פתרון מבחן בתיאוריה מיקרו כלכלית/ינואר 2005

הפתרון : תמיר אלדמע תשובה

איתי פיינמסר

.1

א. במידה ולא קיים צירוף (a,b) המקיים את מגבלת הרווח $f(a,b)P_y - aP_a - bP_b \geq M$ בחר (a,b) הממקסמים את הביטוי $f(a,b)P_y - aP_a - bP_b$ (כלומר מקסם רווחים).

אחרת בחר (a,b) הממקסמים את a בכפוף למגבלת הרווח.

בעיה זו מגדירה יחס העדפה שלם וטרנזיטיבי על הקבוצה

$\{(a,b) \mid f(a,b)P_y - aP_a - bP_b \geq M\}$ נסמן קבוצה זו ב $\overline{M}$.

בהנחה שלבעיית הפירמה יש פתרון (ומכאן בהכרח גם שהפירמה יכולה להשיג רווח M), נקבל שקבוצת הבחירה של הפירמה מכילה תמיד איברים מ $\overline{M}$, ושבכל בעיית בחירה בה יש איברים מ- $\overline{M}$ ואיברים נוספים יבחר תמיד איבר **הממקסם** את כמות העובדים ונמצא ב- $\overline{M}$. מכאן, מובטח כי בחירת הפירמה מקיימת את תנאי '*', כלומר בחירת הפירמה עקבית עם מודל האדם הרציונאלי.

ב. (שימו לב: בסעיף זה נפלה טעות בשאלה. יש להראות כי היחס $\frac{p_a}{p_b}$ אינו קטן משיעור התחלופה ביצור בין עבודה וחומר גלם, ולא להפך כפי שכתוב בשאלה).

משמעות יחס התחלופה בייצור (להלן MRS) היא כי הפירמה יכולה, להוסיף כמות ε של עובדים לוותר על $\varepsilon \cdot MRS$ של חומרי גלם ולקבל את אותה כמות מיוצרת.

אם היחס $\frac{p_a}{p_b}$ גדול מיחס זה, אז הפירמה יכולה לבצע שינוי ביחס זה כך שיגדיל את מספר העובדים מבלי לפגוע במגבלת הרווח (ההשפעה של השינוי על הרווח היא $\varepsilon \cdot MRS \cdot P_b - \varepsilon \cdot P_a$. גודל זה אינו שלילי כאשר $MRS \geq \frac{P_a}{P_b}$) - בסתירה לכך שהפירמה מעסיקה כמה שיותר עובדים.

ג. ממגבלת הרווח בסעיף א' ניתן לראות שהרווח עולה ב P_y. עלייה ברווח תאפשר לפירמה להעסיק יותר עובדים (שכן היא יכולה, לכל הפחות, להשתמש בתוספת הרווח לתשלום שכר תוך שמירה על מגבלת הרווח).

ד. לא. בהינתן בחירה של כמויות עובדים וחומרי גלם, הכפלה של מחירי כל המוצרים בקבוע מכפילה גם את הרווח באותו שיעור. הגדלה ברווח תאפשר לפירמה להעסיק יותר עובדים וצמצומו יכריח אותה לצמצם בכמות העובדים. כאשר M=0, מתקיימת הומוגניות מדרגה 0 שכן אז הרווח לא משתנה כתוצאה מהכפלת כל המחירים בקבוע חיובי כלשהו.

.2

א. במידה ולכל הפרטים אותו יחס העדפה על קבוצת הבתים, בכל חלוקה דטרמיניסטית קיים פרט אשר יקבל את הבית הגרוע ביותר עבורו בהסתברות 1. עבור פרט זה החלוקה זהה לתור בו הוא אחרון בהסתברות 1, לכן פרט זה לא יעדיף את החלוקה הדטרמיניסטית על פני התור הרנדומי.[1]

ב. נסמן את קבוצת הבתים ב- $\{a,b,c\}$ ואת קבוצת הפרטים ב- $\{i,j,k\}$. נניח, $a \succ_i b \succ_i c$, $b \succ_j c \succ_j a$ ו- $a \succ_k b \sim_k c$. קל לראות שהפרטים יעדיפו את החלוקה הוודאית $(x_i, x_j, x_k) = (a,b,c)$ על פני הפרוצדורה הרנדומית.

ג. שיווי משקל תחרותי הוא וקטור של מחירים והקצאות (כל הקצאה כוללת כסף ומיקום בתור) כך שעבור כל פרט הסל המתקבל הוא אופטימאלי בהינתן קבוצת הבחירה העומדת בפניו (קבוצת המיקומים בתור), וקטור המחירים, והקצאתו הראשונית ובנוסף כל מיקום בתור נרכש על ידי פרט אחד בלבד.

ד. המיקום בתור מאפשר לבחור את הבית העדיף ביותר מקבוצת הבתים שלא נבחרו על ידי פרטים שמיקומם בתור גבוה יותר. נניח שאינדקס הבתים מקיים לכל k, j , $v(k) \geq v(j)$ אם ורק אם $k > j$. היות ולפרטים אותה פונקצית תועלת (מכל הקצאה של בתים וכסף), מיקום בתור קובע חד-חד-ערכית את התועלת הנובעת מהבית שיתקבל.

אם קיימים j, j' כך ש- $v_j - v_{j'} < p_j - p_{j'}$, לא יהיה אף פרט שיסכים לרכוש את המיקום j שכן הוא יעדיף ממש לרכוש את המיקום j' (במקרה זה, אף פרט לא ירכוש את המיקום ה- j בסתירה לדרישות ש״מ). לפיכך בש״מ בין כל זוג מחירים מתקיים $v_j - v_{j'} = p_j - p_{j'}$. בנוסף, לא יתכן שפרט כלשהו יסכים לרכוש מיקום במחיר העולה על תועלתו האבסולוטית מהמיקום, כלומר $p_j \leq v_j$ (אחרת, לפי פונקצית התועלת, הוא יעדיף שלא לקנות את המקום בתור, כלומר לא יהיה ביקוש לבית זה). מחירי ש״מ הם לפיכך מהצורה $p_j = v_j - C$ כאשר C קבוע חיובי המקיים $C \leq Min\{v(j)\}$.

---

[1] **לחלק שהומלץ למחשבה בבית:** כל הפרטים מקיימים את הנחות VNM, ויש להם את אותן ההעדפות ביחס לקבוצת הבתים ולהגרלות על קבוצת הבתים. לפיכך, קיימת פונקצית תועלת v על קבוצת הבתים, כך שפרט i מעדיף פרוצדורה (הגרלה) p על הגרלה q אם ורק אם $U_i(p) = \sum_{z \in Z} p_i(z)v(z) > \sum_{z \in Z} q_i(z)v(z) = U_i(q)$ כאשר Z מסמן את קבוצת הבתים, $p_i(z)$ ו- $q_i(z)$ מסמנים את הסיכוי שפרט i יקבל את הבית z בפרוצדורות p ו- q, בהתאמה.
ניתן לסכום את סך התועלות שפרוצדורה כלשהי (המחלקת את כל הבתים לכל הפרטים) מניבה לפרטים: $\sum_{i=1}^{N} U_i(p) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{z \in Z} p_i(z)v(z) = \sum_{z \in Z} v(z)$ שכן, כל בית מוגרל בוודאות לפרט מסוים, וכל פרט מקבל בוודאות בית אחד. בכדי שהפרטים יסכימו שיש פרוצדורה עדיפה על המוצעת , נדרוש שלכל הפחות, פרט אחד יעדיף ממש את הפרוצדורה האחרת ובנוסף, שאף פרט אחר לא ימצא את אותה פרוצדורה נחותה ממש מבחינתו.
אבל,סכום תועלות הפרטים , $\sum_{i=1}^{N} U_i(p) = \sum_{z \in Z} v(z)$, קבוע לכל הפרוצדורות! ולפיכך, אם פרט אחד מעדיף ממש פרוצדורה אחרת קיים פרט אחר שעבורו הפרוצדורה האחרת נחותה ממש.

א. MON- הגדלת הכמות של האלטרנטיבה הנבחרת באוסף משמרת את הבחירה. משתמע גם כי הגדלת הכמות של אלטרנטיבה כלשהי אינה פוגעת בבחירה בה.

ADD- צירוף אוספים, בהם האלטרנטיבה הנבחרת זהה, משמרת את הבחירה.

IIA - אלטרנטיבה שאינה נבחרת באוסף, לא תיבחר כתוצאה מהוספת מופע של אלטרנטיבה אחרת באוסף.

ב. מקבל ההחלטות צריך לבחור את אחת האלטרנטיבות הנמצאת באוסף, ומכאן שאם יש באוסף רק מופע אחד של אלטרנטיבה אחת, אלטרנטיבה זו חייבת להיבחר.

יהיה A אוסף כלשהו בו נבחרת האלטרנטיבה a_k ו- I_k האוסף בו מופיעה האלטרנטיבה a_k כאלטרנטיבה יחידה עם מופע אחד. מ ADD נובע ש $C(A+I_k)=a_k$.

אך $A+I_k$ הוא האוסף המתקבל מ-A על ידי הוספת מופע לאלטרנטיבה הנבחרת.

ג. משפחה כללית היא משפחת פונקציות מהצורה :

$$C(A)=T(\underset{a_k}{ArgMax}\;\; b_k\cdot x_{ak})$$

כאשר x_{ak} כמות המופעים של a_k, ו- $b=(b_1,...,b_K)$ וקטור של קבועים חיוביים, ו T כלל שבירת שוויון על קבוצת ה- a_k הפותרת את בעיית המקסימיזציה (למשל, אם מתקיים $Arg\max b_k x_k=\{a_i,a_j\}$, בחר את האיבר בעל האינדקס הנמוך יותר).

כלל שבירת השוויון מבטיח שהפונקציה מספקת איבר יחיד לכל בעיית החלטה (וקטור כמויות).

נראה שכל פונקצית בחירה השייכת למשפחה זו מקיימת את ADD ואת IIA :

ראשית, $C(X+Z)=T(\underset{a_k}{ArgMax}\;\; b_k(x_{ak}+z_{ak}))$ ומובטח שאם a_k היה הפתרון האופטימאלי בהינתן X ובהינתן Z אז הוא גם הפתרון האופטימאלי בהינתן (X+Z).

בנוסף, אם $C(x_1,..,x_k,..,x_{k'},..,x_K)=a_k$ אז $b_k\cdot x_k\geq b_i\cdot x_i$ לכל $i>k$ וגם $b_k\cdot x_k>b_i\cdot x_i$ לכל $i<k$ (לצורך פשטות ההוכחה נניח כי $b_k\cdot x_k>b_i\cdot x_i$ לכל $i\neq k$ כך שלא הופעל הכלל T – הוכחה דומה נכונה גם עבור המקרה הכללי), לכן גם באוסף $(x_1,..,x_k,..,x_{k'}+1,..,x_K)$ מתקיים $b_k\cdot x_k>b_i\cdot x_i$ לכל $i\notin\{k,k'\}$, ומכאן מתקבל ש- $C(x_1,..,x_k,..,x_{k'}+1,..,x_K)$ הוא $a_{k'}$ או a_k .

ד. יהיו שני אוספים A ו-B בהם כל אלטרנטיבה מופיעה לכל היותר פעם אחת בלבד, ומתקיים $A\subset B$, $C(B)\in A$ (כלומר, האלטרנטיבה הנבחרת ב B נמצאת ב-A). נניח בשלילה $C(A)\neq C(B)$ (כלומר לא מתקיים תנאי *, והבחירה לא ניתנת לרציונאליזציה).

B מתקבלת מ- A על ידי הוספה של אלטרנטיבות עם מופע יחיד שאינן מופיעות ב-A,

ב- C(A), ואף לא ב-C(B). באחת ההוספות, משתנה הבחירה ל- C(B) למרות ש-C(B) כבר קיים ב-A, בסתירה ל IIA.

ה. (שאלת בונוס!)

<u>פונקצית בחירה המקיימת IIA ולא ADD</u>: בחר את האיבר באוסף בו מספר המופעים חיובי אך קטן ביותר (נדירות). אם קיימים מספר איברים נדירים ביותר, בחר את הראשון מביניהם. ADD לא בהכרח מתקיים, שכן באוספים (2,0,4), (2,3,0) הבחירה תהיה האיבר הראשון, אך באוסף המורכב מסכום האוספים (4,3,4) יבחר האיבר השני.

IIA מתקיים שכן אם האיבר הנבחר היה הנדיר ביותר, הוספת מופע לאיבר אחר יכולה לשנות את הבחירה רק לאותו איבר אחר (אם הוא כעת הנדיר ביותר).

<u>פונקצית בחירה המקיימת ADD ולא IIA</u>: במידה וסכום המופעים אי-זוגי בחר את האיבר החציוני (דוגמא: $C(1,2,3,4,5) = a_4$ כי המופע השמיני נמצא באיבר הרביעי), אחרת בחר את האיבר בו נמצא המופע האחרון של מחצית המופעים (דוגמא: $C(1,2,1,1,1) = a_2$).

כעת, ADD מתקיים כי אם האיבר הנבחר בשני אוספים הוא אותו איבר הוא בהכרח יבחר גם בסכום האוספים: אם בשני האוספים מספר אי-זוגי של מופעים, הצירוף זוגי והמופע האחרון של מחצית המופעים זהה למופע החציוני באוספים המקוריים. הבחירה נשמרת גם כששני האוספים הם זוגיים וכאשר אחד האוספים זוגי והשני אי-זוגי.

IIA לא מתקיים כי $C(1,1,1,1,1) = a_3$ ו- $C(2,1,1,1,1) = a_2$.