<u>תאוריה מיקרו א'</u>
<u>תשנ"ט - מועד ב'</u>
<u>פתרון המבחן</u>

1. א. קיום הרציפות והאי תלות מבטיח את קיומה של פונקצית תועלת u(). עבור כל x שהוא ההפרש u(x+10)-u(x) שווה להפרש u(x+2•10)-u(x+10) וכן הלאה, מכאן (באינדוקציה) שלכל x ועבור כל k שלם ניתן לרשום : u(x+10k)=u(x)+a(x)k . אי לכך, מספיק לקבוע את פונקצית התועלת ואת a() בקטע [0,10).
היות ש u עולה ממש חייב להתקיים ש a(x) קבוע. אם יש 0<x,y<10 כך ש a(x)>a(y) הרי שעבור k מספיק גדול נקבל כי u(x+10k)>u(y+10k+10) וזאת בסתירה לכך ש u מונוטוניות עולה.
אם כן, לאחר קביעת u(x) בקטע [0,10) נקבל את שאר הערכים של פונקצית התועלת ע"י u(x+10k)=u(x)+ak [1] (k יכול להיות גם שלילי).
משמעת הדבר היא כי "הזזות" של כל ההגרלות בכפולות של 10 לא ישנו את העדפת הפרט.

ב. אם הפרט שונא סיכון (או אדיש לסיכון) תמיד הרי ש u(x) קעורה. אבל בגלל התכונה [1] קעירות של u תוכל להיות רק אם u ליניארית. כלומר, u(x)=u(0)+ax/10. אבל במקרה כזה הפרט תמיד אדיש לסיכון ואין שום מקרה בו הוא שונא סיכון ממש.
כדי לראות מדוע [1] וקעירות מחייבים כי u תהיה לינארית ניתן להתבונן בטיעון הבא :

תהי x נקודה כלשהי 0<x<10 אזי בגלל הקעירות מתקיים :

$$u(10) \ge \frac{x}{10}u(x) + \frac{10-x}{10}u(10+x)$$

ומתוך התנאי [1] :

$$u(10) \ge \frac{x}{10}u(x) + \frac{10-x}{10}u(10+x) = u(x) + \frac{10-x}{10}a \quad [2]$$

באופן דומה פיתוח מסביב לנקודה x במקום מסביב ל 10 ושימוש בקעירות וב [1] ייתן :

$$u(x) \ge \frac{10-x}{10}u(0) + \frac{x}{10}u(10) = u(0) + \frac{x}{10}a \quad [3]$$

צרוף [2] ו [3] ייתן : $u(10) \ge u(x) + \frac{10-x}{10}a \ge u(0) + a$ [4] אבל מתוך [1] u(10)=u(0)+a ולכן [4] וכן [3] ו [2] חייבים להתקיים כשיוויונות ובפרט (מ [3]) : $u(x) = u(0) + \frac{a}{10}x$ לכל 0<x<10 וע"י שימוש ב [1] הדבר נכון גם לכל x שהוא.

2. א. <u>כלל פרטו :</u> אם עבור כל הפרטים מתקיים עבור שתי אלטרנטיבות $x \succ_i y$ הרי שגם עפ"י הבחירה החברתית יתקיים $x \succ y$.

<u>קיום כלל פרטו :</u> אם כל הפרטים מעדיפים את x על y הרי שלא משנה איזה פרט יוגרל - גם ההעדפה שלו תהיה של x על פני y, וכך גם ההעדפה החברתית.

<u>תכונת אי תלות :</u> אם ההעדפות בין x ל y מתלכדות על שני פרופילי העדפות $\succeq, \succeq'$ הרי שההסתברות שחברתית x יועדף על y (ולהפך) זהה עבור שני הפרופילים.

<u>קיום אי תלות :</u> אם ההעדפות בין x ל y מתלכדות על שני פרופילים p ו 'p , הרי שבמקרה שיוגרל אותו "דיקטטור רנדומי" בשני המקרים גם ההעדפה החברתית תהיה זהה. הואיל וההסתברות להגריל כל פרט כ"דיקטטור רנדומי" אינה תלוייה בהעדפות (יתרה מזו, הי קבועה לכל הפרטים) הרי שההסתברות שחברתית x יועדף על y (ולהפך) זהה לשני הפרופילים.

ב. <u>"אי קיום" משפט Arrow :</u> שיטת הבחירה החברתית המוצעת מגדירה התפלגות על ה"עולם" של יחסי העדפה. היא איננה מגדירה יחס המקיים את התכונות של יחס העדפה, ולכן משפט Arrow אינו מתאים למקרה זה.

3. א. שווי משקל תחרותי הוא מחירים p והקצאות x כך שמתקיים :
(i) כל פרט בוחר את סל הצריכה שיביא את תועלתו למכסימום בהינתן מגבלת התקציב שלו, המחירים וצריכת הפרטים האחרים.
(ii) השווקים מתנכים.

ב. מכיוון שכל פרט לוקח את צריכת כל הפרטים האחרים כנתונה הרי שקבוצת שווי המשקל האפשריים זהה לזו המתקבלת אילו כל הפרטים היו "אנוכיים". ביתר פרוט : צרכן מטיפוס א מבצע מכסימיזציה של $v(x_1)+v(x_2)$, כאשר x_1 הוא סל תחת מגבלת התקציב שלו ואילו x_2 הוא הסל הממוצע שצורכים פרטים מסוג ב'. ברם, פרט מטיפוס א לוקח כנתון את x_2 ולכן המכסימום יתקבל עבור אותו סל x_1 שהיה מתקבל בבעיה של טיפוס א' "אנוכי" $\max v(x_1)$. מכיוון שלכל וקטור מחירים פתרון בעית הצרכן זהה הרי שגם קבוצת שווי המשקל זהה (מחירים והקצאות).

ג. חלוקה יעילה היא הקצאה x כך שלא ניתן לשפר ממש את מצבו של אחד הפרטים מבלי להרע את מצבו של לפחות פרט אחד. לצורך הדגמה נגביל את עצמנו למקרה של שני פרטים בלבד : הקצאה בה לפרט א' סל x_1 ולפרט ב' סל x_2 היא יעילה אם ורק אם לא ניתן למצוא הקצאה אחרת x_1',x_2' שמקיימת :

(i) ההקצאה אפשרית $x_1'+x_2'=(1,1)$

(ii) מצבם של שני הפרטים לא מורע : $v(x_1')+v(x_2')\geq v(x_1)+v(x_2)$ (פרט א')
וכן $v(x_2')\geq v(x_2)$ (פרט ב')

(iii) מצבו של לפחות אחד הפרטים משתפר ממש : לפחות אחד האי שיוויונים ב(ii) מתקיים כאי שיוויון חזק

ד. שווי משקל תחרותי בשוק זה איננו בהכרח יעיל. לצורך כך מספיק להביא דוגמה נגדית : נסתכל במקרה בו פונקצית התועלת היא $v(x,y)=xy$. במקרה כזה קיים שווי משקל תחרותי יחיד (עד כדי המחירים) ובו המחיר היחסי הוא 1, וההקצאה היא כזו שכל פרט צורך 0.5 מכל מוצר. בשווי משקל זה תועלת פרט מטיפוס א' הינה 0.5, ותועלת פרט מטיפוס ב' היא 0.25. אבל ניתן לשפר ממש את תועלת כל הפרטים ע"י מעבר להקצאה (היעילה) הבאה : כל פרט מטיפוס א' יקבל סל (0,0) וכל פרט מטיפוס ב' יקבל סל (1,1). במקרה זה תועלת כל הפרטים תגדל ל 1.