<u>פתרון</u>

1. נסתכל על צרוף ההגרלות A ו-D לעומת צרוף ההגרלות B ו-C.
הצרוף A+D נותן בהסתברות 75% הפסד של 760$ ובהסתברות 25% רווח של 240$.
הצרוף B+C נותן בהסתברות 75% הפסד של 750$ ובהסתברות של 25% רווח של 250$.
כלומר, הצרוף B+C עדיף ממש על הצרוף A+D (שולט סטוכסטית מסדר ראשון לכל יחס העדפה מונוטוני B+C עדיפה על A+D).

2. יחסי ההעדפה של כל פרט ופרט מקיימים את אקסיומות vNM ובפרט את אקסיומת האי-תלות.
נסתכל בפרט מסויים i : אם $A \succ_i B$ [1] הרי שבגלל האי תלות חייב להתקיים כי עבור אותו פרט $A \succ_i (1/2)A+(1/2)B \succ_i B$ [2] (להעדפה העירוב על B, קחו את [1] וערבו את שני האגפים עם B, ולהעדפת A על העירוב, קחו את [1] וערבו את שני האגפים עם A).
באופן דומה, אם $A \prec_i B$ אז בגלל האי תלות $A \prec_i (1/2)A+(1/2)B \prec_i B$ [3]
כלומר, לכל אחד מהפרטים יחס ההעדפה הוא [2] או [3]. יחסי העדפה אחרים <u>לא ייתכנו</u>.

פונקצית הרווחה החברתית המוצעת היא כלל הרוב : נבדוק כמה פרטים מעדיפים ממש את A על B, וכמה מעדיפים ממש את B על A. אם מספר המעדיפים ממש את A על B גדול יותר, אזי פונקצית ההעדפה החברתית תהיה $A \succ (1/2)A+(1/2)B \succ B$, אם מספר המעדיפים ממש את B גדול יותר אזי פונקצית ההעדפה החברתית תהיה $A \prec (1/2)A+(1/2)B \prec B$.

פונקצית הרווחה החברתית שהצענו מגדירה היטב יחס העדפה על שלושת האפשרויות (תמיד מגדירה העדפה בין כל שתי אפשרויות ומקיימת טרנזיטיביות), ונותר להראות קיום אקסיומת האי-תלות ופרטו לפונקצית בחירה חברתית. ניתן להראות קיומן ישירות, אבל בכיתה כבר הראנו כי במקרה שיש רק שתי אפשרויות כלל הרוב מקיים אקסיומות אלו וכאן לכל פרט מתקיימת אחת משתי האפשרויות [2] או [3] ולכן מתקיימות אי תלות ופרטו.

אין כאן סתירה למשפט Arrow, הואיל ואחד התנאים למשפט Arrow הוא כי כל יחסי ההעדפה על קבוצת האלטרנטיבות אפשריים, אולם במקרה שלנו אפשריים רק שני יחסי העדפה מתוך ששת היחסים החזקים המוגדרים על קבוצת (שלוש) האלטרנטיבות.

3. א. $V(p,e)$ היא פונקצית התועלת העקיפה שכן היא מתארת את התועלת המרבית שיכול הצרכן להשיג כתלות במחירים p ובסל ההתחלתי שלו e (המהווה את ההכנסה שלו).

$V(tp,e)=V(p,e)$ לכל $t>0$, זאת מכיוון שקבוצת סלי המוצרים אותם יכול הצרכן לקבל תמורת סלו ההתחלתי זהה בשני המקרים והיא $B(tp,e)=\{x \mid tp\cdot x\le tp\cdot e\}=\{x \mid p\cdot x\le p\cdot e\}=B(p,e)$.
(מכיוון שהצרכן מקבל הכנסתו במוצרים ולא בכסף הרי שהכפלת כל המחירים בקבוע לא תשנה לו).

ב. יש להראות כי הקבוצה $\{p \mid V(p,e)\le V(p^*,e)\}$ קמורה (ב p).

<u>הוכחה :</u> נסמן $V_0=V(p^*,e)$ ותהיינה שתי נקודות המקיימות $V(p_1,e),V(p_2,e)\le V_0$ (אם אין שתי נקודות כאלו סיימנו).

יהי $0<\lambda<1$ כלשהו, ועלינו להראות כי $V(\tilde{p},e)\le V_0$ כאשר $\tilde{p}=\lambda p_1+(1-\lambda)p_2$

נסמן ב $\tilde{x}$ את הסל האופטימלי בבעיה $(\tilde{p},e)$.

מכיוון ש $\tilde{p}\cdot\tilde{x}\le\tilde{p}\cdot e$ קיים גם $\lambda(p_1\cdot\tilde{x}-p_1\cdot e)+(1-\lambda)(p_2\cdot\tilde{x}-p_2\cdot e)\le 0$

לפחות אחד המחוברים באגף שמאל איננו חיובי ולכן $\tilde{x}$ אפשרי לפחות באחת מהבעיות $(p_1,e),(p_2,e)$, כלומר : $V(\tilde{p},e)=u(\tilde{x})\le V_0$

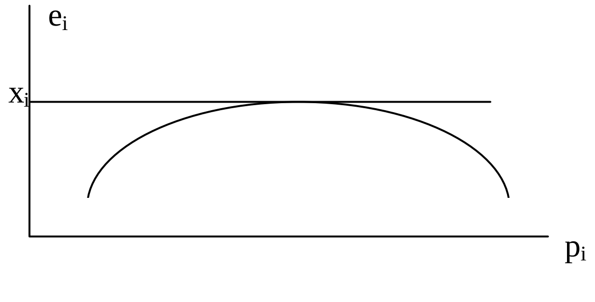
ג. נסמן ב x את הביקוש של הצרכן ב (p,e), ודרוש שיפוע עקומת האדישות דרך הנקודה (p_i,e_i).

אבל הסל x ניתן לצריכה לכל $(\tilde{p},\tilde{e})$ הזהה ל (p,e) פרט ל $\tilde{p}_i$ (זאת מכיוון שקיים $p\cdot e=p\cdot x$ וכן $x_i=e_i$)

לכן $V(\tilde{p},\tilde{e})\ge V(p,e)$ וכל הסלים $(\tilde{p},\tilde{e})$ מהטיפוס הזה (המיוצגים בגרף המבוקש ע"י הישר $e_i=x_i$) נמצאים "מעל" עקומת שוות V העוברת דרך (p,e)

בנקודה $\tilde{p}=p_i$ קיים שיוויון ולכן הקו הישר $e_i=x_i$ משיק מלמעלה לעקומת שוות V העוברת דרך (p_i,e_i). מכאן ששיפוע עקומת שוות V המבוקש הינו 0 (בהנחה כי הנגזרת קיימת).

בניסוח אחר : מכיוון שהצרכן מעוניין לצרוך בדיוק את הכמות אותה יש לו מראש ממוצר i הרי ששינויים במחירו זה זה לא ישפיעו כלל על תועלתו.



4. נסמן את שני המוצרים להיות :

מוצר 1 : רווח של $1 אם א זוכה; מוצר 2 : רווח של $1 אם ב זוכה

הסלים ההתחלתיים של שני המתאגרפים הינם $e^1(M,0),e^2(0,M)$ (M הוא גובה הפרס בתחרות מליון דולר)

שווי משקל הינו וקטור מחירים p והקצאות x^1,x^2 כך שהשווקים מתנכים כאשר כל האחד מהפרטים בוחר את צריכתו באופן אופטימלי בהינתן המחירים וסלו ההתחלתי.

שני הפרטים מקיימים הנחות vNM, הם שונאי סיכון ממש, ויש להם אותו יחס העדפה על עולם ההגרלות. מכאן שיש $U()$ עולה וקעורה ממש (המשותפת לשני הפרטים) כך שכל אחד מהם מביא למקסימום את תוחלת U.

הבעיה של פרט 1 בהינתן המחירים היא אם כן : $\underset{x_1^1,x_2^1}{\mathrm{Max}} \quad qU(x_1^1)+(1-q)U(x_2^1)$ [1]

וזאת תחת האילוץ $p_1x_1^1+p_2x_2^1 \le p_1M$ (שמתקיים למעשה כשיוויון)

מכיוון ש U קעורה ממש יש ל [1] מכסימום יחיד ומתוך מתוך תנאי סדר ראשון למכסימום נקבל את

שיעור התחלופה הסובייקטיבי של פרט 1 בין שני המוצרים והוא : $\frac{p_1}{p_2}=\frac{U'(x_1^1)}{U'(x_2^1)}\cdot\frac{q}{1-q}$

באופן דומה שיעור התחלופה הסובייקטיבי של פרט 2 הינו : $\frac{p_1}{p_2}=\frac{U'(x_1^2)}{U'(x_2^2)}\cdot\frac{q}{1-q}$

נשים לב כי לאורך כל הנקודות על האלכסון הראשי (צריכת כל פרט משני המוצרים זהה) שיעור התחלופה הסובייקטיבי של שני הפרטים שווה והוא $q/(1-q)$. הואיל והפרטים שונאי סיכון ממש, בכל מקרה בו הצריכה מהמוצר הראשון קטנה יותר אזי שיעור התחלופה הסובייקטיבי גבוה יותר ולהפך. מכיוון שבשווי משקל חייב להתקיים שלשני הפרטים אותו שיעור תחלופה (והוא זהה גם ליחס המחירים), וכמו כן הכמות הכללית של שני המוצרים בשוק שווה הרי שלא יכול להיות שאחד הפרטים צורך ממוצר 1 יותר מאשר צורך ממוצר 2, לכן בשווי משקל בהכרח $x_1^1=x_2^1$ וכמובן גם $x_1^2=x_2^2$.

מכאן שיחס התחלופה הסובייקטיבי של שני הפרטים בשווי משקל הינו $q/(1-q)>1$ וזהו גם יחס המחירים שם. מכיוון שהסל ההתחלתי של פרט 1 מורכב כולו ממוצר 1 (ובאופן סימטרי לגבי 2) הרי שהצריכה של פרט 1 בשווי משקל (משני המוצרים) גדולה ממש מזו של פרט 2. וביתר פרוט : צרוף נכיון השווקים ומגבלות שני הפרטים ייתן : צריכת פרט 1 - $x_1^1=x_2^1=qM$, וצריכת פרט 2 - $x_1^2=x_2^2=(1-q)M$.

אם כן קיבלנו : בשווי משקל כל פרט מחזיק בידו כמות שווה משני המוצרים (ולכן התועלת שלו לא תלוייה כלל בתוצאות הקרב). בשווי משקל הפרט בעל הסכוי הגדול יותר לזכות בקרב מחזיק יותר מוצרים מכל סוג.

לצורך הבנת ההסבר ניתן להעזר בתרשים תיבת Edgeworth הבא (הסל ההתחלתי נמצא בפינה מימין למטה).