פתרון מבחן במבוא לתורת המשחקים לתלמידי משפטים ופילוסופיה

פברואר 2005

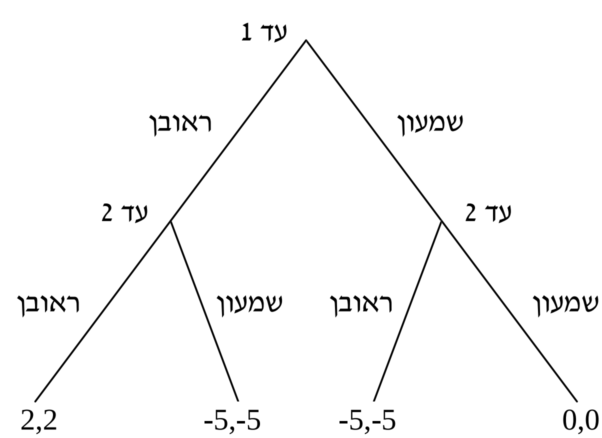
שאלה 1:

א. לשם ניתוח המצב נניח כי הפושע הוא ראובן. הניתוח יהיה זהה במקרה בו הפושע הוא שמעון.
את הסיטואציה ניתן להציג באמצעות משחק המתואר ע״י המטריצה הבאה:

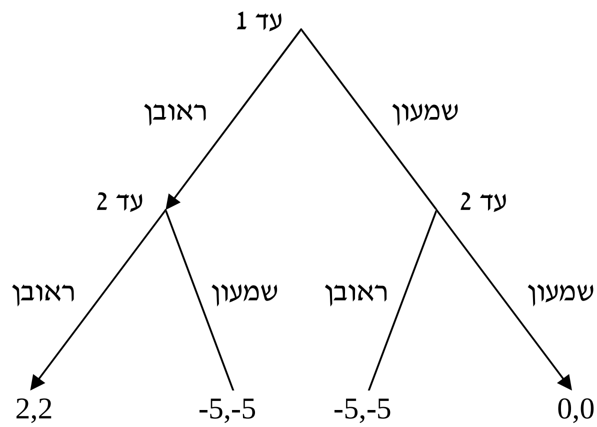
עד 2 \ עד 1	ראובן	שמעון
ראובן	2,2	-5,-5
שמעון	-5,-5	0,0

התשלום של כל שחקן הינו הכי גבוה כאשר האשם האמיתי מועמד לדין, והכי נמוך כאשר הוא עצמו הופך להיות החשוד העיקרי.
הכלי מתורת המשחקים בו נשתמש על מנת לנסח את הטענה, כי העובדה ששניהם יצביעו על אותו חשוד ״לא תוכיח דבר״ הינו שיווי משקל נאש, והטענה היא: קיים שיווי משקל נאש בו שני העדים מצביעים על הפושע האמיתי וגם שיווי משקל נאש בו שניהם מצביעים על אדם זכאי.
ניתן לראות שאכן קיימים שיוויי משקל נאש (ראובן, ראובן) ו- (שמעון, שמעון) ולכן מהעובדה ששני העדים יצביעו על אותו אדם לא ניתן ללמוד דבר.

ב. נניח גם כאן כי הפושע הוא ראובן.
העד השני ישמע את עדותו של העד הראשון בטרם יעיד, לכן המשחק שמתאים לסיטואציה זו מתואר ע״י העץ הבא:



הכלי בו נשתמש על מנת לטעון שפרוצדורה זו מבטיחה ש״הצדק יצא לאור״ הינו SPE והטענה היא: בשיווי משקל תת-משחק פרפקטי שני העדים יצביעו על הפושע.
במקרה בו ראובן אשם האסטרטגיות של SPE מתוארות ע״י חצים בעץ הבא:

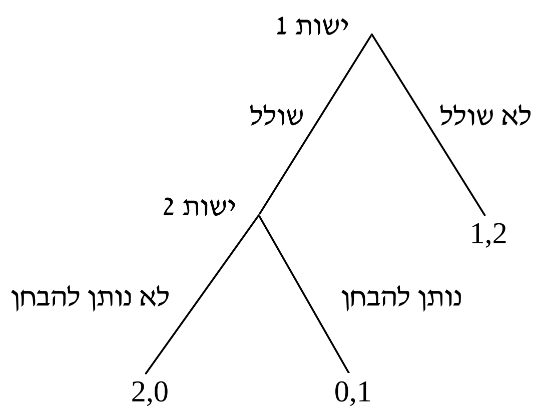


תוצאת ה- SPE היא ששני העדים אכן מצביעים על ראובן.

הניתוח יהיה זהה במקרה בו שמעון אשם, ולכן בין אם הפושע הוא ראובן ובין אם הוא שמעון "הצדק יצא לאור".

<u>שאלה 2</u>:

את שיקוליו של המורה ניתן לנתח באמצעות משחק בין שתי הישויות שלו, המתואר ע"י העץ הבא:



התשלומים של שתי ישויות המורה בקודקודים הסופיים מייצגים את העובדות הבאות:

1) שתי ישויות המורה מעדיפות לא לשלול מהתלמיד את הזכות להבחן מלכתחילה מאשר לשלול את זכותו ואחר כך לתת לו להבחן (בשני המקרים התלמיד נבחן ובמקרה השני המורה "יוצא" כמי שאינו עומד במילה שלו).

2) מטרת המורה, לפני שהוא שומע את נימוקי התלמיד, הינה לפעול לפי הכללים אותם קבע בתחילת הקורס, לכן התוצאה הטובה ביותר עבור ישות 1 היא כאשר התלמיד אינו נבחן.

3) אחרי שהמורה שומע את נימוקי התלמיד, הוא מעדיף לתת לו להבחן במקום להצמד לכללים שקבע בהתחלה, לכן התשלום של ישות 2 גבוה יותר כאשר הוא נותן לתלמיד להבחן מאשר כאשר הוא אינו נותן לו להבחן.

ה- SPE היחיד של משחק זה (שהינו גם שיווי המשקל היחיד של המשחק בכלל) הוא כאשר ישות 2 נותנת לסטודנט להבחן וישות 1 אינה שוללת את זכות הבחינה מהתלמיד. כלומר, כיוון שהמורה יודע שלאחר שישמע את נימוקי התלמיד, הוא יעדיף לאפשר לו להבחן, המורה אינו שולל את זכות הגישה לבחינה מלכתחילה.

<u>שאלה 3</u>:

הקבוצה בעלת K הפרטים תקרא קבוצה 1 והקבוצה בעלת L הפרטים - קבוצה 2.

נסמן את האסטרטגיות של שחקן השורות ושחקן העמודות בשיווי משקל מעורב ע"י $(p,1-p)$ ו- $(q,1-q)$ בהתאמה (בסעיף ב' אלה יהיו סימונים לאסטרטגיה של חבר קבוצה 1 ולאסטרטגיה של כל אחד משני חברי קבוצה 2 בהתאמה, כיוון שמחפשים שוויי משקל סימטריים).

א. במקרה ש- K=L=1 ניתן לתאר את המשחק באמצעות המטריצה הבאה:

פרט מקב' 2 \ פרט מקב' 1	U	D
U	-1/4, -1/4	3/4, 0
D	0, 3/4	0, 0

שוויי המשקל של המשחק:

כמובן ש- (U,D) ו- (D,U) הם שני שוויי המשקל הטהורים היחידים של המשחק. אם בש"מ $0<p<1$,

שחקן 1 צריך להיות אדיש בין שתי האסטרטגיות הטהורות שלו ולכן $-\frac{1}{4}q+\frac{3}{4}(1-q)=0 \Rightarrow q=\frac{3}{4}$

לכן גם שחקן 2 צריך להיות אדיש בין שתי הפעולות שלו מה שגורר ש- $p=\frac{3}{4}$.

כלומר שיווי המשקל המעורב הלא מנוון היחיד הינו $p=q=\frac{3}{4}$.

ב. K=1, L=2. נביט בשלושה מקרים:

1) $p=1$.

אם פרט מקבוצה 2 בוחר U התשלום שלו יהיה 1/4- (הקבוצה שלו לא תקבל את הדגל כי הפרט מקבוצה 1 עולה להר בהסתברות 1, ויש לו הפסד תועלת של 1/4 מהטיפוס להר). אם הוא בוחר D תשלומו יהיה 0.

לכן התשובה הטובה ביותר של כל פרט מקבוצה 2 כנגד $p=1$, היא $q=0$.

בהנתן ששני הפרטים מקבוצה 2 משחקים $q=0$, אזי אם הפרט היחיד מקבוצה 1 בוחר U, תשלומו יהיה 3/4 כיוון שיקבל את הדגל, ואם הוא בוחר D, תשלומו יהיה 0.

לכן התשובה הטובה ביותר של הפרט מקבוצה 1 כנגד $q=0$, היא $p=1$.

לכן $q=0$, $p=1$ הינו שיווי המשקל היחיד בו $p=1$.

2) $p=0$.

אם פרט מקבוצה 2 בוחר U אזי התשלום שלו הינו 3/4 (הקבוצה שלו מקבלת את הדגל כי הפרט מקבוצה 1 אינו עולה להר). אם הוא בוחר D אזי תוחלת התשלום שלו היא :

$$P(\text{חברו מקבוצה 2 יעלה להר})\times 1+P(\text{חברו מקבוצה 2 לא יעלה})\times 0=q\times 1+(1-q)\times 0=q$$

אין ש״מ עם $q<\frac{3}{4}$, כי אז U עדיפה לפרט מקבוצה 2 על D, אבל D צריכה הייתה להיות פעולה טובה ביותר. בדומה לא יתכן בש״מ ש- $q>\frac{3}{4}$.

אם $q=\frac{3}{4}$, אזי כל פרט מקבוצה 2 אמנם אדיש בין U ו- D. באשר לפרט מקבוצה 1 תוחלת התועלת מ-U :

$$P(\text{אף אחד מחברי קבוצה 2 לא יעלה})\times 1-\frac{1}{4}=(1-\frac{3}{4})^2\times 1-\frac{1}{4}=\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{16}$$

פחות מהתשלום שלו מ- D , 0. כלומר D אופטימלי עבור פרט מקבוצה 1, דהיינו $p=0$. ולכן $p=0$, $q=\frac{3}{4}$ הינו שיווי המשקל היחיד בו $p=0$.

3) $0<p<1$.

הפרט מקבוצה 1 צריך להיות אדיש בין 0 ,התועלת מ- D , ותוחלת התועלת מ- U

$$P(\text{אף אחד מחברי קבוצה 2 לא יעלה})\times 1-\frac{1}{4}=(1-q)^2-\frac{1}{4}$$

דהיינו $(1-q)^2-\frac{1}{4}=0\Rightarrow(1-q)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow q=\frac{1}{2}$

לכן חברי קבוצה 2 בש״מ אדישים בין U ו- D, והתשלום שלהם משתי האסטרטגיות הטהורות הללו חייב להיות זהה. התשלום של חבר מקבוצה 2 מ- U הינו $(1-p)-\frac{1}{4}$, ומ D- $(1-p)\times q\times 1=\frac{1}{2}(1-p)$, ו $(1-p)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(1-p)\Rightarrow p=\frac{1}{2}$. לכן $p=q=\frac{1}{2}$ הינו שווי המשקל היחיד בו $0<p<1$.

קיבלנו שיווי משקל סימטרי יחיד בו כל הפרטים עולים להר בהסתברות חיובית, ובשיווי משקל זה הם עולים להר בהסתברות שווה.