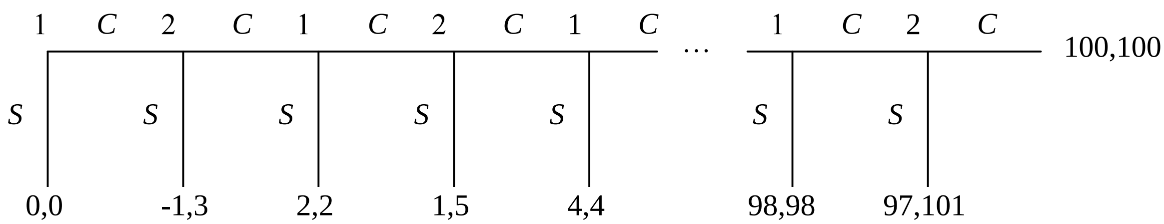
<u>מבוא לתורת המשחקים לתלמידי משפטים ופילוסופיה – פתרון תרגיל 7</u>

0. המשחק מתואר ע"י העץ הבא:

ללא הגבלת הכלליות קודקוד הפעולה האחרון של המשחק הוא כאשר התשלום של שחקן 2 עובר לראשונה את 100.



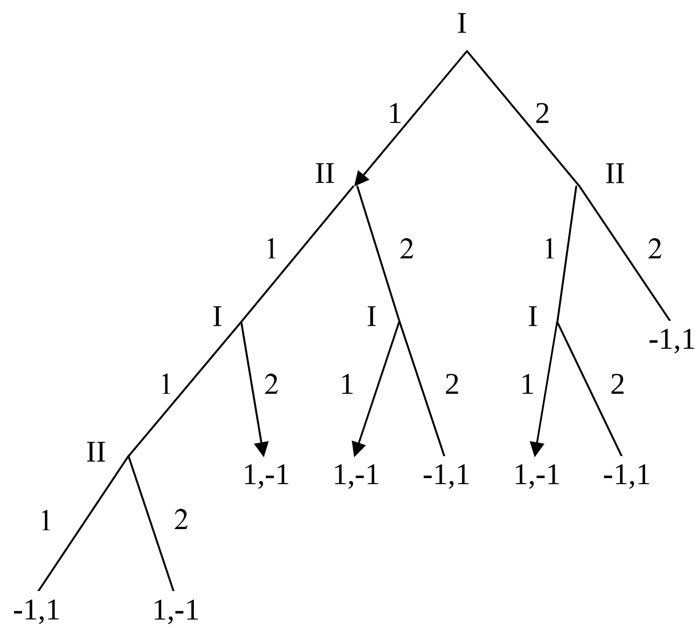
נניח בשלילה שקיים שיווי משקל בו שחקן 1 אינו מפסיק את המשחק מיד.

קיימות שתי אפשרויות:

- האסטרטגיות של שני השחקנים בשיווי משקל הן להמשיך כל הזמן, כלומר לשחק C בכל אחד מקודקודי הפעולה שלהם. בשיווי משקל כזה התשלום של שחקן 2 הינו 100. בהנתן האסטרטגיה של שחקן 1, לשחקן 2 כדאי לסטות ולהפסיק את המשחק בשלב האחרון ובכך להגדיל את התשלום שלו ל-101. בסתירה לכך שזהו שיווי משקל.
- בשלב הראשון שחקן 1 משחק C, ובהמשך לפחות אחד השחקנים משחק S בלפחות אחד מקודקודי הפעולה שלו. נסתכל על השלב המוקדם ביותר t בו S משוחקת ע"י שחקן כלשהו. זה השלב בו מסתיים המשחק. לשחקן ששיחק C בשלב $t-1$ (שלב כזה קיים, כי הנחנו ש- $t>1$), כדאי לסטות ולשחק S באותו שלב, ע"י כך לסיים את המשחק ב- $t-1$ ולהגדיל את התשלום שלו ב-1. בסתירה לכך שזהו שיווי משקל.

לכן לא קיים שיווי משקל בו המשחק אינו מופסק מיד ע"י שחקן 1.

1. את משחק הגפרורים עבור $n=5$ ניתן לתאר באמצעות העץ הבא:



השחקנים הם I ו- II והמספרים 1 ו- 2 לאורך הקווים מסמנים כמה גפרורים כל שחקן לקח בתורו. לשחקן I במשחק זה קיימת אסטרטגיה שמבטיחה לו נצחון כנגד כל אסטרטגיה של שחקן II . אסטרטגיה זו מסומנת בחצים: בשלב הראשון שחקן I לוקח גפרור אחד מהערימה, לאחר מכן אם שחקן II לוקח גפרור אחד, שחקן I לוקח שני גפרורים אחריו ומשאיר לו את הגפרור האחרון, ואם שחקן II לוקח שני גפרורים, שחקן I לוקח גפרור אחד אחריו ומשאיר לו את הגפרור האחרון.

נמצא את המנצח של המשחק כפונקציה של n וננסה ללמוד את החוקיות:

$n=1$ - שחקן I שמתחיל את המשחק, נאלץ לקחת את הגפרור האחרון, ולכן שחקן II מנצח.

$n=2$ - שחקן I לוקח גפרור אחד בשלב הראשון ומשאיר לשחקן II את הגפרור האחרון, ולכן שחקן I מנצח.

$n=3$ - שחקן I לוקח שני גפרורים בשלב הראשון ומשאיר לשחקן II את הגפרור האחרון, ולכן שחקן I מנצח.

$n=4$ - לשחקן I בשלב הראשון של המשחק ישנן שתי פעולות אפשריות: לקחת גפרור אחד מהערימה או לקחת שני גפרורים. אם הוא לוקח גפרור אחד, אזי ניתן להסתכל על המשך המשחק כעל משחק חדש בו $n=3$ ושחקן II הוא זה שמתחיל את המשחק. ראינו שכאשר $n=3$, השחקן שמתחיל את המשחק מנצח. לכן שחקן II מנצח כאן. אם שחקן I לוקח שני גפרורים בשלב הראשון, אזי המשך המשחק הוא

משחק בו $n=2$ ושחקן II מתחיל, ולכן שוב, שחקן II מנצח. כלומר לא משנה באיזו מבין שתי הפעולות שחקן 1 נוקט בשלב הראשון, שחקן II מנצח במשחק.

$n=5$ - שחקן I יכול לקחת גפרור אחד בהתחלה ולהביא את המשחק למצב בו $n=4$ ושחקן II שמתחיל את המשחק. הראינו שכאשר $n=4$, השחקן שמתחיל, מפסיד. לכן שחקן II מפסיד ובסה״כ שחקן I מנצח במשחק כאשר $n=5$.

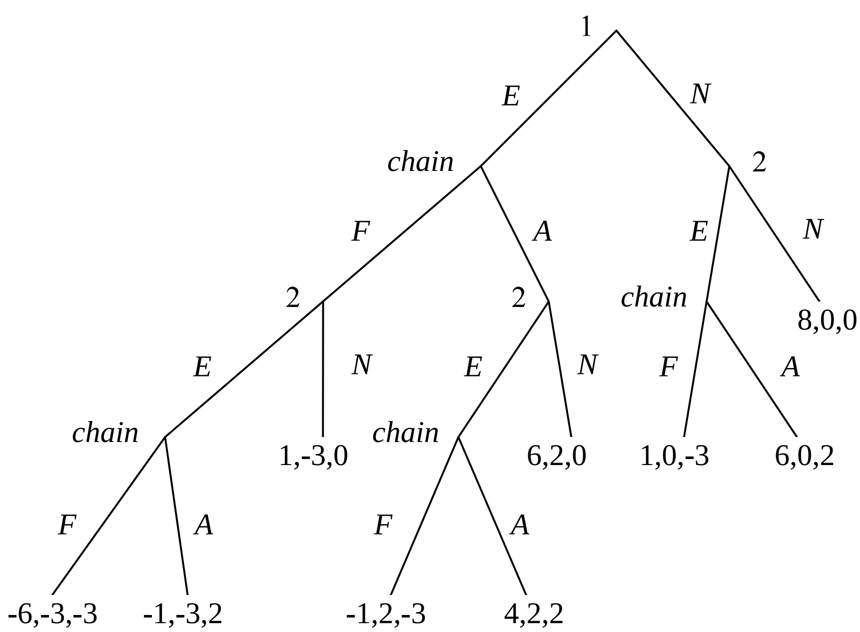
$n=6$ - שחקן I יכול לקחת שני גפרורים בהתחלה ולהביא את המשחק למצב בו $n=4$ ושחקן II שמתחיל את המשחק. כאמור, קודם, שחקן I מנצח במצב זה.

ניתן לראות את החוקיות הבאה:

המנצח במשחק הוא: שחקן II, אם $n=3m+1$, כאשר m הוא מספר שלם אי שלילי.

שחקן I, אחרת.

2. כאשר $T=2$ העץ שמתאר את המשחק הוא:



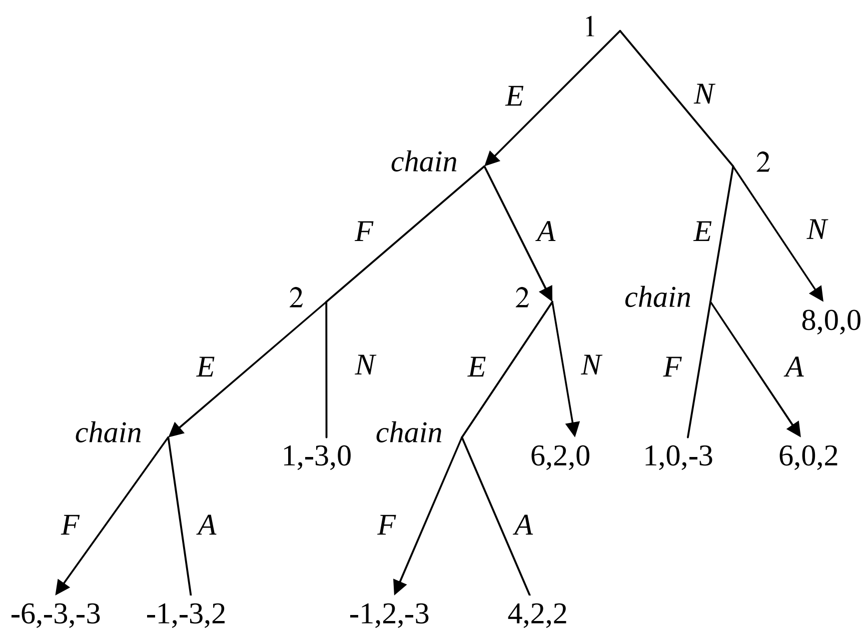
התשלומים בכל קודקוד סופי הם של רשת החנויות, מתחרה 1 ומתחרה 2 בסדר זה, משמאל לימין.

הסבר: נניח שמתחרה בעיר 1 נכנס לשוק, רשת החנויות לא נלחמת בו, מתחרה בעיר 2 נכנס לשוק ורשת החנויות נלחמת במתחרה 2. במקרה זה הרווח של רשת החנויות בעיר 1 הוא 2 כיוון שהיא לא נלחמה שם, והרווח בעיר 2 הוא 3- מפני שנלחמה במתחרה בעיר 2. סך הרווחים של רשת החנויות הוא 1- . הרווח של מתחרה 1 הוא 2 והרווח של מתחרה 2 הוא 3- .

נראה דוגמאות לשיווי משקל שאינם SPE :

a) שיווי משקל אחד הוא זה בו האסטרטגיה של רשת החנויות היא להלחם במתחרים בשתי הערים, והאסטרטגיות של שני המתחרים הן לא להכנס לשוק. בהנתן שרשת החנויות נלחמת במתחרה 1, למתחרה זה כדאי לא להכנס לשוק ולזכות בתשלום של 0 במקום התשלום של 3- שיקבל אם יכנס לשוק. כנ״ל לגבי מתחרה 2. בהנתן ששני המתחרים לא נכנסים לשוק, התשלום של רשת החנויות הוא 8, התשלום המקסימלי שהיא יכולה לקבל במשחק זה, ולכן אין אסטרטגיה שיכולה לשפר את מצבה.

b) שיווי משקל נוסף הוא צירוף האסטרטגיות המתוארות ע״י חצים בתרשים הבא. שיווי משקל זה הוא שרירותי, לא קיימת בו חוקיות מסוימת.



בהנתן האסטרטגיות של המתחרים בשתי הערים, קל לראות כי האסטרטגיה של רשת החנויות הינה אופטימלית, כיוון שהיא מקבלת את התשלום הגבוה ביותר שהיא יכולה לקבל בתת-עץ אליו מגיעים לאחר שמתחרה 1 נכנס לשוק. בהנתן שרשת החנויות לא נלחמת במתחרה 1, למתחרה זה כדאי להכנס לשוק ולקבל תשלום של 2 במקום התשלום של 0 שיקבל אם לא יכנס לשוק. בהנתן האסטרטגיות של מתחרה 1 ורשת החנויות, התשלום של מתחרה 2 נקבע רק על ידי הפעולה בה הוא נוקט בתת-המשחק אליו מגיעים לאחר שמתחרה 1 נכנס לשוק ורשת החנויות אינה נלחמת בו. בתת-משחק זה, כיוון שרשת החנויות נלחמת במתחרה 2, אופטימלי עבורו לא להכנס לשוק. לכן האסטרטגיה בה מתחרה 2 אינו נכנס לשוק בתת- משחק זה ונוקט בפעולות כלשהן בקודקודי פעולה אחרים שלו, הינה אופטימלית עבורו.

ניתן לבנות מספר שיווי משקל נוספים במשחק זה.

נראה שקיים SPE יחיד במשחק:

האסטרטגיות של השחקנים ב- SPE חייבות להשרות שיווי משקל על כל תת- משחק.

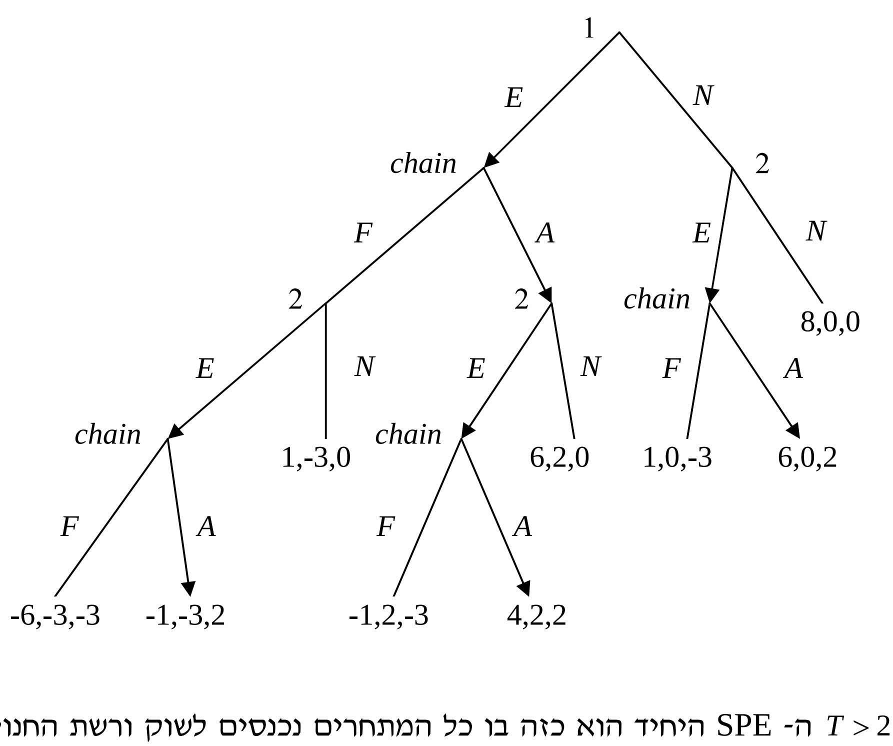
נסתכל תחילה על תתי-העץ המתחילים בקודקודים בהם רשת החנויות יכולה להלחם או לא להלחם במתחרה 2. בכל אחד משלושת תתי-העץ הללו התשלום של רשת החנויות מלא להלחם הינו גבוה יותר מאשר התשלום מלהלחם. לכן האסטרטגיה של רשת החנויות ב- SPE היא כזו בה רשת החנויות אינה נלחמת במתחרה 2 בשום מצב.

עכשיו נסתכל על תתי-העץ המתחילים בקודקודי הפעולה של מתחרה 2. כיוון שכאמור, ב- SPE רשת החנויות אינה נלחמת במתחרה 2, כדי שיתקיים שיווי משקל בתתי-עץ אלה האסטרטגיה של מתחרה 2 צריכה להיות להכנס לשוק בכל מצב.

בתת-עץ שמתחיל בקודקוד הפעולה של רשת החנויות, אליו מגיעים אם מתחרה 1 נכנס לשוק, גם צריך להיות שיווי משקל. נציין תחילה כי ב- SPE הפעולה של רשת החנויות בעיר 1 אינה משפיעה על המשך המשחק. בין אם רשת החנויות נלחמת במתחרה 1 ובין אם לאו, מתחרה 2 יכנס לשוק, רשת החנויות לא תלחם בו והתשלום שלה בעיר 2 יהיה 2. לכן ההחלטה של רשת החנויות לגבי מתחרה 1 תלויה רק ברווחים שלה בעיר 1. כיוון שהתשלום של רשת החנויות בעיר 1 גבוה יותר אם היא אינה נלחמת בעיר זו, האסטרטגיה של רשת החנויות ב- SPE היא לא להלחם בעיר 1.

בהנתן שרשת החנויות אינה נלחמת במתחרה 1, התשובה הטובה ביותר של מתחרה 1 היא להכנס לשוק.

בסה"כ הגענו ל- SPE יחיד במשחק, המתואר ע"י חצים בעץ הבא:



באופן כללי גם ל- $T > 2$ ה- SPE היחיד הוא כזה בו כל המתחרים נכנסים לשוק ורשת החנויות אינה נלחמת באף מתחרה. הניתוח דומה מאוד למקרה של $T = 2$.

3. ראשית, נראה שלא יתכן שיווי משקל בכלל (ו- SPE בפרט) בו אף שחקן לא מקבל את החפץ. נניח בשלילה שקיים שיווי משקל כזה. במצב כזה השחקן שניצח, הציע הצעה העולה על כמות הכסף שיש לו. בהנתן האסטרטגיה של השחקן השני, לשחקן זה כדאי לסטות לאסטרטגיה בה הוא לעולם אינו מציע יותר מכמות הכסף שיש ברשותו. תחת אסטרטגיה זו התשלום של שחקן זה יהיה לפחות 0, כלומר הוא בהכרח משפר את מצבו יחסית למצב בו נענש. זה בסתירה לכך שזהו שיווי משקל.
כלומר בשיווי משקל אחד השחקנים מקבל את החפץ.

עכשיו נראה שלא יתכן SPE בו שחקן 2 מקבל את החפץ.

נניח בשלילה שקיים SPE בו שחקן 2 מקבל את החפץ. חייב להיות לכן שהחפץ נמכר ב- $6 לכל היותר. הצעד האחרון במשחק זה הוא של שחקן 1 שאינו מעלה את הצעת המחיר של שחקן 2. בהנתן האסטרטגיה של שחקן 2, לשחקן 1 כדאי לסטות לאסטרטגיה בה באותו הצעד בו לא העלה את ההצעה, הוא מעלה את הצעת שחקן 2 ל- $7, ובכל קודקוד פעולה אחר שלו הוא משחק כמו קודם. נסתכל על תת-המשחק המתחיל לאחר ששחקן 1 מעלה את ההצעה ל- $7. כיוון שמדובר ב- SPE, האסטרטגיות של השחקנים משרות שיווי משקל על כל תת- משחק. כאמור, בכל שיווי משקל אחד השחקנים מקבל את החפץ. לכן גם בתת- המשחק המדובר אחד השחקנים מקבל את החפץ. כיוון שתת- המשחק מתחיל לאחר הצעה של $7, החפץ מתקבל בהכרח בסכום של לפחות $7, ולכן מי שמקבל את החפץ חייב להיות שחקן 1. כיוון ששחקן 1 משלם $9 לכל היותר עבור החפץ, סטיה לאסטרטגיה זו מגדילה את התשלום שלו מ- 0 ללפחות $10-9=1$. סטיה כדאית כזו היא בסתירה לכך שזהו SPE.
בסה״כ הראינו שבכל SPE שחקן 1 מקבל את החפץ.

SPE בו החפץ נמכר ב- $4:

<u>אסטרטגיה של שחקן 1</u>: כל עוד שחקן 2 לא הציע אף הצעה, שחקן 1 מציע $4. אם שחקן 2 הציע הצעה כלשהי והמשחק לא נגמר, שחקן 1 פועל באופן הבא: הוא מעלה את הצעתו של שחקן 2 ל- $6 אם זו נמוכה מ- $6, ואם ההצעה של שחקן 2 היא לפחות $6, אך קטנה מ- $9, שחקן 1 מעלה אותה ב- $1.

<u>אסטרטגיה של שחקן 2</u>: שחקן 2 מעלה את הצעתו של שחקן 1 ל- $6 בשני המקרים הבאים בלבד:

1) הצעה של שחקן 1 נמוכה מ- $4.

2) הצעה של שחקן 1 נמוכה מ- $6 ושחקן 2 כבר העלה את הצעתו של שחקן 1 בעבר.

בכל מקרה אחר שחקן 2 אינו מעלה את הצעתו של שחקן 1.

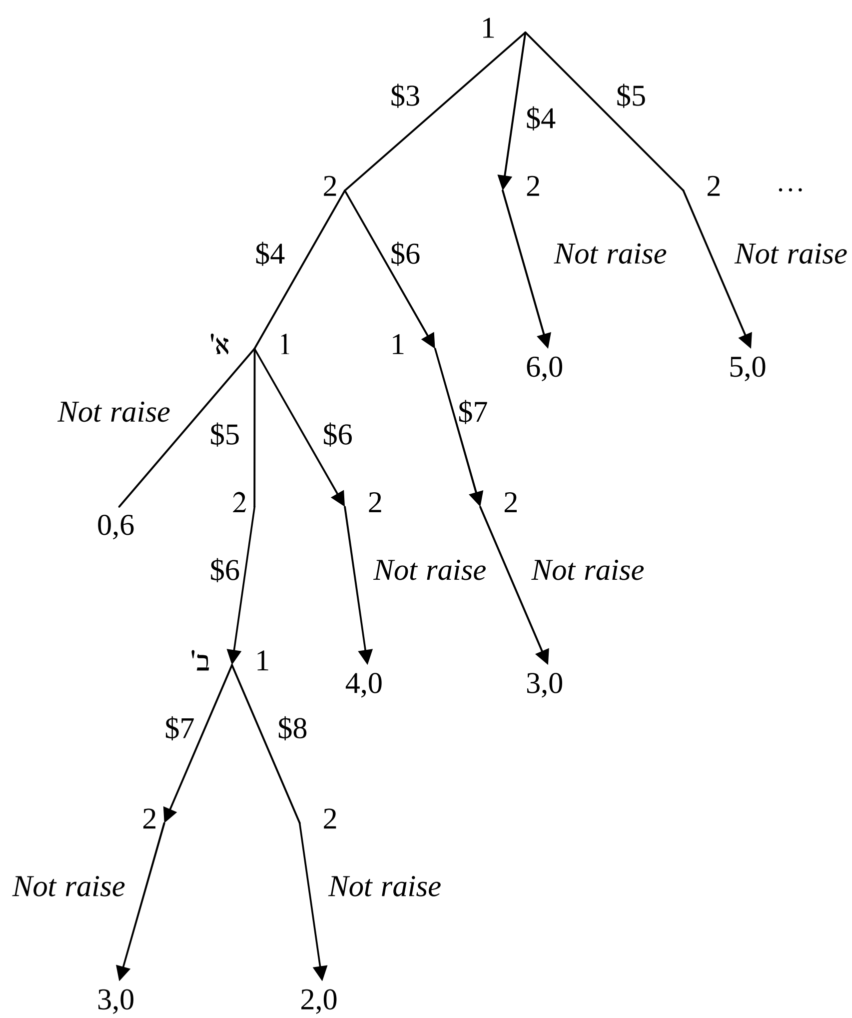
עץ חלקי של המשחק מוצג למטה (הוא אינו כולל את כל קודקודי הפעולה של המשחק, ובכל קודקוד פעולה מוצגות רק חלק מהפעולות האפשריות בו). האסטרטגיות של השחקנים מסומנות בחצים.
בהנתן האסטרטגיה של שחקן 1, האסטרטגיה של שחקן 2 הינה אופטימלית. כיוון ששחקן 1 מוכן להעלות את הצעת המחיר שלו עד ל- $9, וברשותו של שחקן 2 רק $6, אין שום אסטרטגיה של שחקן 2 שתתן לו תשלום הגבוה מ- 0. תחת האסטרטגיות שתוארו, שחקן 2 מקבל 0, ולכן האסטרטגיה שלו היא תשובה טובה ביותר כנגד זו של שחקן 1.

בהנתן האסטרטגיה של שחקן 2, עבור שחקן 1 אופטימלי להציע $4 בשלב הראשון. כל הצעה אחרת של שחקן 1 בשלב זה הייתה מובילה אותו לתשלום הנמוך מ- 6.

צירוף אסטרטגיות זה גם משרה שיווי משקל על כל תת-משחק של המשחק הנתון. בכל תת-משחק, בהנתן האסטרטגיה של שחקן 1, שחקן 2 יכול לקבל לכל היותר 0, ולכן האסטרטגיה שלו, בה הוא מקבל 0, היא אופטימלית. כמו כן, בהנתן האסטרטגיה של שחקן 2, עבור שחקן 1 אופטימלי להעלות את הצעתו של שחקן 2 ל- $6, אם זו נמוכה מ- $6. לו לא היה מעלה הצעה כזו בכלל, התשלום של שחקן 1 היה 0, ואם היה מעלה אותה להצעה הנמוכה מ- $6, שחקן 2 היה בשלב הבא מעלה את הצעתו של שחקן 1 ל- $6, ואז בשביל לזכות בחפץ שחקן 1 היה נאלץ להציע לפחות $7 והתשלום שלו היה קטן (ראה/י תת-משחק א׳).

בנוסף לכך, אם הצעתו של שחקן 2 היא $6- $8, אזי עבור שחקן 1 אופטימלי להעלות הצעה זו ב-$1 ולא ביותר מכך, כי ממילא שחקן 2 לא יעלה את ההצעה אחריו (ראה/י תת-משחק ב׳).

לכן זוג אסטרטגיות זה הינו SPE.



SPE בו החפץ נמכר ב- 8$:

<u>אסטרטגיה של שחקן 1</u> : כל עוד שחקן 2 לא הציע אף הצעה, שחקן 1 מציע 8$. אם שחקן 2 הציע הצעה כלשהי והמשחק לא נגמר, שחקן 1 פועל באופן הבא : הוא מעלה את הצעתו של שחקן 2 ל- 8$ אם זו נמוכה מ- 8$, ואם ההצעה של שחקן 2 היא 8$, שחקן 1 מעלה אותה ל- 9$.

<u>אסטרטגיה של שחקן 2</u> : שחקן 2 מעלה את הצעתו של שחקן 1 ל- 8$, אם זו נמוכה מ- 8$, ואינו מעלה את הצעתו בכל מקרה אחר.

בהנתן האסטרטגיה של שחקן 1, בה הוא מוכן להעלות את הצעת המחיר של שחקן 2 עד לסכום של 9$, לשחקן 2 לא קיימת שום אסטרטגיה בה הוא יוכל לקבל את החפץ, ולכן האסטרטגיה שלו, המזכה אותו בתשלום של 0, הינה אופטימלית.

בהנתן האסטרטגיה של שחקן 2, בה הוא מעלה ל- 8$ כל הצעה של שחקן 1 הנמוכה מ- 8$, לשחקן 1 אין שום אסטרטגיה, בה הוא יכול לקבל תשלום העולה על 2, ולכן האסטרטגיה שתיארנו בה הוא מקבל תשלום של 2 הינה אופטימלית.

בדומה למקרה הקודם של SPE בו החפץ נמכר ב- 4$, גם כאן האסטרטגיות של השחקנים משרות שיווי משקל על כל תת- עץ של המשחק.

לכן זוג אסטרטגיות זה מהווה SPE.