פתרון מבחן במיקרו כלכלה ב

אביב תשנ"ה - 10 יוני 2005

## 1. בעיית ארנקים

א. נתאר את הסיטואציה כמשחק הבייסיאני $\langle N,\Omega,(A_i),(T_i),(\tau_i),(p_i),(\succ_i)\rangle$:

- קבוצת השחקנים $N=\{1,2\}$
- מצבי הטבע $\Omega = T_1 \times T_2$ הם צירופים של סכומים בכל אחד מהארנקים (שהם גם הסיגנלים)
- פעולות השחקנים $A_1 = A_2 = \Re_+$ הן ההצעות
- הסיגנלים $T_1 = T_2 = \Re_+$
- פונקציות הסיגנל $\tau_i(\Omega) = T_i$
- יחס העדפה של כל שחקן על סכום הכסף אשר נותר בידיו בתום המשחק $x \succ y \Leftrightarrow x > y$
- אמונות השחקנים $p_i$ אינן מוגדרות בשאלה

ב. נתייחס למצב בו כל אחד מהשחקנים מציע כפול מסכום הכסף שהיה מצוי בארנקו. נסתכל ל.ה.כ. על שחקן 1. כעת שחקן 1 מציע $2\cdot t_1$, נראה כי לכל טיפוס $t_1$ של שחקן 1 לא משתלם לשחקן 1 לסטות.

- אם בארנק של שחקן 2 יש סכום כסף נמוך יותר $t_1 > t_2$ : כעת שחקן 1 זוכה, משלם $2\cdot t_2$ ומרוויח $t_1 + t_2 - 2\cdot t_2 = t_1 - t_2 > 0$. אם יציע יותר, או כל סכום אחר הגדול מ- $2\cdot t_2$, עדיין יזכה וישלם $2\cdot t_2$, כלומר מצבו לא ישתנה. אם יציע פחות מ- $2\cdot t_2$, לא יזכה, לא ישלם כלום וירוויח 0, כלומר מצבו יורע.
- אם בארנק של שחקן 2 יש סכום כסף גבוה יותר $t_1 < t_2$ : כעת שחקן 1 לא זוכה ולא משלם ולכן מרוויח 0. אם יציע פחות, או כל סכום אחר הקטן מ- $2\cdot t_2$, עדיין לא יזכה ולא ישלם כלום, כלומר מצבו לא ישתנה. אם יסטה ויציע יותר מ- $2\cdot t_2$, יזכה וישלם $2\cdot t_2$, כלומר ירוויח $t_1 + t_2 - 2\cdot t_2 = t_1 - t_2 < 0$, כלומר מצבו יורע.
- כאשר לשניהם אותו סכום בארנק (עבור כל כלל שובר שוויון אפשרי) לא משנה מה יציע שחקן 1, יקבל לא יותר מ-0 – אם יציע יותר מ- $2\cdot t_2$ יזכה וישלם בדיוק $2\cdot t_2$ שזה גם סכום הכסף בשני הארנקים, אם יציע פחות מ- $2\cdot t_2$ לא יזכה וירוויח 0. לכן לא כדאי לשחקן 1 לסטות.

לכן לכל טיפוס של שחקן 1 ולכל אמונה שיש לו על התפלגות הטיפוסים של שחקן 2, לא משתלם לשחקן 1 לסטות.

ג. זהו אינו שיווי המשקל הבייסיאני היחיד של המשחק. לדוגמא, שיווי משקל מתקבל כאשר שחקן 1 מציע תמיד סכום הגבוה מכל סכום אפשרי בשני הארנקים יחדיו, ושחקן 2 מציע תמיד 0.

## 2. בעיית מיקוח עם יכולת הרס

א. נזכר בשיווי המשקל היחידי במשחק בלי יכולת ההרס:

$$x^* = \left[\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right],\ y^* = \left[\frac{\delta}{1+\delta}, \frac{1}{1+\delta}\right]$$

שיווי משקל זה הוא גם שיווי משקל במשחק שלפנינו. אם הצעתו של שחקן i לא התקבלה, הוא יכול להבטיח לעצמו $\frac{\delta}{1+\delta}$ בתקופה הבאה. לעומת זאת, אם יהרוס את חלק העוגה שברשותו יקבל לכל היותר מחצית מחלק זה בתקופה הבאה. לכן לא כדאי לשחקן להרוס את החלק שהביא, ושיווי המשקל בו שחקן 2 מקבל $\frac{\delta}{1+\delta}$ נשמר.

ב. כדי למצוא ש"מ בו שחקן 2 מקבל $\frac{\delta}{2\cdot(1+\delta)}$ נסתכל בכל תת משחק $G_i$ (תת המשחק בו שחקן i הוא המציע) על ההצעות הבאות:

- אם שחקן כלשהו הרס את החצי שלו באחת התקופות הקודמות, שחקן i דורש (מתוך החצי הנותר) $\frac{1}{1+\delta}$ לעצמו ומציע $\frac{\delta}{1+\delta}$ לשחקן j ואף שחקן לא הורס את החצי שתרם לעוגה.
- אם שני החצאים עדיין לא נהרסו, שחקן i דורש $\frac{2+\delta}{2\cdot(1+\delta)}$ לעצמו ומציע $\frac{\delta}{2\cdot(1+\delta)}$ לשחקן j, אם שחקן j מסרב, שחקן i הורס את החצי שתרם לעוגה.

קל לראות כי לאחר ששחקן כלשהו הורס את החצי שלו, לא כדאי לשחקן השני להרוס את החצי שלו (אם יהרוס יקבל תשלום 0 בוודאות) ונותרנו אם שיווי המשקל הפרפקטי היחידי מהמשחק ללא יכולת ההרס (כאשר השלם הוא חצי העוגה שנותרה).

נסתכל על ההצעות לפני שנהרס חצי מהעוגה (בתת משחק $G_i$). שחקן j מוכן לקבל את ההצעה כי אם לא אז תיהרס חצי עוגה והוא יקבל בתקופה הבאה $\frac{1}{1+\delta}$ מתוך חצי העוגה שנותרה, אשר בהתחשב בהיוון זה $\frac{\delta}{2\cdot(1+\delta)}$ במונחי התקופה הנוכחית. שחקן i לא יכול לדרוש יותר שכן אז לשחקן j ישתלם ממש לסרב. בנוסף, שחקן i מוכן להרוס את החצי שהוא תרם במידה והצעתו לא תתקבל שכן אם לא יהרוס את

החצי שתרם יבטיח לעצמו $\frac{\delta}{2\cdot(1+\delta)}$ בתקופה הבאה, אם כן יהרוס יקבל $\frac{\delta}{1+\delta}$ מחצי מהעוגה ששווה ל- $\frac{\delta}{2\cdot(1+\delta)}$.

### 3. מיקוח עם אינפורמציה לא מלאה

א. נסמן ב- $p_1$ את המחיר שהמוכר מציע בתקופה הראשונה וב- $p_2$ את המחיר שהמוכר מציע בתקופה השנייה. להלן שיווי משקל PBE שבו שני השחקנים קונים את המוצר במחיר 5:

- המוכר מציע $p_1=5$ בתקופה הראשונה ו- $p_2=5$ בתקופה השנייה.
- האסטרטגיה של שחקן מטיפוס v=5 היא קנה בתקופה הראשונה אם $p_1\le 5$ וקנה בתקופה השנייה אם $p_2\le 5$.
- האסטרטגיה של שחקן מטיפוס v=8 היא קנה בתקופה הראשונה אם $p_1\le 5$ וקנה בתקופה השנייה אם $p_2\le 8$.
- האמונות של המוכר בקבוצת האינפורמציה הראשונה הן $\beta(v=5|I_1)=\beta(v=8|I_1)=\frac{1}{2}$ ובקבוצת האינפורמציה השנייה הן $\beta(v=5|I_2)=\beta(v=8|I_2)=\frac{1}{2}$.

התוצאה של המשחק היא ששני הטיפוסים רוכשים את המוצר בתקופה הראשונה במחיר 5.
לשני טיפוסי הקונים לא כדאי לסטות, מכוון שהם לא יכולים לקנות את המוצר בפחות מ-5 (מכוון ששני המחירים הם 5), סטייה תוביל לכך שהם ירכשו את המוצר ב-5 או שהם לא ירכשו את המוצר בכלל. כך או כך הסטייה אינה משפרת את מצבם. למוכר לא כדאי לסטות מכוון שאם הוא מעלה את המחיר בתקופה הראשונה הוא ימכור את המוצר בתקופה השנייה באותו מחיר. אם הוא מעלה את המחיר בתקופה השנייה, רק קונה מטיפוס v=8 ירכוש את המוצר ובהינתן האמונות שלו הוא יקבל תשלום של 8 (לכל היותר) בהסתברות 0.5 שנמוך מ-5. בנוסף, ברור שלא כדאי למוכר להציע מחיר נמוך מ-5. הראנו שלאף שחקן לא כדאי לסטות ולכן אלו אסטרטגיות שווי משקל.
הערה: ישנן אסטרטגיות נוספות שמובילות לאותה תוצאה בה שני סוגי הקונים רוכשים את המוצר במחיר 5 (בתקופה הראשונה או השנייה).

ב. לא יתכן מצב בו שני טיפוסי הקונים רוכשים את המוצר במחירים שונים. נניח שהמוכר מציע זוג מחירים כך ש: $p_1\neq p_2$. במידה שטיפוס אחד של השחקנים רוכש את המוצר ב- $p_1$ והטיפוס השני רוכש את המוצר ב- $p_2$, הטיפוס שרוכש את המוצר במחיר הגבוה מבין השניים יכול להרוויח מהסטייה על ידי חיקוי האסטרטגיה של הטיפוס השני ורכישת מוצר במחיר הזול.

ג. למשחק אין שווי משקל בו לא מתקיים ששני הטיפוסים קונים את החפץ במחיר 5.

קודם כל ברור שבכל שיווי משקל $\min[p_1, p_2] \geq 5$ (בכל שיווי משקל המוכר יכול להבטיח לעצמו תשלום של לפחות 5 לכן לא יציע מחיר נמוך מ-5). על מנת למצוא שיווי משקל אחר בו לא שני הטיפוסים רוכשים את המוצר במחיר 5 חייב להתקיים ש- $\min[p_1, p_2] > 5$. לפי הסעיף השני אנו יודעים שאין שיווי משקל בו שני סוגי הטיפוסי הקונים רוכשים את המוצר במחיר שונה לכן האפשרות היחידה שנותרה היא לקבוע אסטרטגיה מחירים למוכר כך שרק קונה מטיפוס v=8 רוכש את המוצר. אבל אז בשווי משקל המוכר חייב להחזיק אמונות בהן $\beta(v=5|I_2) \geq \frac{1}{2}$ ואם אלו האמונות שלו, הוא יכול הרוויח על ידי קביעת מחיר $p_2 = 5$. אבל זו סתירה לכך ש: $p_2 > 5$.

## 4. משחק עם דגימה

א. התשובה הטובה ביותר נגד פעולה a במשחק היא הפעולה a והתשובה הטובה ביותר נגד פעולה b במשחק היא הפעולה b. אם $P(a) = P(b) = 1/2$ אז ההסתברות ש- a היא התשובה הטובה ביותר היא 0.5 וההסתברות ש- b היא התשובה הטובה ביותר היא 0.5 . כלומר, $P(a) = P(b) = 1/2$ היא התפלגות יציבה של התנהגויות.

ב. התשובה הטובה ביותר נגד פעולה a במשחק היא הפעולה b והתשובה הטובה ביותר נגד פעולה b במשחק היא הפעולה a. נניח שההתפלגות באוכלוסיה היא $P(a) = \alpha$ ו- $P(b) = 1 - \alpha$. אזי ההסתברות ש-a היא התשובה הטובה ביותר היא $1 - \alpha$. לכן צריך להתקיים $a = 1 - \alpha$, כלומר $a = 1/2$.

ג. התהליך הבא יגדיר קבוצה B כך שכל איבר ב-B יהיה תשובה טובה ביותר בדיוק לאיבר אחד בקבוצה B. נגדיר את סדרת הפעולות הבאה: ניקח פעולה כלשהי בקבוצה A ונגדיר אותה בתור $a_1$. בשלב הבא נמצא את התשובה הטובה ביותר של $a_1$ ונגדיר אותה בתור $a_2$. אם $a_2$ שווה לאחד מהאיברים הקודמים בסדרה אז נפסיק את התהליך אם לא נמצא את התשובה הטובה ביותר של $a_2$ ונגדיר אותה בתור $a_3$ ונמשיך עם התהליך עד שנסגור מעגל (המעגל חייב להסגר והתהליך חייב להסתיים מכוון ש-A היא קבוצה סופית של פעולות). נניח שהתהליך הסתיים ב-$a_k$ ו: $a_k = a_j$ ($a_j$ הוא איבר קודם בסדרה השווה ל-$a_k$ ). הקבוצה B תכלול את האיברים בסדרה מ- $a_{j+1}$ עד $a_k$. , נסמן את מספר איברים בקבוצה הזו ב-N ( $N = k - j$ ). התפלגות יציבה של האוכלוסייה תהיה התפלגות בה $P(a) = 1/N$ אם $a \in B$ ו-0 אחרת. התפלגות זו יציבה כי שההסתברות ש-a היא הפעולה הטובה ביותר היא $1/N$. זאת כי כל פעולה בתוך הקבוצה B היא פעולה טובה ביותר בדיוק לאיבר אחד בקבוצה.