מבוא לתורת המשחקים לתלמידי משפטים ופילוסופיה – פתרון תרגיל 3

1. קבוצת השחקנים במשחק היא $N=\{odd,even\}$. קבוצת האסטרטגיות לכל שחקן היא $A_{odd}=A_{even}=\{1,2,3\}$. ניתן לתאר את המשחק באמצעות המטריצה הבאה:

$odd\,/\,even$	1	2	3
1	-1,1	1,-1	-1,1
2	1,-1	-1,1	1,-1
3	-1,1	1,-1	-1,1

במשחק זה לא קיים שיווי משקל (באסטרטגיות טהורות). בכל משבצת בטבלה , בהנתן שהשחקן שתשלומו 1 משחק את האסטרטגיה המתאימה לאותה משבצת , לשחקן השני כדאי לסטות מהאסטרטגיה שלו לאסטרטגיה שתקנה לו תשלום של 1 במקום 1-. אי קיומו של שיווי משקל במשחק זה אינו אמור להטריד. ההיפך הוא הנכון. לו היה קיים שיווי משקל כזה פירוש הדבר היה כי הפתרון או התוצאה הצפויה של המשחק הוא מצב בו שחקן מסוים מנצח והשני מפסיד. המהות של משחק "זוג או פרט" כפי שאנו מכירים אותו היא באקראיות שבו: לכל שחקן שמשתתף בו יש סיכוי שווה לנצח ולהפסיד.

2. ניתן לתאר את המשחק באופן הבא:

קבוצת השחקנים $N=\{1,2\}$. קבוצות האסטרטגיות $A_1=A_2=\{m,m+1,m+2,...,M-1,M\}$.

פונקציות התשלום:

$$U_1(a_1,a_2)=\begin{cases} a_1, & if \quad a_1\le a_2 \\ 0, & if \quad a_1>a_2 \end{cases}$$

$$U_2(a_1,a_2)=\begin{cases} a_2, & if \quad a_2< a_1 \\ 0, & if \quad a_2\ge a_1 \end{cases}$$

שיווי המשקל היחיד במשחק מתקבל כאשר דרישת השכר של כל שחקן היא m , כלומר $a_1=a_2=m$.

נראה תחילה שזהו אכן שיווי משקל. בהנתן ששחקן 2 בוחר ב- m , עבור שחקן 1 האסטרטגיה האופטימלית היא לבחור ב- m גם , שכן התשלום שלו במקרה זה הוא m ואם יבחר בכל אסטרטגיה אחרת תשלומו יהיה 0. בהנתן ששחקן 1 בוחר ב- m , האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 2 אף היא לבחור ב - m . התשלום של שחקן 2 מבחירת אסטרטגיה זו הוא 0. התשלום שלו מבחירת כל אסטרטגיה אחרת הוא 0 גם, לכן לא יוכל לשפר את מצבו ע"י סטיה.

נוודא שלא קיימים שיווי משקל נוספים במשחק זה. נבדוק את כל האפשרויות הנותרות פרט ל- $a_1=a_2=m$ ונראה כי אינן יכולות להיות שיווי משקל.

(i) $a_1 = a_2$, $m < a_1, a_2 \le M$. במקרה זה התשלום של שחקן 1 הוא a_1 והתשלום של שחקן 2 הוא 0. שחקן 2 יכול לשפר את מצבו ע״י בחירת $a_2^{'} < a_1$ (זה אפשרי כי $a_1 > m$) והגדלת התשלום שלו מ- 0 ל-$a_2^{'}$. לכן בהנתן האסטרטגיה a_1 של שחקן 1 , a_2 אינה האסטרטגיה האופטימלית עבור שחקן 2. מכאן שצירוף אסטרטגיות זה אינו שיווי משקל.

(ii) $m \le a_1 < a_2 \le M$. כאן התשלום של שחקן 1 הוא a_1 והתשלום של שחקן 2 הוא 0. בהנתן ששחקן 2 משחק a_2 , שחקן 1 יכול לשפר את מצבו ע״י כך שישחק איזשהו $a_1^{'}$ המקיים $a_1 < a_1^{'} \le a_2$. במקרה זה שחקן 1 עדיין זוכה במשרה, אך מגדיל את תשלומו מ- a_1 ל- $a_1^{'}$. כלומר גם צירוף אסטרטגיות כזה אינו יכול להיות שיווי משקל של המשחק.

(iii) $m \le a_2 < a_1 \le M$. התשלום של שחקן 1 תחת זוג אסטרגיות זה הוא 0, והתשלום של שחקן 2 הוא a_2. בהנתן ששחקן 2 משחק a_2 , שחקן 1 יכול לבחור $a_1^{'} = a_2$, לזכות במשרה ולהגדיל את התשלום שלו מ- 0 ל - a_2. לכן צירוף אסטרטגיות כזה אף הוא איננו שיווי משקל.

בסה״כ הראינו כי $a_1 = a_2 = m$ הינו שיווי המשקל היחיד של משחק זה.

3. ניתן להציג את המשחק בצורה הבאה:

קבוצת השחקנים $N = \{1,2\}$, קבוצת האסטרטגיות לכל שחקן $A_1 = A_2 = \{180,181,182,...,299,300\}$.

פונקציות התשלום:

$$U_i(a_1,a_2) = \begin{cases} a_i + 5, & if \quad a_i < a_j \\ a_i, & if \quad a_i = a_j \\ a_j - 5, & if \quad a_i > a_j \end{cases}$$

שיווי המשקל היחיד במשחק זה הוא כאשר שני השחקנים משחקים $a_1 = a_2 = 180$. בהנתן ששחקן 2 בוחר ב - 180 , התשובה הטובה ביותר של שחקן 1 היא לבחור גם ב- 180, שכן התשלום שלו במקרה זה הוא 180 ואם יבחר בכל אסטרטגיה אחרת תשלומו יהיה $180 - 5 = 175$. כנ״ל לגבי שחקן 2. לכן $a_1 = a_2 = 180$ הינו שיווי משקל.

נבדוק שאין שיווי משקל נוספים במשחק. נסתכל על שאר האפשרויות:

(i) $a_1 = a_2 = a$, $180 < a_1, a_2 \le 300$. במקרה זה התשלום של כל אחד משני השחקנים הוא a. לכל שחקן, בהנתן שהשני משחק a, כדאי לסטות מאסטרגיה זו ולשחק $a-1$ (זה אפשרי כי $a > 180$). ע״י כך יוכל להגדיל את התשלום שלו ל - $a - 1 + 5 = a + 4$. לכן צירוף אסטרטגיות זה איננו שיווי משקל של המשחק.

(ii) $180 \le a_i < a_j \le 300$. התשלום של שחקן i כאן הוא $a_i + 5$ והתשלום של שחקן j הינו $a_i - 5$.

שחקן j , בהנתן ששחקן i משחק a_i , יכול לסטות ולשחק a_i אף הוא ובכך לשפר את מצבו ע"י הגדלת התשלום שלו ל - a_i. לכן זוג אסטרטגיות זה אינו שיווי משקל.

כלומר שיווי המשקל היחיד של המשחק הוא $a_1 = a_2 = 180$.