מבוא לתורת המשחקים לתלמידי משפטים ופילוסופיה – פתרון תרגיל 2

1. a) הפרט הינו ממקסם תוחלת התועלת , לכן לכל שתי הגרלות p ו- q מתקיים :

$$p \succsim q \Leftrightarrow p(a)v(a)+p(b)v(b)+p(c)v(c)+p(d)v(d) \geq q(a)v(a)+q(b)v(b)+q(c)v(c)+q(d)v(d)$$

כאשר $p(z)$ היא ההסתברות לקבלת פרס z בהגרלה p ו- $v(z)$ הינו מספר ברנולי המתאים לפרס z.

נתון כי $[b] \sim 0.8a \oplus 0.2d$, לכן $\qquad v(b)=0.8v(a)+0.2v(d) \qquad (1)$

נתון גם כי $[c] \sim 0.3a \oplus 0.7d$, לכן $\qquad v(c)=0.3v(a)+0.7v(d) \qquad (2)$

עתה, רוצים למצוא α המקיים $[c] \sim \alpha b \oplus (1-\alpha)d$ ולכן, המקיים $v(c)=\alpha v(b)+(1-\alpha)v(d)$

נציב עבור $v(b)$ מתוך (1) ונקבל

$$v(c)=\alpha\left[0.8v(a)+0.2v(d)\right]+(1-\alpha)v(d)=0.8\alpha v(a)+(0.2\alpha+1-\alpha)v(d)=0.8\alpha v(a)+(1-0.8\alpha)v(d)$$

השוואה ל (2) תיתן $\qquad 0.8\alpha = 0.3 \Rightarrow \alpha = 0.375$

b) תחילה, פרט המיוצג ע"י מספרי vNM $v(z)$ יהיה זהה לפרט המיוצג ע"י מספרי vNM $w(z)$, אם לכל שתי הגרלות p ו- q שני הפרטים יביעו אותו יחס בין ההגרלות.

במקרה שלנו $\qquad w(z)=3v(z)-5 \quad z=a,b,c,d$

נראה כי כאן אכן שני הפרטים מביעים יחס זהה בין כל שתי הגרלות.

תהיינה הגרלות p ו- q , אזי

$$\begin{aligned}
& p(a)v(a)+p(b)v(b)+p(c)v(c)+p(d)v(d) \geq q(a)v(a)+q(b)v(b)+q(c)v(c)+q(d)v(d) \\
\Leftrightarrow\ & 3\left[p(a)v(a)+p(b)v(b)+p(c)v(c)+p(d)v(d)\right]-5\left[p(a)+p(b)+p(c)+p(d)\right] \geq \\
& \geq 3\left[q(a)v(a)+q(b)v(b)+q(c)v(c)+q(d)v(d)\right]-5\left[q(a)+q(b)+q(c)+q(d)\right] \\
\Leftrightarrow\ & p(a)\left[3v(a)-5\right]+p(b)\left[3v(b)-5\right]+p(c)\left[3v(c)-5\right]+p(d)\left[3v(d)-5\right] \geq \\
& \geq q(a)\left[3v(a)-5\right]+q(b)\left[3v(b)-5\right]+q(c)\left[3v(c)-5\right]+q(d)\left[3v(d)-5\right] \\
\Leftrightarrow\ & p(a)w(a)+p(b)w(b)+p(c)w(c)+p(d)w(d) \geq q(a)w(a)+q(b)w(b)+q(c)w(c)+q(d)w(d)
\end{aligned}$$

כאשר השקילות הראשונה נובעת מהעובדה כי

$$p(a)+p(b)+p(c)+p(d)=q(a)+q(b)+q(c)+q(d)=1$$

הכללה של המקרה הקודם היא הטענה הבאה : מספרי vNM $v(z)$ ומספרי vNM $w(z)$ מייצגים את אותן ההעדפות אם ורק אם $z=a,b,c,d \quad w(z)=\alpha v(z)+\beta$ עבור $\alpha > 0$.

הוכחה:

$\Rightarrow$

נניח כי $w(z)=\alpha v(z)+\beta, (\alpha>0) \quad z=a,b,c,d$

נרצה להראות ש $v(z)$ ו- $w(z)$ מייצגים את אותן ההעדפות. ההוכחה תהיה זהה כמעט לחלוטין להוכחה המופיעה למעלה, עם ההבדל שבמקום המספרים 3 ו (-5) יופיעו α ו- β בהתאמה.

תהיינה p ו- q שתי הגרלות כלשהן, אזי

$$p(a)v(a)+p(b)v(b)+p(c)v(c)+p(d)v(d)\geq q(a)v(a)+q(b)v(b)+q(c)v(c)+q(d)v(d)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\left[p(a)v(a)+p(b)v(b)+p(c)v(c)+p(d)v(d)\right]+\beta\left[p(a)+p(b)+p(c)+p(d)\right]\geq$$

$$\geq \alpha\left[q(a)v(a)+q(b)v(b)+q(c)v(c)+q(d)v(d)\right]+\beta\left[q(a)+q(b)+q(c)+q(d)\right]$$

$$\Leftrightarrow p(a)\left[\alpha v(a)+\beta\right]+p(b)\left[\alpha v(b)+\beta\right]+p(c)\left[\alpha v(c)+\beta\right]+p(d)\left[\alpha v(d)+\beta\right]\geq$$

$$\geq q(a)\left[\alpha v(a)+\beta\right]+q(b)\left[\alpha v(b)+\beta\right]+q(c)\left[\alpha v(c)+\beta\right]+q(d)\left[\alpha v(d)+\beta\right]$$

$$\Leftrightarrow p(a)w(a)+p(b)w(b)+p(c)w(c)+p(d)w(d)\geq q(a)w(a)+q(b)w(b)+q(c)w(c)+q(d)w(d)$$

כאשר השקילות הראשונה נובעת מהעובדה כי

$$p(a)+p(b)+p(c)+p(d)=q(a)+q(b)+q(c)+q(d)=1$$

ומכך ש $\alpha>0$.

כדי להשלים את ההוכחה יש להראות גם את הכיוון השני $\Leftarrow$, דהיינו שמכך ש $v(z)$ ו- $w(z)$ מייצגים את אותן ההעדפות נובע כי $z=a,b,c,d \quad w(z)=\alpha v(z)+\beta$ עבור $\alpha>0$. כיוון זה קשה יותר ואנחנו לא נוכיח אותו כאן.

נדגים באמצעות דוגמא את העובדה כי אין זה נכון ש $v(z)$ ו- $w(z)$ מייצגים את אותן ההעדפות כאשר $w(z)$ אינם מהצורה $\alpha v(z)+\beta$, $\alpha>0$, גם אם $w(z)$ משמרים את הדירוג של $v(z)$ בין הפרסים.

נניח שישנם שלושה פרסים a, b ו- c והעדפות המיוצגות ע"י $v(a)=2$, $v(b)=1$, $v(c)=0$. נסתכל על מספרי vNM $w(z)$ כך ש $w(z)=\left[v(z)\right]^2$, כלומר $w(a)=4$, $w(b)=1$, $w(c)=0$. ניתן לראות כי הן לפי העדפות המיוצגות ע"י $v(z)$ והן לפי אלה המיוצגות ע"י $w(z)$ מתקיים $a\succ b\succ c$, כלומר קיים אותו דירוג בין הפרסים הבודדים. עכשיו נסתכל על שתי ההגרלות הבאות: ההגרלה המנוונת $[b]$ וההגרלה $\frac{1}{3}a\oplus\frac{2}{3}c$. פרט המיוצג ע"י $v(z)$ יעדיף את $[b]$, שכן $v(b)=1$ גדול מ $\frac{1}{3}v(a)+\frac{2}{3}v(c)=\frac{2}{3}$.

לעומת זאת פרט המיוצג ע״י $w(z)$ יעדיף את ההגרלה $\frac{1}{3}a\oplus\frac{2}{3}c$, שכן $\frac{1}{3}w(a)+\frac{2}{3}w(c)=\frac{4}{3}$ גדול מ $w(b)=1$. לכן מספרי vNM $v(z)$ ומספרי vNM $w(z)$ בדוגמא זו אינם מייצגים את אותן ההעדפות.

2. למקבל החלטות בשאלה זו ישנו יחס העדפה (כלומר יחס שלם וטרנזיטיבי) על קבוצת הפרסים Z. נסמנו ב $\succsim$. כאשר מקבל ההחלטות נאלץ לבחור מתוך קבוצת הגרלות הוא בוחר בהגרלה בה הפרס הטוב ביותר לפי $\succsim$ המתקבל בהסתברות חיובית ממש, הינו טוב לפחות כמו הפרסים הטובים ביותר לפי $\succsim$ המתקבלים בהסתברות חיובית ממש בהגלרות אחרות באותה קבוצה.

למקבל החלטות כזה נוכל לקרוא רציונלי במובן הכלכלי אם היחס על קבוצת ההגרלות $L(Z)$ שלפיו הוא מבצע את הבחירה שלו הוא יחס העדפה, כלומר שלם וטרנזיטיבי.

נסמן לכל הגרלה p בתור $best(p)$ את הפרס הטוב ביותר לפי $\succsim$ המתקבל בהסתברות חיובית ממש ב p.

לכל שתי הגרלות p ו- q $best(p)\succsim best(q)$ או $best(q)\succsim best(p)$ כי $\succsim$ כאמור שלם, ולכן הפרט תמיד יעדיף (חלש) את p על q או את q על p. כלומר היחס שלו על ההגרלות שלם.

אם הפרט מעדיף (חלש) את p על q ואת q על r אז $best(p)\succsim best(q)$ ו- $best(q)\succsim best(r)$. $\succsim$ טרנזיטיבי ולכן $best(p)\succsim best(r)$ ומכאן שהפרט מעדיף (חלש) את p על r. כלומר היחס של מקבל ההחלטות על ההגרלות הוא טרנזיטיבי.

בסה״כ היחס של מקבל ההחלטות על קבוצת ההגרלות הינו יחס העדפה. מקבל החלטות המבצע בחירה לפי יחס זה הוא לכן רציונלי במובן הכלכלי.

העדפותיו של מקבל החלטות זה אינן מקיימות את אקסיומת אי התלות.

נסתכל על הדוגמא הפשוטה ביותר:

נניח כי $p=[a]$, $q=[b]$, $r=[c]$, $c\succ a\succ b$ ו- $\alpha=0.5$.

$a\succ b$ לכן הפרט מעדיף ממש את $[a]$ על פני $[b]$. לעומת זאת הוא יהיה אדיש בין ההגרלות $0.5a\oplus 0.5c$ ו- $0.5b\oplus 0.5c$ כיוון שבשתי ההגרלות הפרס הטוב ביותר המתקבל בהסתברות חיובית הוא c.

3. $Z=\{a,b\}$ כאשר

a - מתן המתנה לילד 1.

b - מתן המתנה לילד 2.

העדפותיו של ההורה הן $[a]\sim[b]$ ו- $0.5b\oplus 0.5a\succ[a]$. העדפות אלה מפרות את תורת תוחלת התועלת בכך שהן מפרות את אקסיומת אי התלות, שכן לפי אקסיומה זו והעובדה כי $[a]\sim[b]$, היה צריך להתקיים $0.5b\oplus 0.5a\sim 0.5a\oplus 0.5a=[a]$.

4. נניח כי ההחלטה של הפרט לפני שהוא לומד איזה מבין שני מצבי הטבע a ו- b התממש היא "אני אנקוט בפעולה $x_1 \in A$ אם קורה a וב $y_1 \in B$ אם קורה b". כיוון שההסתברויות של a ו- b הן p_a ו- p_b בהתאמה, הפרט למעשה בוחר בהגרלה $p_a x_1 \oplus p_b y_1$. הפרט הינו ממקסם תוחלת התועלת, כלומר להעדפות שלו קיים ייצוג מהצורה $p_a v(x) + p_b v(y)$. הבחירה שלו בהגרלה $p_a x_1 \oplus p_b y_1$ על פני כל הגרלה אפשרית אחרת היא לכן שקולה לכך ש $p_a v(x_1) + p_b v(y_1) \geq p_a v(x) + p_b v(y)$ לכל $x \in A$, $y \in B$.

נניח עכשיו כי a התממש והפרט עומד בפני בחירה מתוך A. נניח בשלילה כי הוא מתחרט על ההחלטה הקודמת שלו לבחור ב x_1 אם קורה a, ועתה הפרט מעדיף לבחור ב $x_2 \in A$ כאשר $x_2 \neq x_1$. מתקיים לכן $v(x_2) > v(x_1)$. אבל אז

$$v(x_2) > v(x_1) \Rightarrow p_a v(x_2) + p_b v(y_1) > p_a v(x_1) + p_b v(y_1)$$

וזה סתירה לכך ש $p_a v(x_1) + p_b v(y_1) \geq p_a v(x) + p_b v(y)$ לכל $x \in A$, $y \in B$.

לכן לא יתכן כי מקבל ההחלטות משנה את דעתו לאחר שלומד כי מצב הטבע a התממש.

באותו האופן בדיוק לא יתכן כי הוא משנה את דעתו ובוחר ב $y_2 \neq y_1$ לאחר שמתממש מצב הטבע b.