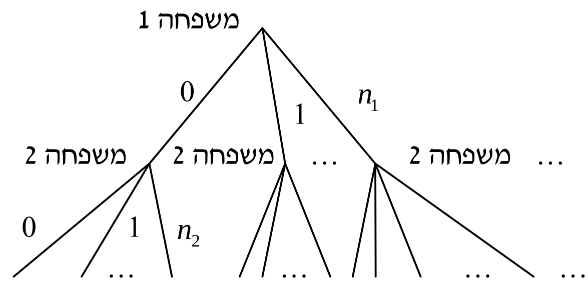
<u>מבוא לתורת המשחקים לתלמידי משפטים ופילוסופיה – פתרון תרגיל 8</u>

1. נניח לשם פשטות כי היום הראשון הוא יום 0.

העץ שמתאר את המשחק יהיה מהצורה הבאה:



האסטרטגיות של השחקנים ב- SPE הן כאלה המשרות שיווי משקל על כל תת-עץ של המשחק.

נסתכל על תתי-העץ המתחילים בקודקודים בהם פועלת משפחה 2. שיווי משקל בכל תת- עץ כזה, המורכב רק מפעולות של שחקן מסוים אחד, פירושו בחירת פעולה הנותנת לאותו שחקן את התשלום המקסימלי מבין כל התשלומים האפשריים שהוא יכול לקבל באותו תת- עץ.

נמצא את הפעולה האופטימלית של משפחה 2 לכל בחירה של משפחה 1 בשלב הראשון של המשחק.

נניח שהבחירה של משפחה 1 בשלב הראשון היא n_1 כלשהו. הפעולה האופטימלית של משפחה 2 לעולם אינה יכולה להיות להכנע באיזשהו יום n המקיים $0 < n < n_1$. התשלום שלה במקרה זה יהיה $-nc_2$ ולכן עדיף לה להכנע מיד (ביום 0) ולהגדיל את התשלום שלה ל- 0. אם משפחה 2 נכנעת באיזשהו יום אחרי יום הויתור של משפחה 1, כלומר ב- $n > n_1$ אזי התשלום שלה יהיה $v - n_1c_2$. לכן, כדי לבחור את הפעולה האופטימלית שלה, משפחה 2 משווה בין תשלום זה ל- 0 שתקבל אם תוותר מיד.

נקבל כי אם $v - n_1c_2 \geq 0$, אזי הפעולה האופטימלית של משפחה 2 בשלב השני של המשחק היא לבחור באיזשהו n המקיים $n > n_1$. אם $v - n_1c_2 < 0$ אז משפחה 2 תחליט לוותר ביום 0.

בהנתן אסטרטגיה זו של משפחה 2, נמצא את הפעולה האופטימלית של משפחה 1 בשלב הראשון. משפחה 1 יודעת שאם תבחר ב- n_1 המקיים $v - n_1c_2 \geq 0$, או $n_1 \leq \dfrac{v}{c_2}$, אזי בשלב הבא משפחה 2 תחליט לוותר אחריה והתשלום שלה (של משפחה 1) יהיה $-n_1c_1$. אם משפחה 1 תבחר ב- n_1 המקיים $v - n_1c_2 < 0$, או $n_1 > \dfrac{v}{c_2}$, אזי בשלב הבא משפחה 2 תחליט לוותר מיד והתשלום של משפחה 1 יהיה v. לכן האסטרטגיה האופטימלית של משפחה 1 היא לוותר באיזשהו n_1 המקיים $n_1 > \dfrac{v}{c_2}$.

התשלומים של משפחה 1 ומשפחה 2 בכל SPE הם v ו- 0 בהתאמה.

נסתכל עכשיו על המצב בו משפחה 1 יכולה לשנות את החלטתה לאחר ההחלטה של משפחה 2.

כל תתי-המשחק המתחילים לאחר ההחלטה הראשונה של משפחה 1 הם למעשה כמו המשחק שתואר קודם לכן עם ההבדל שכעת משפחה 2 פועלת ראשונה. כיוון שהאסטרטגיות של SPE משרות שיווי משקל על כל תת-משחק, גם בתתי-משחק אלה יתקיים SPE. ולכן, בדומה למקרה הקודם, האסטרטגיה של משפחה 2 היא לוותר באיזשהו n_2 המקיים $n_2 > \frac{v}{c_1}$ והאסטרטגיה של משפחה 1 היא לוותר מיד (כלומר משפחה 1 מוותרת מיד כאשר ניתנת לה ההזדמנות להתחרט). כלומר, בכל תת-משחק כזה התשלום של משפחה 1 הינו 0 והתשלום של משפחה 2 הוא v. כיוון שהפעולה של משפחה 1 בשלב הראשון בהכרח מובילה לאחד מתתי-המשחק הללו, אזי הפעולה האופטימלית עבורה היא לבחור ב- n_1 כלשהו בשלב הראשון.

בצורה אינטואיטיבית: כיוון שמדובר ב- SPE, הפעולה של משפחה 1 בשלב בו היא יכולה לשנות את החלטתה חייבת להיות אופטימלית עבורה, וכיוון שמשפחה 2 יכולה לבחור n_2 כזה, שלמשפחה 1 יהיה אופטימלי לוותר מיד בשלב זה, אזי לבחירה של משפחה 1 בשלב הראשון אין שום משמעות.

קיבלנו בסה״כ כי התשלומים של משפחה 1 ומשפחה 2 בכל SPE במקרה זה הם 0 ו- v בהתאמה.

2. נרצה להראות שלכל v_1 ו- v_2 תוצאת SPE היא שהגנן מועסק אם $v_1 + v_2 > 100$ ואינו מועסק אם $v_1 + v_2 < 100$.

נראה תחילה שאם $v_1 + v_2 > 100$, אזי הגנן מועסק ב- SPE.

נניח בשלילה שזה איננו המקרה, כלומר שקיימים ערכים v_1 ו- v_2 כך ש- $v_1 + v_2 > 100$, ו- SPE בו הגנן אינו מועסק. התשלום של כל אחד מהשחקנים בשיווי משקל זה הוא 0. כיוון ש- $v_1 + v_2 > 100$, אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $v_1 + v_2 - \varepsilon > 100$. נסתכל על סטיה אפשרית של שחקן 1 מהאסטרטגיה שלו לאסטרטגיה בה הוא מכריז $v_1 - \varepsilon$. כיוון שמדובר ב- SPE, האסטרטגיות של השחקנים משרות שיווי משקל על כל תת-משחק של המשחק, ובפרט על תת-המשחק המתחיל בפעולה של שחקן 2 לאחר ההכרזה של $v_1 - \varepsilon$ ע״י שחקן 1. כאמור קודם, שיווי משקל בתת-משחק המורכב רק מפעולות אפשריות של שחקן אחד מסוים, פירושו בחירת הפעולה האופטימלית ע״י אותו שחקן. נבדוק מהי הפעולה האופטימלית עבור שחקן 2, אם שחקן 1 מכריז $v_1 - \varepsilon$. שחקן 2 ירצה להכריז את הסכום המינימלי הדרוש להעסקת הגנן אם סכום זה נמוך מ- v_2, אחרת הוא ירצה להכריז סכום כלשהו שיגרום לכך שהגנן לא יועסק, למשל 0. בהנחה ש- $v_1 - \varepsilon < 100$ (אחרת הגנן יועסק ללא תלות בהכרזה של שחקן 2) הסכום המינימלי הדרוש להעסקת הגנן הינו $100 - (v_1 - \varepsilon) = 100 - v_1 + \varepsilon$. שחקן 2 יכריז סכום זה אם $v_2 > 100 - v_1 + \varepsilon$. כיוון שתנאי זה שקול לכך ש- $v_1 + v_2 - \varepsilon > 100$, ואי שוויון זה אכן מתקיים (מתוך בחירה של ε), אזי הגנן יועסק. כלומר קיבלנו

שסטיה של שחקן 1 להכרזה של $v_1-\varepsilon$ גורמת לכך שהגנן יועסק וכתוצאה מכך התשלום של שחקן 1 גדל מ- 0 ל- $v_1-(v_1-\varepsilon)=\varepsilon$. זה בסתירה לכך שזהו SPE. כלומר אם $v_1+v_2>100$, אזי הגנן יועסק ב- SPE.

עכשיו נראה שאם $v_1+v_2<100$, אזי הגנן אינו מועסק ב- SPE.

נניח בשלילה שקיימים ערכים $v_1+v_2<100$ ו- SPE בו הגנן מועסק. כיוון שהגנן מועסק, סכום ההכרזות של שני השחקנים בשיווי משקל כזה הוא לפחות 100, כלומר $m_1+m_2\geq 100$. לו היה מתקיים ש- $m_1\leq v_1$ וגם $m_2\leq v_2$ היינו מקבלים ש- $m_1+m_2\leq v_1+v_2<100$. כיוון שכאמור $m_1+m_2\geq 100$, חייב להיות ששחקן אחד לפחות מכריז ממש יותר מהערך של העסקת הגנן עבורו. התשלום של שחקן כזה בשיווי משקל הוא שלילי. לשחקן זה כדאי לסטות לאסטרטגיה בה הוא אינו מכריז יותר מהערך שלו וכך התשלום שלו יהיה לפחות 0. זה בסתירה לכך שזהו SPE. כלומר אם $v_1+v_2<100$, אזי הגנן אינו מועסק ב- SPE.

עכשיו נסתכל על המשחק בו השכנים מדווחים את הסכומים המקסימליים שהם מוכנים לשלם באופן סימולטני. נראה דוגמא נגדית לכך, שלכל v_1 ו- v_2 הגנן מועסק אם $v_1+v_2>100$ ואינו מועסק אם $v_1+v_2<100$. נניח כי $v_1=50$ ו- $v_2=60$. נסתכל על צירוף האסטרטגיות בו שחקן 1 מדווח $m_1=30$ ושחקן 2 מדווח $m_2=15$. תחת אסטרטגיות אלו הגנן אינו מועסק למרות ש- $v_1+v_2>100$. נראה שזוג אסטרטגיות זה הוא שיווי משקל. בהנתן ששחקן 1 מדווח 30, הסכום המינימלי ששחקן 2 יצטרך לדווח על מנת שהגנן יועסק הוא 70, וכיוון שהערך מהעסקת הגנן עבור שחקן 2 הוא רק 60, זה לא יהיה אופטימלי עבורו. כלומר עבור שחקן 2 אופטימלי לדווח איזשהו מספר הקטן מ- 70, בפרט $m_2=15$. באופן דומה מאוד, בהנתן האסטרטגיה של שחקן 2, אסטרטגיה של שחקן 1 הינה אופטימלית.