מבוא לתורת המשחקים לתלמידי משפטים ופילוסופיה – פתרון תרגיל 4

1. את הסיטואציה מתוך קטע הסרט ניתן לתאר באמצעות המשחק הבא:
נניח לשם פשטות כי ישנם רק שני בחורים, לכן $N=\{1,2\}$. לכל בחור יש אפשרות להתחיל עם הבחורה הבלונדינית או עם בחורה אחרת, לכן $A_1=A_2=\{B,N\}$. נציג את המשחק בעזרת מטריצה:

1/2	N	B
N	2,2	1,3
B	3,1	0,0

הסבר לתשלומים: כאשר שני הבחורים מתחילים עם הבחורה הבלונדינית כל אחד מהם נשאר ללא בחורה כלל ולכן תשלומו מינימלי. כל בחור מעדיף להיות עם הבחורה הבלונדינית מאשר עם בחורה אחרת, לכן, בהנתן שחברו לא מתחיל עם הבלונדינית, הוא יעדיף להתחיל איתה. בנוסף לכך, כל בחור, כאשר הוא מתחיל עם בחורה אחרת, מעדיף שגם חברו יתחיל עם בחורה אחרת ולא עם הבלונדינית בגלל רגשות הקנאה.
כלומר המשחק שמתאר היטב את הסיטואציה הנתונה הוא משחק ה- *Chicken* בו לכל שחקן, בהנתן שהשחקן השני מבצע פעולה מסוימת, כדאי לבצע את הפעולה ההפוכה, בניגוד למשחק דילמת האסיר בו לכל שחקן קיימת אסטרטגיה דומיננטית.
במקרה שלנו שני שיווי המשקל של המשחק הם (B,N) ו- (N,B).

3. קבוצת השחקנים במשחק היא $N=\{buyer, seller\}$. לקונה ישנן שתי אסטרטגיות: להציע מחיר גבוה או מחיר נמוך, כלומר $A_{buyer}=\{High, Low\}$. המוכר יכול לקבל או לדחות את הצעת הקונה <u>לאחר</u> שהיא נעשית, לכן אסטרטגיה טיפוסית של המוכר תהיה החלטה מראש מה יעשה כתגובה להצעה זו או אחרת של הקונה. לדוגמא, אסטרטגיה אפשרית של המוכר היא: לקבל את הצעת המחיר הגבוה של הקונה, אך לדחות את זו של המחיר הנמוך. נסמן אסטרטגיה זו של המוכר ע״י AR. האות הראשונה תסמן את התגובה של המוכר להצעת המחיר הגבוה, והשניה את תגובתו להצעת המחיר הנמוך. באופן דומה למוכר תהיינה שלוש אסטרטגיות נוספות AA, RA ו- RR. לכן בסה״כ $A_{seller}=\{AA, AR, RA, RR\}$.
ניתן לתאר את המשחק באמצעות המטריצה הבאה:

$buyer/seller$	AA	AR	RA	RR
$High$	1,2	1,2	0,0	0,0
Low	2,1	0,0	2,1	0,0

קל לראות כי במשחק זה קיימים שלושה שיווי משקל (Low, AA), $(High, AR)$ ו- (Low, RA).

4. a) ניתן לתאר את המשחק בצורה הבאה:

קבוצת השחקנים $N = \{1, 2\}$. ההחלטה של כל פירמה היא התקופה בה תשיק את המוצר (בזמן רציף), לכן קבוצת האסטרטגיות לכל פירמה היא $A_1 = A_2 = [0, \infty)$.

נשתמש ב- $v(t) = t$ ונקבל את פונקציות התשלום הבאות:

$$U_1(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1, & if \quad a_1 \le a_2 \\ 0, & if \quad a_1 > a_2 \end{cases}$$

$$U_2(a_1, a_2) = \begin{cases} a_2, & if \quad a_2 < a_1 \\ 0, & if \quad a_2 \ge a_1 \end{cases}$$

כאשר a_1 ו- a_2 הן התקופות בהן פירמה 1 ופירמה 2 משיקות את המוצר בהתאמה.

שיווי המשקל היחיד במשחק מתקבל כאשר שתי הפירמות משיקות את המוצר בתקופה 0 כלומר $a_1 = a_2 = 0$. נראה תחילה שזהו אכן שיווי משקל. בהנתן שפירמה 1 משיקה את המוצר בתקופה 0, האסטרטגיה האופטימלית עבור פירמה 2 היא להשיק את המוצר בתקופה 0 גם. התשלום של פירמה 2 מבחירת אסטרטגיה זו הוא 0. התשלום שלה מבחירת כל אסטרטגיה אחרת הינו 0 אף הוא, ולכן פירמה 2 לא תוכל לשפר את מצבה ע״י סטיה. בהנתן שפירמה 2 משיקה את המוצר בתקופה 0, האסטרטגיה האופטימלית עבור פירמה 1 היא להשיק את המוצר בתקופה 0 גם. במקרה זה פירמה 1 זוכה בכל השוק, אך ערך המוצר עבורה הוא 0 ולכן התשלום שלה הוא 0. אם תבחר בכל אסטרטגיה אחרת פירמה 1 לא תזכה בשוק ותשלומה יהיה 0. לכן גם פירמה 1 לא תוכל לשפר את מצבה ע״י סטיה.

עכשיו נבדוק שלא יכולים להיות שיווי משקל נוספים במשחק זה. נבדוק את האפשרויות הנותרות:

(i) $a_1 = a_2$, $a_1, a_2 > 0$. במקרה זה התשלום של פירמה 1 הוא a_1 והתשלום של פירמה 2 הוא 0. פירמה 2 יכולה לשפר את מצבה ע״י כך שתשחק איזשהו a_2' המקיים $0 < a_2' < a_1$ (זה אפשרי כי כאמור $a_1 > 0$) ותגדיל את התשלום שלה מ- 0 ל- a_2'. כלומר בהנתן האסטרטגיה a_1 של פירמה 1, a_2 איננה האסטרטגיה האופטימלית עבור פירמה 2. מכאן שצירוף אסטרטגיות זה אינו שיווי משקל של המשחק.

(ii) $0 \le a_i < a_j$. כאן התשלום של פירמה j הוא 0 והתשלום של פירמה i הינו a_i. בהנתן שפירמה j משחקת a_j, פירמה i יכולה לשפר את מצבה ע״י בחירת a_i' המקיים $a_i < a_i' < a_j$ (מספר כזה תמיד קיים כי הזמן הוא רציף). במקרה זה פירמה i עדיין זוכה בכל השוק, אך התשלום שלה כעת הוא a_i'. לכן גם זוג אסטרטגיות זה אינו מהווה שיווי משקל.

כלומר שיווי המשקל היחיד של המשחק הוא $a_1 = a_2 = 0$.

b) ניתן להציג את המשחק באופן הבא :

קבוצת השחקנים $N=\{1,2\}$. ההחלטה של כל שחקן היא באיזה יום לוותר, כאשר לצורך נוחות נניח כי השחקנים מתחילים ביום 0, לכן קבוצת האסטרטגיות לכל שחקן היא $A_1=A_2=\{0,1,2,3,...\}$.

פונקציות התשלום :

$$U_1(a_1,a_2)=\begin{cases} H-a_2c_1, & if \quad a_1>a_2 \\ \frac{1}{2}H+\frac{1}{2}L-a_1c_1, & if \quad a_1=a_2 \\ L-a_1c_1, & if \quad a_1<a_2 \end{cases}$$

$$U_2(a_1,a_2)=\begin{cases} H-a_1c_2, & if \quad a_2>a_1 \\ \frac{1}{2}H+\frac{1}{2}L-a_2c_2, & if \quad a_2=a_1 \\ L-a_2c_2, & if \quad a_2<a_1 \end{cases}$$

נסביר את פונקציות התשלום באמצעות שתי דוגמאות :

(1) נניח כי האסטרטגיה של שחקן 1 היא לוותר ביום 4 והאסטרטגיה של שחקן 2 היא לוותר ביום 10. המשחק מסתיים כאשר אחד השחקנים מוותר, לכן במקרה זה המשחק מסתיים ביום 4 כאשר שחקן 1 מחליט לוותר. בגלל ששחקן 1 הוא זה שויתר הוא מקבל L , אבל כיוון שעברו 4 ימים עד הויתור וכל יום המתנה עולה לו c_1 , התשלום של שחקן 1 בסה״כ יהיה $L-4c_1$. שחקן 2 מקבל H (כי הוא לא ויתר ביום 4), אבל בגלל שכל יום המתנה עלה לו c_2 , התשלום שלו יהיה $H-4c_2$.

(2) נניח כי האסטרטגיה של שני השחקנים היא לוותר ביום 6. במקרה זה המשחק מסתיים ביום 6. המנצח נקבע באופן רנדומלי, לכן לשחקן 1 יש סיכוי של $\frac{1}{2}$ להיות המנצח ולקבל את התשלום $H-6c_1$ וסיכוי של $\frac{1}{2}$ להיות המפסיד ולקבל תשלום של $L-6c_1$. בסה״כ (תוחלת) התשלום של שחקן 1 הוא אם כן $\frac{1}{2}(H-6c_1)+\frac{1}{2}(L-6c_1)=\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}L-6c_1$. באופן דומה התשלום של שחקן 2 תחת זוג אסטרטגיות כזה יהיה $\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}L-6c_2$.

עתה נחפש את שיווי המשקל של המשחק. נראה תחילה אילו צירופי אסטרטגיות אינם יכולים להיות שיווי משקל:

(i) $a_1=a_2=a$. התשלום של שחקן 1 במקרה זה הוא $\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}L-ac_1$ והתשלום של שחקן 2 הוא $\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}L-ac_2$. בהנתן ששחקן 1 משחק a , שחקן 2 יכול לשפר את מצבו ע״י כך שישחק, למשל, $a+1$, כלומר יבחר את יום הויתור שלו להיות יום אחרי יום הויתור של שחקן 1. במקרה זה המשחק עדיין

יסתיים ביום a (כי שחקן 1 מוותר ביום a) , אך התשלום של שחקן 2 כעת יהיה $H-ac_2$. כיוון ש - $H>L$, תשלום זה גבוה יותר מ- $\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}L-ac_2$. לכן צירוף אסטרטגיות בו שני השחקנים מחליטים לוותר באותו יום איננו יכול להיות שיווי משקל.

(ii) $0<a_1<a_2$. כאן המשחק מסתיים ביום a_1 בו מוותר שחקן 1 . התשלום של שחקן 1 הוא $L-a_1c_1$ והתשלום של שחקן 2 הוא $H-a_1c_2$. בהנתן ששחקן 2 משחק a_2 , שחקן 1 יכול לשפר את מצבו אם ישחק $a_1'<a_1$ (זה אפשרי כי $a_1>0$) ויגדיל את התשלום שלו מ- $L-a_1c_1$ ל- $L-a_1'c_1$. בצורה אינטואיטיבית, אם כבר שחקן 1 מוותר לפני שחקן 2 כדאי לעשות זאת מוקדם יותר כדי להקטין את עלות ההמתנה. לכן גם זוג אסטרטגיות זה לא יכול להיות שיווי משקל של המשחק.

(iii) $0<a_2<a_1$. באותו האופן כמו (ii) גם זה איננו יכול להיות שיווי משקל.

כיוון שכל האפשרויות לעיל אינן יכולות להיות שיווי משקל, אזי אם קיימים שיווי משקל הם חייבים להיות מהצורה $a_1=0$, $a_2>a_1$ או מהצורה $a_2=0$, $a_1>a_2$. נראה ששיווי משקל כאלה אכן קיימים ונחשב אותם.

נבדוק באילו תנאים זוג אסטרטגיות a_1,a_2 המקיימות $a_1=0$, $a_2>a_1$ יהיה שיווי משקל. התשלום של שחקן 1 כאן הוא L והתשלום של שחקן 2 הוא H. תחילה, התשלום של שחקן 2 הוא התשלום הגבוה ביותר ששחקן כלשהו יכול לקבל במשחק זה, לכן בהנתן ששחקן 1 משחק $a_1=0$, האסטרטגיה של שחקן 2 היא אופטימלית שכן אף אסטרטגיה אחרת לא תתן לו תשלום גבוה יותר. עכשיו נראה מתי בהנתן האסטרטגיה a_2 של שחקן 2, יהיה זה אופטימלי עבור שחקן 1 לשחק $a_1=0$. ראשית, לשחקן 1 בשום מקרה לא כדאי לסטות לאסטרטגיה a_1' המקיימת $0<a_1'<a_2$ כי אז התשלום שלו יהיה $L-a_1'c_1$ וזה קטן מ- L. שאר הסטיות האפשריות לשחקן 1 הן $a_1'=a_2$ או $a_1'>a_2$. במקרה ששחקן 1 סוטה ל- $a_1'=a_2$ התשלום שלו יהיה $\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}L-a_2c_1$, ואם סוטה ל- $a_1'>a_2$ תשלומו יהיה $H-a_2c_1$. כלומר הסטיה הטובה ביותר לשחקן 1 , בהנתן ששחקן 2 משחק a_2, היא סטיה לאסטרטגיה כלשהי a_1' המקיימת $a_1'>a_2$. נמצא את התנאים בהם הסטיה הכי טובה מבין כל הסטיות האפשריות של שחקן 1 לא תהיה כדאית עבורו, וכתוצאה מכך למעשה אף סטיה לא תהיה כדאית. לשחקן 1 לא יהיה כדאי לסטות לאסטרטגיה $a_1'>a_2$ אם התשלום שהוא מקבל כאשר משחק $a_1=0$ גדול לפחות כמו התשלום שיקבל אם יסטה. כלומר צריך להתקיים $L\geq H-a_2c_1$ או, לאחר העברת אגפים וחילוק ב- c_1 , $a_2\geq\frac{H-L}{c_1}$. לכן, צירוף אסטרטגיות a_1,a_2 כך ש- $a_1=0$, $a_2>a_1$ יהיה שיווי משקל אם (ורק אם) $a_2\geq\frac{H-L}{c_1}$.

באותו האופן בדיוק צירוף אסטרטגיות a_1, a_2 כך ש- $a_2 = 0$, $a_1 > a_2$ יהיה שיווי משקל אם (ורק אם) $a_1 \geq \frac{H-L}{c_2}$.

לסיכום, שיווי המשקל במשחק זה הם :

$$(0, a_2), \quad a_2 \geq \frac{H-L}{c_1}$$

$$(a_1, 0), \quad a_1 \geq \frac{H-L}{c_2}$$