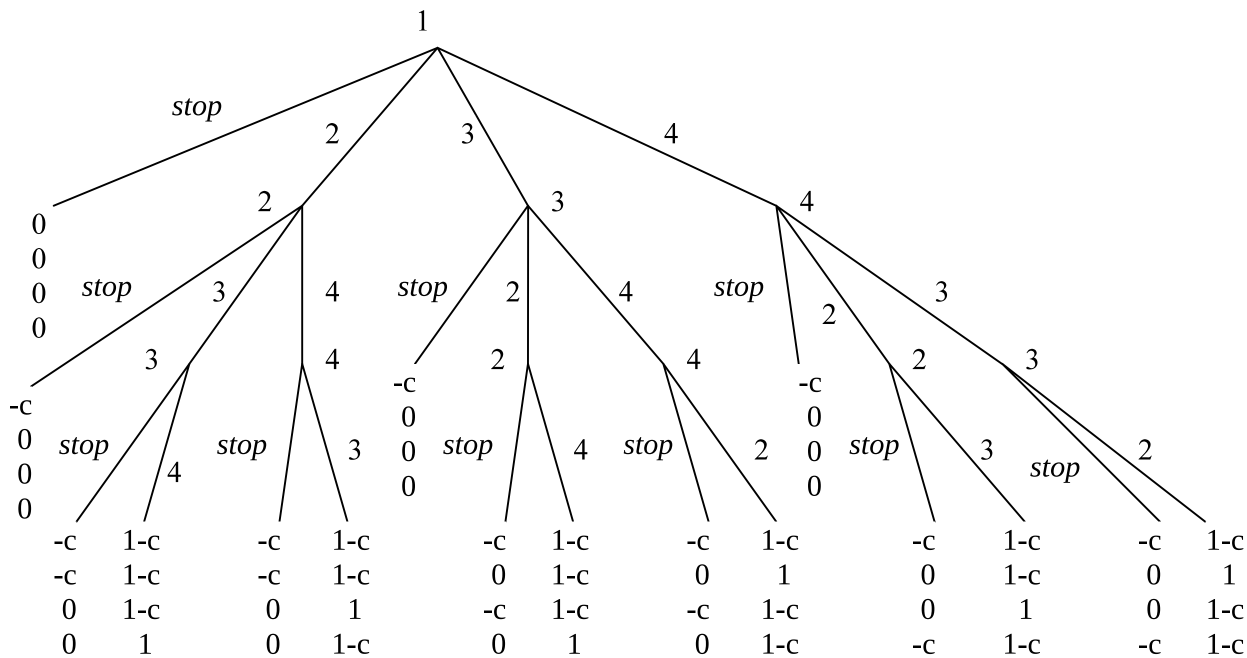
2. נרצה להראות שכל חלוקה של העוגה הנותנת לשחקן 1 לפחות c, הינה תוצאה של SPE כלשהו.
תהי חלוקה $(x,1-x)$, כך ש- $x \geq c$.
נסתכל על זוג האסטרטגיות הבא של השחקנים:
<u>אסטרטגיה של שחקן 1</u>: שחקן 1 תמיד מציע את החלוקה $(x,1-x)$, מסכים להצעה של $x-c$ ולכל הצעה הגבוהה ממנה, ומסרב לכל הצעה הנמוכה מ- $x-c$.
<u>אסטרטגיה של שחקן 2</u>: שחקן 2 תמיד מציע את החלוקה $(x-c,1-x+c)$, מסכים להצעה של $1-x$ ולכל הצעה הגבוהה ממנה, ומסרב לכל הצעה הנמוכה מ- $1-x$.
נשים לב שחלוקה המוצעת ע״י שחקן 2 הינה כשירה כיוון ש- $x-c \geq 0$ (מפני ש- $x \geq c$).

תחת האסטרטגיות הללו החלוקה של העוגה מתבצעת מיד (בתקופה 0) והתשלומים של שחקן 1 ו- 2 הם x ו- $1-x$ בהתאמה.

על מנת להראות שאסטרטגיות אלה מהוות SPE יש להראות שהן משרות שיווי משקל על כל תת-משחק של המשחק הכולל. הוכחה מדויקת הינה מסובכת במקצת ומעבר לחומר הנלמד, לכן ניתן הסבר בלבד.
תחילה, בכל תת-משחק, בהנתן האסטרטגיה של שחקן 2, עבור שחקן 1 להציע $(x,1-x)$ הינו אופטימלי.
לו הוא היה מציע לשחקן 2 חלק יותר גדול מהעוגה, שחקן 2 היה מסכים, והתשלום של שחקן 1 היה קטן.
לו היה מציע לשחקן 2 חלק יותר קטן מ- $1-x$, שחקן 2 היה דוחה הצעה זו, ובשלב הבא מציע לשחקן 1 רק $x-c$, כלומר שחקן 1 היה מקבל חלק יותר קטן מ- x וגם תקופה אחת אחרי, ולכן התשלום שלו היה אז נמוך יותר. לכן עבור שחקן 1 אופטימלי להציע תמיד $(x,1-x)$.
עכשיו נראה שבהנתן האסטרטגיה של שחקן 2, עבור שחקן 1 אופטימלי להסכים רק להצעה שהינה לפחות $x-c$. נניח ששחקן 2 מציע הצעה כלשהי לשחקן 1 בתקופה t. אם שחקן 1 דוחה הצעה זו, אזי בתקופה הבאה הוא יוכל להציע את החלוקה $(x,1-x)$ (שכאמור הינה ההצעה האופטימלית עבורו), שלה שחקן 2 יסכים, כלומר שחקן 1 יוכל לקבל חלק x מהעוגה בתקופה $t+1$. במונחי תקופה t חלק זה שווה לו $x-c$, ולכן אופטימלי עבורו להסכים לכל הצעה שהינה לפחות $x-c$.

באופן דומה מאוד, בהנתן האסטרטגיה של שחקן 1, אסטרטגיה של שחקן 2 הינה אופטימלית בכל תת-משחק.
לכן זוג אסטרטגיות זה הינו SPE.

3. (1) נצייר את עץ המשחק עבור $n=4$.



התשלומים בכל קודקוד סופי הם של השחקנים 1 עד 4, מלמעלה למטה.

(2) ננתח את ה- SPE עבור המקרה בו $n=4$. הניתוח יהיה זהה לכל n אחר.

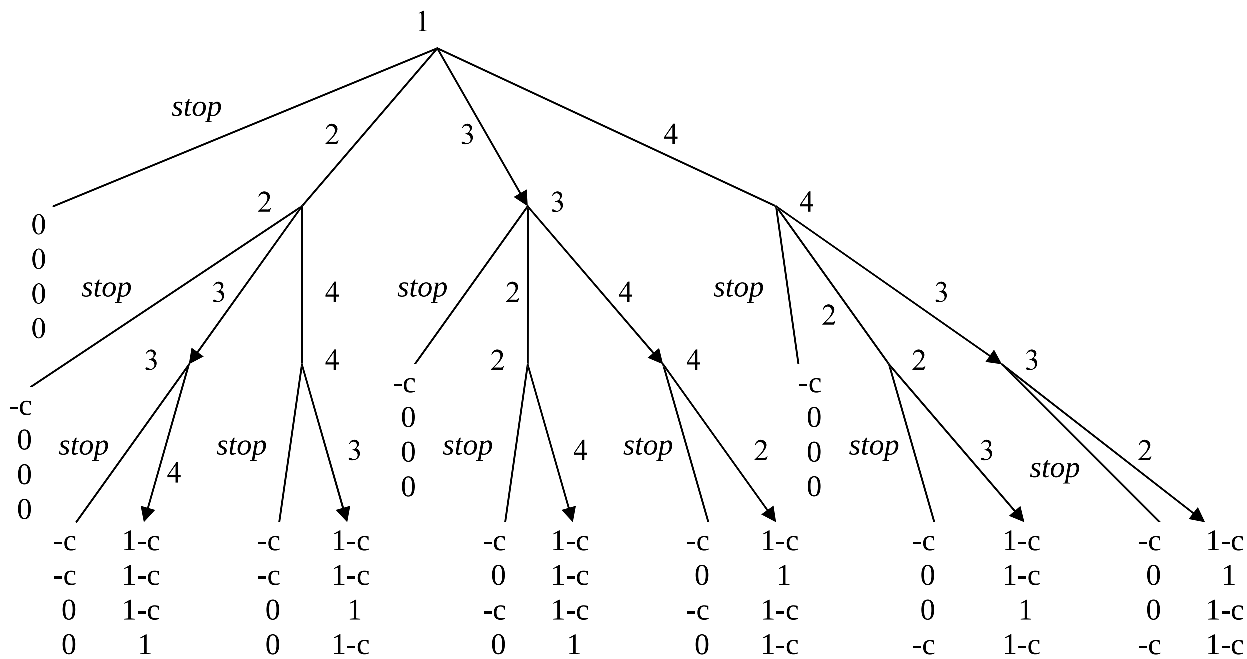
ראשית, נסתכל על תתי-המשחק המתחילים בשלב השלישי של המשחק, בהם שחקן כלשהו צריך לבחור האם להעביר את המידע לשחקן האחרון שאינו מיודע, או להפסיק את התהליך. אם יפסיק את התהליך, התשלום שלו יהיה 0, בעוד שאם יעביר את המידע, יגרום לכך שכל הקבוצה תהיה מיודעת וכתוצאה מכך התשלום שלו יהיה $1-c>0$. כיוון שב- SPE חייב להיות שיווי משקל בכל תת-משחק, כל שחקן בכל קודקוד פעולה שלו בשלב השלישי של המשחק יעביר את המידע.

עכשיו נסתכל על תתי-המשחק המתחילים בשלב השני של המשחק. בתתי-משחק אלה, השחקן שפועל, צריך להחליט האם להפסיק את התהליך או להעביר את המידע לאחד מבין שני השחקנים שנותרו לא מיודעים. אם הוא מפסיק את התהליך, תשלומו יהיה 0. אם יעביר את המידע לאחד מבין שני השחקנים, אזי, כאמור לעיל, אותו שחקן המקבל את המידע יסיים את התהליך, ולכן התשלום של השחקן שפועל בשלב השני יהיה $1-c$. לכן אופטימלי עבורו להעביר את המידע לשחקן כלשהו בשלב זה.

בשלב הראשון של המשחק, אם שחקן 1 מפסיק את התהליך, תשלומו יהיה 0. אם הוא יעביר את המידע לאחד מבין שלושת השחקנים, אזי, לפי מה שהראינו, התהליך יושלם עד שכל הקבוצה תהיה מיודעת, ולכן התשלום של שחקן 1 יהיה $1-c$. לכן אופטימלי עבורו להעביר את המידע לשחקן כלשהו.

בסה״כ, לכל n, קיימים מספר SPE עם התוצאה הזהה שהמידע מועבר לכל חברי הקבוצה, והנבדלים ביניהם רק בסדר העברת המידע.

עבור $n=4$, SPE אחד כזה מסומן ע״י חצים בעץ הבא:



(3) כאשר המשחק הינו סימולטני, כל שחקן יודע רק שהמידע נמצא בהתחלה אצל שחקן 1, אבל אינו יודע למי מתכוונים להעביר את המידע השחקנים האחרים. לכן קבוצת האסטרטגיות של כל שחקן היא להעביר את המידע לאחד מבין השחקנים 2 עד n לא כולל את עצמו, או לא להעביר את המידע כלל. המידע יועבר לכל הקבוצה אם האסטרטגיות של השחקנים מאפשרות ליצור רצף העברות המתחיל בשחקן 1, כך שכל השחקנים מקבלים את המידע. לדוגמא, כאשר $n=4$, אם שחקן 1 משחק 4, שחקן 2 משחק 3, שחקן 3 משחק 4 ושחקן 4 משחק 2 , אזי המידע מועבר לכל השחקנים בסדר הבא 1 → 4 → 2 → 3 . נשים לב שהעברת המידע ע״י שחקן 3 לשחקן 4 הינה מיותרת כאן. צירוף אסטרטגיות זה לא יהיה שיווי משקל, כיוון שבהנתן האסטרטגיות של שאר השחקנים, לשחקן 3 כדאי לא להעביר את המידע לאף אחד. אם הוא אינו מעביר את המידע , המידע עדיין מועבר לכולם והתשלום שלו הינו 1, במקום $1-c$ שיהיה לו אם יעביר את המידע.

שיווי המשקל של משחק זה הם:

1) צירופי האסטרטגיות בהם המידע מועבר לכל השחקנים וקיים שחקן אחד שאינו מעביר את המידע. לכל אחד מהשחקנים שמעבירים את המידע לשחקן כלשהו, בהנתן האסטרטגיות של שאר השחקנים, לא כדאי לסטות. אם יסטה ויעביר את המידע לשחקן אחר מזה שהוא מעביר לו, הוא יגרום לכך שהמידע לא יועבר לכולם והתשלום שלו יהיה $-c$ במקום $1-c$. אם יסטה לאסטרטגיה בה הוא אינו מעביר את המידע

כלל, הוא יגרום לכך שהמידע לא יועבר לכולם ותשלומו יהיה 0 במקום $1-c$. לשחקן שאינו מעביר את המידע, בהנתן האסטרטגיות של שאר השחקנים, גם לא כדאי לסטות. כיוון שגם בלעדיו המידע מועבר לכולם, אם הוא יעביר את המידע לאחד השחקנים, יגרום להעברה מיותרת של המידע לשחקן כלשהו, ותשלומו יהיה $1-c$ במקום 1.

2) שיווי משקל נוסף של המשחק הוא כאשר אף אחד מבין השחקנים לא מעביר את המידע. התשלום של כל שחקן בשיווי משקל זה הוא 0. לאף שחקן, בהנתן האסטרטגיות של שאר השחקנים, לא כדאי לסטות ולהעביר את המידע לשחקן כלשהו. אם יסטה ויעביר את המידע למישהו, המידע עדיין לא יועבר לכולם, ותשלומו יהיה $-c$ במקום 0. (הערה: זה נכון רק כאשר $n > 2$, כי אם ישנם רק שני שחקנים, לשחקן 1 כדאי במקרה כזה לסטות ולהעביר את המידע לשחקן 2 וכך כולם יהיו מיודעים.)

כלומר, כאשר המשחק הוא סימולטני, בנוסף לשיווי משקל בהם המידע מועבר לכולם, קיים גם שיווי משקל בו המידע לא מועבר כלל.