פתרון מבחן בתיאוריה מיקרו א'
פברואר 2004

תשובה 1.

א. שיווי משקל היא נקודה בקטע [0,1] , שכאשר הנופש נמצא בה, הוא מעדיף אותה לפחות כמו כל נקודה אחרת בקטע. באופן פורמלי, $a*$ הוא שיווי משקל אם $u(a*,a*) \geq u(x,a*)$ לכל $x \in [0,1]$.

ב. כאשר u(x,a)=1-|x-a|, נקבל שלכל $x \neq a$, $x \in [0,1]$ מתקיים u(a,a)>u(x,a), ומכאן כל נקודה היא שיווי משקל. פונקציית זו מבטאת העדפות של פרט, שבכל נקודה בה הוא נמצא, מעדיף ממש נקודה זו על פני כל נקודה אחרת.

ג. נופש שהעדפותיו ניתנות לייצוג על ידי $U(x,a) = | a - x |$. משמעות העדפות אלה שמקבל ההחלטות מעדיף תמיד להיות רחוק ככל האפשר ממקומו הנוכחי ולכן כמובן שאין ש"מ. ההעדפות אינן קמורות. בהינתן x=1/2 למשל, ההעדפה אינה קמורה שכן 0.8 עדיפה על 0.3 אבל 0.4 הנמצאת ביניהם אינה עדיפה על 0.3.

ד. משפט: יש ש"מ.
הוכחה:
מתכונת הקמירות החזקה של יחס ההעדפה לכל x, יש נקודה אופטימלית יחידה. ניתן לכן להגדיר את הפונקצייה $f(x)$ כך: $f(a) = \underset{x}{ARGMAX} \quad u(x,a)$. פונקציה f מהקטע [0,1] לעצמו. נקודת שבת של f היא שיווי משקל. די להראות ש f רציפה שכן אז מתקיימים תנאי משפט Brower ולפיכך **יש** $a \in [0,1]$ המקיים $a = f(a)$.

טענה: $f(a)$ רציפה.
נניח שלא, כלומר קיימות $x_n -> x*$ ו $a_n -> a*$ עבורן, $x_n = f(a_n)$ לכל n, אך $x* \neq f(a*)$. מרציפות u נובע: $\lim \quad u(x_n, a_n) = u(x*, a*)$, מכך ש- $x* \neq f(a*)$ נובע שקיים $z \neq x*$, $z \in [0,1]$, המקיים $u(z,a*) > u(x*,a*)$. מכאן, קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $u(z,a_n) > u(x_n,a_n)$, בסתירה לכך ש- $x_n = f(a_n)$.

תשובה 2

א. בש"מ תקבע כמות הכרטיסים הנמכרת (מחיר הכרטיסים קבוע). ההעדפות זהות לכל הפרטים.

נסמן:
q את הסיכוי לזכות במכונית
Q כמות המשתתפים בהגרלה.
נסמן ב- L(q) את ההגרלה שבה מתקבל הפרס "WIN" בסיכוי q ו "LOSS" בהסתברות 1-q.

מועמד לשווי משקל יהיה (q,Q) כך ש-:

1) בהינתן q, הפעולות של הפרטים שרוכשים את הכרטיס ואילו שאינם רוכשים את הכרטיס הן אופטימליות.
דהיינו אם - $Q<N$ 0 לפחות טוב כמו $L(q)$
ואם $Q>0$ $L(q)$ לפחות טוב כמו 0

המשמעות היא שפתרון פנימי של שיווי משקל תחרותי קיים כאשר כל פרט **אדיש** בין רכישה לאי רכישה של ההגרלה. פתרון קצה אפשרי כאשר כל הפרטים קונים את כרטיס ההגרלה.

2) $q=1/Q$ כאשר $Q>0$.
$Q=0$ ← הסיכוי לא מוגדר (האופטימיזציה של הפרט לא מוגדרת, לא ש״מ).

תנאי זה מבטיח שבכמות המתקבלת בש״מ, q היא אכן הסתברות האמיתית לזכות בפרס.

ב.
עבור N= 10,000 ומספרי vNM $v(LOSS)=0$, $v(0)=1$, $v(WIN)=10$ נקבל:

- $v(WIN)>v(0)$, ולכן $Q>0$.
- $Q=10000$ אינו ש״מ שכן, עבור כמות זו של רוכשים $q=1/10000$, ולכן $qv(WIN)=1/1000< v(0)=1$ (כלומר אם כל הפרטים רוכשים אז לכל פרט עדיף שלא לרכוש).

ולכן נדרוש

$$qv(WIN)+(1-q)v(LOSS)=v(0)$$

$$q\times 10+(1-q)\times 0=1$$ ← $q=1/10$ ← $Q=10$.

ג. טענה: כמות הרוכשים, בשיווי משקל, יורדת עם העלייה בשנאת הסיכון.
נגדיר יחס העדפה 1 כיותר שונא סיכון מיחס העדפה 2. נניח בשלילה שקיימים שיווי משקל מתאימים בהם מתקיים $Q_1>Q_2$, כלומר שבש״מ בו לפרטים יחס העדפה 1 (יותר שונא סיכון) יותר פרטים קונים כרטיס הגרלה מאשר בש״מ בו לפרטים יחס העדפה 2.

$$0\succeq_2 L(q_2)$$

הסבר: Q_2ש״מ, וגם $Q_2<N$ ← $Q_1>Q_2$

$$L(q_2)\succ_2 L(q_1)$$

הסבר: $Q_1>Q_2$ גורר $q_1<q_2$ ולכן כל פרט המעדיף את הפרס WIN על LOSS, ומקיים את אקסיומת אי התלות, מעדיף $L(q_2)$ על $L(q_1)$.

$$0\succ_2 L(q_1)$$ טרנזיטיביות

$$0\succ_1 L(q_1)$$

הסבר: מכיוון שפרט עם העדפות 2 מעדיף את הפרס הוודאי 0 על $L(q_1)$ אז ודאי שפרט עם העדפות 1 (יותר שונא סיכון) מעדיף את הפרס הוודאי 0 על פני $L(q_1)$.

ומכאן שמההנחה ש- $Q_1>Q_2$ נובע ש- $Q_1=0$ (שכן בש״מ כל הפרטים נוקטים בפעולה האופטימלית), כלומר סתירה.

<u>תשובה 3</u>

א.

1) <u>עקרון המקיים את A2 ואת A3 אך לא את A1</u>: בחר תמיד Y. A2 ו-A3 מתקיימות שכן ההחלטה קבועה. A1 לא מתקיימת שכן D(F)=Y.
2) <u>עקרון המקיים את A1 ואת A3 אך לא את A2</u>: בחר Y אם האיבר הראשון הוא S ו N- אם האיבר הראשון הוא F. A1 מתקיימת, שכן אם כל האיברים הם S (F) אז האיבר הראשון הוא S (F). A3 מתקיימת, שכן אם שתי היסטוריות מניבות את אותה החלטה אז יש להן את אותו איבר ראשון ולפיכך לכל שרשור שלהן אותו איבר ראשון. A2 לא מתקיימת, שכן D(S,F)=Y בעוד D(F,S)=N.
3) <u>עקרון המקיים את A1 ואת A2 אך לא את A3</u>: בחר Y אם יש לפחות הצלחה אחת ולא יותר מכישלון אחד. A1 מתקיימת שכן D(S)=D(S,S)=Y ,D(F)=D(F,F)=N. A2 מתקיימת כי הסדר לא קובע. A3 לא מתקיימת שכן D(F,S)=Y אך D(F,S,F,S)=N.

ב.
דוגמאות:
(1) כלל רוב רגיל, שבו אם 50% או יותר מהמקרים הסתיימו בהצלחה בוחרים בY.
(2) כלל "פה אחד", Y נבחר רק אם אין אף כשלון (אם שיעור ההצלחות גדול שווה ל 1).

ג.
יש משפחה של כללי רוב המקיימים את A1, A2 ו-A3:
אם שיעור ההצלחות (כישלונות) גדול שווה מ- q בחר Y (N) אחרת בחר N (Y) עבור $q \in [0,1]$ (עבור q=0 גדול ממש).

כללי הרוב מקיימים את A1 (טריוויאלי), A2 (הסדר לא חשוב) ו-A3 (אם שיעור ההצלחות בשתי היסטוריות גדול שווה מ-q אז לבטח הוא גדול שווה מ-q בשרשור שלהן).

נוכיח שרק כללי החלטה השייכים למשפחת כללי הרוב הם היחידים המקיימים את שלוש האקסיומות:
נניח בשלילה שכלל ההחלטה אינו כלל רוב ומקיים את A1, A2 ו-A3. מכאן שקיימות היסטוריות H_1 ו- H_2 $q(H_1) \geq q(H_2)$ (שיעור ההצלחה ב- H_1 גבוה מאשר ב-H_2) עבורן $D(H_1)=N$ ו- $D(H_2)=Y$.
<u>שלב 1: העברת שתי ההיסטוריות לאורך שווה</u>
כעת, נכפיל את H_1 (באמצעות שרשור) מספר פעמים השווה לאורכה של H_2. באותו אופן נכפיל את H_2 מספר פעמים השווה לאורך של H_1. נקרא להיסטוריות המוכפלות LH_1 ו-LH_2. מ- A3 נובע $D(LH_1)=D(H_1)=N$ ו- $D(LH_2)=D(H_2)=Y$.
<u>שלב 2: מיון</u>
נמיין את LH_1 ו LH_2 כך שבכל היסטוריה יופיעו ראשית כל הכישלונות ואחר כך כל ההצלחות. נסמן את ההיסטוריות הממוינות ב PLH_1 ו- PLH_2. מ- A2 נובע $D(PLH_1)=D(LH_1)=N$ ו- $D(PLH_2)=D(PH_2)=Y$.

ב- H_1 שיעור ההצלחות גבוה מאשר ב H_2 ולכן, אם אחת משתי ההיסטוריות לא 'טהורה' (רק הצלחות או רק כשלונות) אז יש היסטוריה EQ לא ריקה עבורה $PLH_1=(EQ,Sk)$ וגם $PLH_2=(Fk,EQ)$, כאשר F_K ו S_K הן ההיסטוריות הנוצרות מ-K חזרות של F ו- S בהתאמה.
אם D(EQ)=N, אז מ- A3 ו- A1 נובע ש $D(F_K,EQ)=N$ בסתירה לכך ש - $D(PLH_2)=Y$, אם D(EQ)=Y, אז מ- A3 ו-A1 נובע ש $D(EQ,S_K)=Y$ בסתירה לכך ש - $D(PLH_1)=D(H_1)=N$.

אם שתי ההיסטוריות 'טהורות' אז מההנחות $q(H_1) \geq q(H_2)$, $D(H_1)=N$ ו-$D(H_2)=Y$ נובע שלא מתקיימת A1.