

## מבוא לתורת המשחקים לתלמידי משפטים ופילוסופיה – פתרון תרגיל 1

1. התשובה לשאלה זו תלויה בהנחות מסוימות שיש להניח. נסתכל אם כן על שתי דרכים לענות על שאלה זו.

### דרך א'

בהנחה שהמטרה של הסטודנט היא לסיים את התואר, הסטודנט מעוניין להרשם לקורס שבו הסיכוי לקבל ציון "עובר" הוא הגבוה ביותר. נניח כי הסטודנט חושב שככל שהממוצע בקורס בשנה הקודמת היה גבוה יותר, כך רב יותר הסיכוי לעבור קורס זה השנה. הנחה זו נראית סבירה כאשר אין לסטודנט מידע מפורט יותר על הקורסים השונים. מהנחה זו ומטרת הסטודנט להרשם לקורס בעל הסיכוי הגבוה ביותר לקבל ציון "עובר" נקבל את יחס ההעדפה שלו על קבוצת הקורסים, המיוצג ע"י פונקצית התועלת הבאה:

$$U(x) = Av(x)$$

כאשר  $x$  הוא קורס כלשהו ו- $Av(x)$  הינו הציון הממוצע באותו קורס בשנה הקודמת. הסטודנט נאלץ לבחור קורס מתוך קבוצת הקורסים הפתוחים לרישום. הפעולה שתמקסם את פונקצית התועלת שלו על פני קבוצה זו היא בחירת קורס בעל הממוצע הגבוה ביותר. כיוון שהסטודנט אינו פועל בדרך זו, אלא בוחר בקורס הראשון בעל ממוצע הגבוה מ-70, הוא אינו פועל בצורה רציונלית במובן הכלכלי.

### דרך ב'

המטרה של הסטודנט היא עדיין לסיים את התואר, אך כאן הסטודנט חושב שבחירת קורס בעל ממוצע הגבוה מ-70 היא מספקת על מנת שיהיה לו סיכוי טוב לעבור את הקורס. בנוסף לכך הזמן של הסטודנט "יקר" והוא מעוניין לקצר את תהליך בחירת הקורס עד כמה שאפשר. פונקצית תועלת המתאימה להעדפות אלו היא

$$V(x) = \begin{cases} M - num(x), & \text{if } Av(x) > 70 \\ -num(x), & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר  $x$  הוא קורס כלשהו,  $num(x)$  הינו מספר הקורס (ככל שהקורס יותר רחוק ברשימה, מספרו גבוה יותר) ו- $M$  מספר חיובי הגדול מ- $num(x)$  לכל  $x$ . כמו במקרה הקודם הסטודנט בוחר מתוך קבוצת קורסים הפתוחים להרשמה. ניתן לראות בקלות כי הפעולה האופטימלית שלו במקרה זה היא לבחור את הקורס הראשון ברשימה בעל ממוצע הגבוה מ-70. כיוון שזה מה שהסטודנט עושה הוא פועל בצורה רציונלית במובן הכלכלי.

2. נתון כי העדפותיו של הפרט הן  $x \succ y$  ו-  $y \sim z$ . נרצה להראות כי לא יתכן שלא מתקיים  $x \succ z$ . נניח בשלילה אם כן שלא מתקיים  $x \succ z$ . כיוון שלכל זוג אלטרנטיבות  $a$  ו- $b$  בקבוצה  $X$  חייב להיות  $a \succ b$  או  $b \succ a$  או  $a \sim b$  (לא אפשרנו לפרט להתחמק מתשובה או לענות משהו השונה משלוש האפשרויות לעיל) אזי לפי הנחת השלילה בהכרח מתקיים  $z \succ x$  או  $x \sim z$ . נבדוק את שתי האפשרויות:

(i) אם  $x > z$ , יחד עם הנתון  $x > y$  והתכונה הראשונה של יחס ההעדפה נקבל כי  $z > y$  וזו סתירה לכך ש  $y \sim z$ .

(ii) אם  $x \sim z$ , יחד עם הנתון  $y \sim z$  והתכונה השנייה של יחס ההעדפה נקבל כי  $x \sim y$  וזו סתירה לכך ש  $x > y$ .

בסה"כ איפוא קיבלנו סתירה כאשר הנחנו בשלילה שלא מתקיים  $x > z$  ולכן מ  $x > y$  ו-  $y \sim z$  יחדיו נובע כי  $x > z$  ( $x > z \Leftarrow y \sim z \wedge x > y$ ).

3. בקטע המוזיקלי ניתן לשמוע כי גובה הצלילים עולה כך שכל צליל גבוה יותר מקודמו, אך ישנה תחושה כי למרות עליה מתמדת זו הצלילים האחרונים אינם גבוהים מאלה שהיו בהתחלה. ההסבר המוזיקלי לתופעה זו נעוץ בכך שכל צליל הוא למעשה אקורד המורכב ממספר צלילים באוקטבות שונות, ואקורד אחד נשמע גבוה יותר ממשנהו אם באותו אקורד מרבית הצלילים הם יותר גבוהים מהצלילים המקבילים באקורד השני. נדגים זאת באמצעות אקורדים בעלי שלושה צלילים. נניח כי גובה הצלילים יכול להיות 1, 2 או 3. כך לדוגמא (2,3,1) יסמן אקורד שגובה הצליל הראשון בו הוא 2, גובה הצליל השני הוא 3 וגובה הצליל השלישי הוא 1. נקבל כי

$$(1,2,3) < (2,3,1) < (3,1,2) < (1,2,3)$$

כאשר הסימון " $<$ " יהיה לכך שאקורד מימין לסימן זה נשמע גבוה יותר מזה שמשמאל לסימן.

את הקשר בין תופעה מוזיקלית זו לבין האפשרות שיחס העדפה יקיים חוסר טרנזיטיביות ניתן לראות במקרה בו לכל אלטרנטיבה ישנן מספר תכונות, והפרט מעדיף אלטרנטיבה אחת על פני אלטרנטיבה אחרת אם הוא מוצא את מרבית התכונות באלטרנטיבה הראשונה כיותר טובות מאלה שבאלטרנטיבה השנייה.