**<u>מבוא לתורת המשחקים לתלמידי משפטים ופילוסופיה – פתרון תרגיל 6</u>**

1. a) נסתכל על צירוף האסטרטגיות הבא של השחקנים:

אסטרטגיה של שחקן 1: בכל אחד משלושת צעדיו הראשונים במשחק לשים X בעמודה שונה. שחקן 1 הוא זה שמתחיל את המשחק, לכן תמיד יש לו אפשרות לעשות זאת, כיוון ששחקן 2 יספיק למלא לכל היותר שתי משבצות באותה עמודה כאשר שחקן 1 מגיע לצעד השלישי שלו במשחק. החל מהצעד הרביעי שלו שחקן 1 יכול לשים X במשבצות כלשהן על הלוח שעדיין פנויות.

אסטרטגיה של שחקן 2: בכל צעד שלו לשים + בשורה בה שחקן 1 שם X קודם לכן. במקרה בו אותה השורה תפוסה, לשים + במשבצת פנויה כלשהי.

שחקן 1 מונע נצחון משחקן 2 ע"י כך ששם X בכל עמודה, ושחקן 2 מונע נצחון משחקן 1 ע"י כך ששם אחריו + בשורה שבה הוא שם X, ובכך לא מאפשר לו למלא שורה שלמה. לכן תחת אסטרטגיות אלו תוצאת המשחק היא תיקו.

נראה שצירוף אסטרטגיות זה הינו שיווי משקל.

בהנתן האסטרטגיה של שחקן 1, שחקן 2 אינו יכול לנצח, לכן התשלום שלו במשחק יכול להיות 0 או 1, ולכן עבורו אסטרטגיה שמובילה לתשלום של 0 חייבת להיות אופטימלית.

בהנתן ששחקן 2 שם + בכל שורה בה שחקן 1 צעד אחד לפני כן שם X ומונע ממנו נצחון במשחק, עבור שחקן 1 אסטרטגיה שמובילה לתיקו (ולא להפסד שלו) חייבת להיות תשובה טובה ביותר.

כלומר צירוף אסטרטגיות זה הוא אכן שיווי משקל.

b) במשחק סכום אפס שיווי המשקל שקול לערך ה- maxmin=minmax של המשחק, וכיוון שתוצאת שיווי המשקל שמצאנו היא תיקו, אזי האסטרטגיות שמשוחקות בשיווי משקל זה הן אלה המבטיחות לכל שחקן תיקו כנגד כל אסטרטגיה של היריב.

2. קבוצת השחקנים במשחק היא $N=\{1,2\}$. כיוון ששחקן 1 יודע מהו מצב העולם כאשר זה מתממש, האסטרטגיות (הטהורות) שלו יהיו זוגות של פעולות: פעולה במקרה של מצב עולם $s_1$ ופעולה במקרה של מצב עולם $s_2$, כלומר $A_1=\{UU,UD,DU,DD\}$. לדוגמא, האסטרטגיה $DU$ פירושה לשחק $D$ במצב העולם $s_1$ ו- $U$ במצב העולם $s_2$. שחקן 2 אינו יודע את מצב העולם, לכן אינו יכול להתנות את הפעולה שלו במצב העולם, כלומר יש לו רק שלוש אסטרטגיות טהורות $A_2=\{L,M,R\}$.

a) נראה תחילה כי $(DD,L)$ הינו שיווי משקל של המשחק באסטרטגיות טהורות. בהנתן ששחקן 2 משחק $L$, לשחקן 1 כדאי בכל מצב טבע לשחק $D$, כיוון שהתשלום שלו מ- $D$ גבוה מהתשלום מ- $U$ בשתי המטריצות. בהנתן ששחקן 1 משחק $DD$, התשלום של שחקן 2 מלשחק $L$ הינו $\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{2}\times4=4$.

התשלום שלו אם ישחק $M$ יהיה $\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 6=3$ והתשלום מלשחק $R$ הינו $\frac{1}{2}\times 6+\frac{1}{2}\times 0=3$. לכן התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 כנגד $DD$ של שחקן 1 היא $L$. כלומר $(DD,L)$ הינו שיווי משקל.
התשלום של שחקן 1 בשיווי משקל זה הוא 4 והתשלום של שחקן 2 הינו 4 אף הוא.

נראה שלא קיימים שיווי משקל נוספים באסטרטגיות טהורות.

- אם שחקן 2 משחק $L$, התשובה הטובה ביותר היחידה של שחקן 1 היא $DD$ ולכן אין במקרה זה שיווי משקל נוסף פרט לשיווי המשקל שמצאנו קודם לכן.
- אם שחקן 2 משחק $M$, עבור שחקן 1 אופטימלי לשחק $U$ בשני מצבי הטבע, כלומר האסטרטגיה האופטימלית היא $UU$. אבל בהנתן ששחקן 1 משחק $UU$, התשלום של שחקן 2 מלשחק $M$ הינו $\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 2=1$ ( כנ״ל לגבי $R$), בעוד שהתשלום שלו מלשחק $L$ הינו 3. לכן כאשר שחקן 1 משחק $UU$, אין זה אופטימלי עבור שחקן 2 לשחק $M$. כלומר לא קיים במקרה זה שיווי משקל.
- אם שחקן 2 משחק $R$, התשובה הטובה ביותר של שחקן 1 היא $UU$. אבל, כאמור קודם, בהנתן $UU$ של שחקן 1, עבור שחקן 2 יהיה זה אופטימלי לשחק $L$ ולא $R$. לכן גם כאן לא קיים שיווי משקל.

בסה״כ קיבלנו ששיווי המשקל הטהור היחיד של המשחק הינו $(DD,L)$ והתשלום של כל אחד מהשחקנים בשיווי משקל זה הוא 4.

b) כעת גם שחקן 2 יודע מהו מצב הטבע, לכן יכול להתנות את הפעולה שלו במצבי הטבע. במקרה בו שני השחקנים יודעים את מצבי הטבע ויכולים להתנות את הפעולות שלהם במצבי הטבע, ניתן להסתכל על המשחק בתור שני משחקים נפרדים – משחק אחד שמשוחק כאשר מצב הטבע הוא $s_1$ ומשחק שני המשוחק כאשר מצב הטבע הוא $s_2$.
נחפש את שיווי המשקל בשני המשחקים המתאימים למצבי הטבע השונים.
ניתן לראות כי כאשר מצב הטבע הוא $s_1$, לא יתכן כי האסטרטגיה $M$ של שחקן 2 משוחקת בשיווי משקל, כיוון שכנגד כל אסטרטגיה של שחקן 1, $L$ נותנת לשחקן 2 תשלום גבוה יותר מ- $M$. לכן במצב טבע $s_1$ המשחק מצטמצם למטריצה הבאה:

| $s_1$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $U$ | 2,3 | 2,2 |
| $D$ | 4,4 | 0,6 |

נמצא שיווי משקל במשחק המתואר ע״י מטריצה זו. רואים כי לא קיים שיווי משקל באסטרטגיות טהורות. נחפש שיווי משקל מעורב. נסמן את ההסתברות לשחק $U$ בשיווי משקל זה ע״י $p$. ההסתברות

שבה שחקן 1 משחק $D$ היא לכן $1-p$. שחקן 2 אדיש בין שתי האסטרטגיות הטהורות שלו $L$ ו- $R$, לכן חייב להתקיים $3p+4(1-p)=2p+6(1-p)$. נפתור ונקבל כי $p=\frac{2}{3}$. נסמן ב- $q$ את ההסתברות לשחק $L$ בשיווי משקל. שחקן 1 צריך להיות אדיש בין $U$ ו- $D$, לכן $2q+2(1-q)=4q$. נקבל כי $q=\frac{1}{2}$.

האסטרטגיות של שחקן 1 ושחקן 2 במצב הטבע $s_1$ הן לכן $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ ו- $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ בהתאמה. תוחלת התשלום של שחקן 1 כאשר מצב הטבע הוא $s_1$ היא $\frac{1}{2}\times 4=2$. תוחלת התשלום של שחקן 2 היא $\frac{2}{3}\times 3+\frac{1}{3}\times 4=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.

כאשר מצב הטבע הוא $s_2$, לא יתכן ש- $R$ תשוחק בשיווי משקל וכמו במקרה הקודם המשחק מצטמצם למטריצה $2\times 2$ (הפעם עם האסטרטגיות הטהורות $L$ ו- $M$ של שחקן 2). באותו האופן בדיוק כמו במקרה של $s_1$ נקבל כי האסטרטגיות של השחקנים במצב הטבע $s_2$ הן $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ לשחקן 1 ו- $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ לשחקן 2. התשלומים של שחקן 1 ושחקן 2 הם שוב 2 ו- $3\frac{1}{3}$ בהתאמה.

התשלום של שחקן 1 זהה בשני מצבי הטבע, לכן התשלום שלו במשחק כולו הינו $p(s_1)\times 2+p(s_2)\times 2=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 2=2$. באופן דומה לגבי שחקן 2, התשלום שלו במשחק כולו הוא $3\frac{1}{3}$.

כלומר מצבם של שני השחקנים מורע בהשוואה למקרה בו רק שחקן 1 יודע את מצב הטבע.

3. קבוצת השחקנים במשחק היא $N=\{1,2\}$. כל שחקן יכול לצפות במעטפה שיקבל בסכומים הבאים בלבד: 1, 2, 4, 8, 16, 32 או 64. לכל אחד משני השחקנים, לאחר שהוא רואה את הסכום במעטפה שלו, יש שתי פעולות אפשריות: לרצות להתחלף עם השחקן השני או לרצות לשמור את המעטפה שקיבל. רק במידה ששני השחקנים רוצים להתחלף במעטפות, ההחלפה אכן תתבצע. אסטרטגיה אפשרית של שחקן כלשהו תהיה תיאור באיזו פעולה מבין שתי הפעולות האפשריות ינקוט במקרה של כל סכום שיראה במעטפה שלו. לדוגמא, האסטרטגיה $ENENNEE$ של שחקן 1 (או שחקן 2) פירושה ששחקן 1 ירצה לבצע החלפה במקרה שמקבל את הסכומים 1, 4, 32 ו- 64 ולא ירצה לבצע החלפה במקרה שמקבל כל סכום אחר.

ראשית, נראה שקיימים שיווי משקל בהם לא מתבצעות החלפות של מעטפות. נסתכל, לדוגמא, על זוג האסטרטגיות הבא $(ENNNNNN, ENNNNNN)$. תחת זוג אסטרגיות זה לא מתבצעות החלפות של מעטפות, כיוון שהסכום היחיד בו כל שחקן מעונין להתחלף הוא 1, ולא יתכן כי לשניהם יהיה 1 בו זמנית.

בהנתן האסטרטגיה של שחקן 1, לשחקן 2 לא קיימת אסטרטגיה שיכולה לשפר את מצבו. אם יבחר באסטרטגיה כלשהי, בה הוא מעונין להתחלף כאשר הסכום במעטפה שלו הוא 4 או יותר, אזי מצבו לא ישתנה, כי שחקן 1 לא מעונין להתחלף פרט לכאשר הסכום אלצו הוא 1, ולכן ההחלפות ממילא לא תתבצענה. אם שחקן 2 יבחר באסטרטגיה, בה הוא רוצה להתחלף כאשר הסכום במעטפה שלו הוא 2, אזי כיוון ששחקן 1 מעונין להתחלף אם יש לו 1 בלבד (אבל לא כאשר יש לו 4), אזי מצבו של שחקן 2 יורע כיוון שבמקרה של 2 במעטפה שלו (זה קורה בהסתברות חיובית ממש), יחליף את הסכום שיש לו בסכום נמוך יותר. כלומר בהנתן האסטרטגיה של שחקן 1, אסטרטגיה של שחקן 2 הינה אופטימלית, ולהיפך. לכן זהו שיווי משקל.

באופן מאוד דומה קל לראות כי גם צירופי האסטרטגיות $(NNNNNNN, NNNNNNN)$, $(ENNNNNN, NNNNNNN)$ , $(NNNNNNN, ENNNNNN)$ הם שיווי משקל של המשחק.

עכשיו נראה כי לא יתכן שיווי משקל בו מתבצעות החלפות של מעטפות.

נניח בשלילה שקיים שיווי משקל בו מתבצעת לפחות החלפה אחת. כדי שתתבצע החלפה, צריך להיות שאם באסטרטגיה של שחקן אחד מופיע $E$ במקום מסוים, אזי באסטרטגיה של השחקן השני יופיע $E$ במקום אחד לפני או במקום אחד אחרי המקום הזה (או בשניהם). לדוגמא, החלפה תתבצע כאשר , נניח, האסטרטגיה של אחד השחקנים היא $(***E***)$ (הכוכבים מסמנים פעולות כלשהן עבור סכומים השונים מ- 8) והאסטרטגיה של השחקן השני היא $(**E****)$. במקרה זה תתבצע החלפה כאשר יוגרל המספר 4 , השחקן הראשון יקבל 8 והשחקן השני יקבל 4. כאמור, הנחנו בשלילה שבשיווי משקל מתבצעת לפחות החלפה אחת. נסתכל עכשיו על הסכום הגבוה ביותר שמוחלף בשיווי משקל זה. כיוון שקבוצת הסכומים היא קבוצה סופית (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64) אזי בהכרח קיים סכום כזה. לדוגמא, אם האסטרטגיות הן $(NENNENN, NNENEEN)$ אזי הסכום הגבוה ביותר שמוחלף הוא 32 : שחקן 2 מחליף 32 עם 16 של שחקן 1. לשחקן כזה, שמחליף את הסכום הגבוה ביותר המוחלף בשיווי משקל, בהנתן האסטרטגיה של השחקן השני, כדאי לסטות ולא לרצות להחליף סכום זה. כך במקרה שיקבל סכום זה ישאר איתו במקום להחליף אותו במשהו קטן יותר, ובכך יגדיל את התשלום שלו במשחק. זה בסתירה לכך שזהו שיווי משקל. לכן לא יתכן שיווי משקל בו מתבצעות החלפות של מעטפות.

4. נניח כי ההסתברות שבעל המאפייה יעסיק אופה טוב היא $\frac{1}{2}$, כלומר $p(G)=p(B)=\frac{1}{2}$ .

נחפש שיווי משקל בו הצרכן הולך למאפייה בהסתברות חיובית.

נבדוק תחילה האם יתכן שיווי משקל בו הצרכן הולך למאפייה בהסתברות 1. במקרה זה האסטרטגיה האופטימלית עבור בעל המאפייה היא לאפות סופגניות בין אם הוא העסיק אופה טוב (מצב העולם $G$) ובין אם הוא העסיק אופה רע (מצב העולם $B$), כי בשני המקרים התשלום שלו מלאפות סופגניות הינו גבוה יותר מהתשלום מלא לאפות סופגניות (10 לעומת 0 ו- 5 לעומת 0). אבל במקרה בו הסופגניות נאפות בשני מצבי הטבע, תוחלת התשלום של הצרכן מללכת למאפייה היא $\frac{1}{2}\times 10+\frac{1}{2}\times(-20)=-5$.

התשלום שלו אם הוא לא הולך למאפייה הינו 0 ללא תלות במה שעושה בעל המאפייה בשני מצבי הטבע,

ולכן הצרכן יעדיף לא ללכת למאפייה במקרה זה. לכן לא קיים שיווי משקל בו הצרכן הולך למאפייה בהסתברות 1.

נסמן אם כן ב- $p$ $(0<p<1)$ את ההסתברות של הצרכן ללכת למאפייה בשיווי משקל.
תוחלת התשלום של בעל המאפייה מלא לאפות סופגניות היא 0 בשני מצבי הטבע וללא תלות ב- $p$ של הצרכן. תוחלת התשלום שלו מלאפות סופגניות במצב הטבע $G$ היא $10p-5(1-p)=15p-5$. תוחלת התשלום מלאפות סופגניות במצב הטבע $B$ היא $5p-5(1-p)=10p-5$. כיוון ש- $0<p<1$, אזי $15p-5>10p-5$ ולכן לא יכול להיות שבעל המאפייה יהיה אדיש בין לאפות ולא לאפות סופגניות בשני מצבי הטבע , מפני שלא יתכן כי גם $15p-5=0$ וגם $10p-5=0$.

נבדוק חמישה מקרים אפשריים :

- $15p-5<0$ וגם $10p-5<0$. במקרה זה בעל המאפייה מעדיף לא לאפות סופגניות בשני מצבי הטבע. הצרכן לכן מעדיף לא ללכת כלל למאפייה. בסתירה לכך ש- $0<p<1$ .
- $15p-5>0$ וגם $10p-5>0$. במקרה זה בעל המאפייה רוצה לאפות סופגניות בשני מצבי הטבע. אבל אז, כאמור קודם, הצרכן מעדיף לא ללכת למאפייה. שוב בסתירה לכך ש- $0<p<1$ .
- $15p-5=0$ וגם $10p-5<0$, כלומר $p=\frac{1}{3}$ . במקרה זה בעל המאפייה אדיש בין לאפות לבין לא לאפות סופגניות במצב הטבע $G$ ורוצה לא לאפות סופגניות במצב הטבע $B$ . נסמן ב- $q$ את ההסתברות בה הוא אופה סופגניות במצב הטבע $G$. תוחלת התשלום של הצרכן מללכת למאפייה היא $\frac{1}{2}\times(10q-5(1-q))+\frac{1}{2}\times(-5)=7.5q-5$. כיוון שהוא אדיש בין ללכת לבין לא ללכת למאפייה צריך להיות ש $7.5q-5=0$, או $q=\frac{2}{3}$ . כלומר קיבלנו שיווי משקל בו הצרכן הולך למאפייה בהסתברות $\frac{1}{3}$, בעל המאפייה אופה סופגניות בהסתברות $\frac{2}{3}$ במצב הטבע $G$ ואינו אופה סופגניות במצב הטבע $B$ .
- $15p-5>0$ וגם $10p-5<0$. במקרה זה בעל המאפייה רוצה לאפות סופגניות במצב הטבע $G$ ואינו רוצה לאפות סופגניות במצב הטבע $B$ . אבל אז תוחלת התשלום של הצרכן אם הוא הולך למאפייה היא $\frac{1}{2}\times10+\frac{1}{2}\times(-5)=2.5$ ולכן הוא רוצה רק ללכת למאפייה ולא לשחק אסטרטגיה מעורבת. בסתירה לכך ש- $0<p<1$.
- $15p-5>0$ וגם $10p-5=0$, כלומר $p=\frac{1}{2}$ . כאן בעל המאפייה רוצה לאפות סופגניות במצב הטבע $G$ ואדיש בין לאפות לבין לא לאפות סופגניות במצב הטבע $B$. נסמן ב- $r$ את ההסתברות לאפות סופגניות במצב הטבע $B$ בשיווי משקל. תוחלת התשלום של הצרכן מללכת למאפייה היא במקרה זה

$\frac{1}{2}\times 10+\frac{1}{2}(-20r-5(1-r))=2.5-7.5r$. כיוון שהוא אדיש בין ללכת למאפייה לבין לא ללכת למאפייה צריך להתקיים $2.5-7.5r=0$, או $r=\frac{1}{3}$. כומר קיבלנו שיווי משקל בו הצרכן הולך למאפייה בהסתברות $\frac{1}{2}$, בעל המאפייה אופה סופגניות בהסתברות 1 במצב הטבע $G$ ובהסתברות $\frac{1}{3}$ במצב הטבע $B$.

לסיכום: קיבלנו שני שיווי משקל (לא טריוויאליים) במשחק זה. ניתן לראות כי בשני שיווי המשקל בעל המאפייה אופה סופגניות בהסתברות גדולה יותר במצב הטבע $G$ מאשר במצב הטבע $B$.