תאוריה מיקרו א'

פתרון המבחן

שאלה 1

1. סל צריכה במודל זה הוא (w',x_1,x_2,x_3) כאשר $x_i=1$ אם הצרכן רוכש את הספר בחנות i ו $x_i=0$ אחרת ואילו w' הוא סכום הכסף שמחזיק הצרכן (לאחר רכישת הספר).
תוך שימוש בסימון זה הביקוש של הצרכן נתון ע"י :

$$X(w,P_1,P_2,P_3)=\begin{cases}(w-P_1,1,0,0) & P_1\le P_2\\ (w-P_2,0,1,0) & P_1>P_2\le P_3\\ (w-P_3,0,0,1) & P_1>P_2>P_3\end{cases}$$

2. הצרכן לא מקיים את הנחות ה"צרכן הרציונלי". כדי להראות זאת מספיק להביא דוגמה בה בשני מקרים בהם עומדות בפני הצרכן אפשרויות A ו B יבחר פעם ב A ופעם ב B.
דוגמה אפשרית : אם המחירים הם (3,3,1) הצרכן יקנה את הספר בחנות הראשונה והביקוש הוא (w-3,1,0,0) בעוד גם האפשרות (w-1,0,0,1) קיימת (אילו היה קונה את הספר בחנות השלישית).
לעומת זאת, אם המחירים יהיו (3,2,1) הצרכן יקנה את הספר בחנות השלישית והביקוש יהיה (w-1,0,0,1) בעוד גם (w-3,1,0,0) אפשרי.

3. V יכולה לשמש כפונקצית התועלת העקיפה במובן שהיא מייצגת עדיפויות של הצרכן על פני מצבים שונים : V מתארת את סכום הכסף שנותר לצרכן לאחר רכישת הספר, מכיוון שהצרכן חייב לרכוש את הספר (ומבחינת התועלת שהספר מביא לו אין הבדל באיזו חנות רכש אותו), הרי ש V גם מייצגת את התועלת של הצרכן לאחר רכישת הספר.

4. V איננה מונוטונית יורדת במחירים כי עליה במחיר הספר בחנות הראשונה (P_1) יכולה לגרום לכך שהצרכן יבדוק גם את מחיר הספר בחנות השלישית, אפשרות אותה הוא כלל אינו בודק אם מחיר הספר בחנות הראשונה אינו עולה על מחיר הספר בחנות השניה. אם אכן מחיר הספר בחנות השלישית נמוך יותר, הצרכן יוכל להרוויח מעלית המחיר בחנות הראשונה ולכן V איננה יורדת במחירים. למשל, במחירים (2,2,1) ואם w=4 נקבל V=2 בעוד עליית המחיר בחנות הראשונה כך ש P=(3,2,1) תביא ל V=3.
פונקצית התועלת העקיפה עבור צרכן רציונלי תמיד יורדת (חלש) במחירים, שכן עבור הכנסה נתונה עם עליית מחירים מצטמצם סל האפשרויות אותן יכול הצרכן לרכוש ולכן תועלתו לא תוכל לגדול. כאן מופר טיעון זה כיוון שהצרכן אינו מקיים את הנחות הרציונליות ולכן לא בוחר תמיד את האפשרות הטובה ביותר עבורו במגבלת התקציב שלו.

<u>שאלה 2</u>

הערה : לכל אורך התשובה נשתמש ב i להיות אינדקס לשוכרים ו j אינדקס לחדרים. קבוצת השוכרים תהיה I={1,2,....,N} וקבוצת החדרים תהייה J={1,2,....,N}.

1. **הקצאה יעילה** היא הקצאה של פרטים לחדרים שתסומן ע"י הפרמוטציה s(i) (פרט i מקבל את החדר s(i)) כך שלא קיימת הקצאה אחרת m(i) שמקיימת :

$$[3]\quad \forall i:\ V(i,\mu(i)) \geq V(i,\sigma(i))$$

וגם : $$[4]\quad \exists i_0:\ V(i_0,\mu(i_0)) > V(i_0,\sigma(i_0))$$

(ובאופן מילולי : אין אפשרות להקצות את הפרטים בין החדרים כך שמצבו של אף אחד לא יורע ומצבו של פרט אחד לפחות ישתפר ממש)

2. **שווי משקל תחרותי** הוא $\left(\{P_j\},\sigma(i)\right)$: וקטור מחירים $\{P_j\}$ והקצאה של פרטים לחדרים s(i) כך שמתקיימים שני התנאים הבאים :

$$[1]\quad \forall j\in J:\qquad P_j \geq 0$$ (לכל משכיר תמורה אי שלילית)

$$[2]\quad \forall i\in I, j\in J: V(i,\sigma(i)) - P_{\sigma(i)} \geq V(i,j) - P_j$$ (לכל שוכר אין אלטרנטיבה טובה יותר)

3. יהי שווי משקל $\left(\{P_j\},\sigma(i)\right)$. אזי אם ניקח וקטור מחירים אחר שיוגדר ע"י $q_j = P_j + a$ כאשר a>0 גם $\left(\{q_j\},\sigma(i)\right)$ יהיה שווי משקל. כלומר, אם כל המחירים יגדלו באותו קבוע עדיין נקבל שווי משקל. שכן : אם כל המחירים P_j אי שליליים אז כל המחירים q_j אי שליליים גם כן (למעשה חיוביים ממש), וכן הגדלת כל המחירים בקבוע מורידה אמנם את "הרווח" של השוכרים אולם לא משנה את המדרוג בין החדרים השונים (בביטוי [2] הערך של שני אגפי האי שיוויון יורד ב a), ולכן עדיין אין לאף אחד מן הפרטים אלטרנטיבה טובה יותר. (הערה : לשוכר כלשהו אין אפשרות שלא לשכור חדר כלל). לכן $\left(\{q_j\},\sigma(i)\right)$ מקיים את התנאים [1] ו [2] וגם הוא יהיה שווי משקל תחרותי.

כלומר, וקטור מחירי שווי משקל איננו יחיד.

4. <u>הוכחה למקרה N=2 :</u>

נתון שווי משקל תחרותי וצריך להראות כי ההקצאה המתקבלת ממנו יעילה. בלי הגבלת הכלליות נניח כי בהקצאת שווי משקל פרט 1 שוכר את חדר 1 ופרט 2 שוכר את חדר 2. אם כך תנאי [2] עבור פרט 1 יהיה : $V(1,1)-P_1 \geq V(1,2)-P_2$ (אין ל 1 אלטרנטיבה טובה יותר) ואותו תנאי עבור פרט 2 יהיה : $V(2,2)-P_2 \geq V(2,1)-P_1$

ע"י חיבור שני האישיוויונים האחרונים נקבל : $V(1,1)+V(2,2) \geq V(1,2)+V(2,1)$ [5]

אבל זה מבטיח את יעילות ההקצאה שכן אם $V(1,1) \leq V(1,2)$ וגם $V(2,2) \leq V(2,1)$ אזי [5] מבטיח כי בהכרח שני האישיוויונים החלשים מתקיימים כשיוויונות, ולכן אם בהחלפת החדרים בין הפרטים שניהם לא מפסידים הרי שגם אף אחד מהם לא מרויח ממש, ולכן הקצאת שווי משקל תחרותי היא יעילה.

<u>הוכחה למקרה הכללי (N כלשהו) :</u>

יהי $(\{P_j\},\sigma(i))$ שווי משקל תחרותי. נוכיח בשלילה כי s(i) הקצאה יעילה.

נניח כי s(i) איננה הקצאה יעילה : אזי קיימת הקצאה אחרת m(i) כך ש :

$$[6]\ \forall i:\ V(i,\mu(i)) \geq V(i,\sigma(i))$$

וגם

$$[7]\ \exists i_0:\ V(i_0,\mu(i_0)) > V(i_0,\sigma(i_0))$$

מכיוון שההקצאה s(i) התקבלה משווי משקל תחרותי הרי שלכל פרט i אין אלטרנטיבה טובה יותר, ובכלל זה גם לא האלטרנטיבה m(i) ומתוך [2] : $\forall i \in I: V(i,\sigma(i)) - P_{\sigma(i)} \geq V(i,\mu(i)) - P_{\mu(i)}$

נסכום את כל האי שיוויונים (מ i=1 ועד i=N):

$$[8]\ \sum_i V(i,\sigma(i)) - \sum_i P_{\sigma(i)} \geq \sum_i V(i,\mu(i)) - \sum_i P_{\mu(i)}$$

אבל בכל הקצאה אפשרית שהיא : $\sum_i P_{\sigma(i)} = \sum_i P_{\mu(i)} = \sum_j P_j$

ולכן נוכל לכתוב את [8] בצורה הבאה : $\sum_i \left[V(i,\mu(i)) - V(i,\sigma(i))\right] \leq 0$ [9]

מתוך בחירת m(i) קיים [7] : $\exists i_0:\ V(i_0,\mu(i_0)) - V(i_0,\sigma(i_0)) > 0$

אבל סכום כל המחוברים ב [9] אינו חיובי ויש בהם אחד לפחות חיובי ממש (מ [7] לעיל) מכאן שיש בהם גם אחד שלילי ממש (כלומר, פרט שעבורו m(i) גרועה ממש מ s(i)). או :

$$\exists i_1:\ V(i_1,\mu(i_1)) - V(i_1,\sigma(i_1)) < 0$$

וזה סותר את [6] ולכן אין חלוקה m(i) כנדרש. מכאן ש s(i) יעילה.

שאלה 3

1. הנחה א' משמעותה שלכל שתי הגרלות על "איכות החיים" (שיסומנו q_1,q_2) קיים : $(q_1,0)\sim(q_2,0)$
הנחה ב' משמעותה שלכל איכות חיים נתונה q, עבור כל שתי הגרלות בהן בכל הפרסים הוודאים איכות החיים היא q (קבועה) הפרט קובע את העדפתו עפ"י הכלל $L1\succeq L2 \Leftrightarrow \sum_k p2_k t_k \geq \sum_k p1_k t_k$ כאשר $P1_k$ היא ההסתברות לקבל פרס ודאי (q,t_k) בהגרלה 1L ובאופן דומה $P2_k$ לגבי L2.
הנחה ג' משמעותה שלכל שתי הגרלות L1,L2 אשר עבורן ההסתברויות לקבל כל אורך חיים שהוא שוות בין שתי ההגרלות, ואשר בכל אחת מההגרלות איכות החיים בכל הפרסים הוודאיים קבועה, q_1 ב 1L ו q_2 ב L2. מתקיים שאם $q_1>q_2$ אז L1 יועדף ממש על L2 ($L1\succ L2$). זאת כל עוד t איננו אפס זהותית (כאשר t=0 זהותית יש אדישות L1~L2 עפ"י הנחה א').

2. נניח כי מקבל ההחלטות פועל עפ"י מכסימיזציה של התוחלת של v(q)t ונראה את קיום שלוש התכונות.
תכונה א' מתקיימת כי לכל q_1,q_2 יהיה $(q_1,0)\sim(q_2,0)$ שכן $v(q_1)\cdot 0 = v(q_2)\cdot 0$
תכונה ב' מתקיימת כי לכל איכות חיים נתונה q ולכל שתי הגרלות L1,L2 באופן המוגדר בסעיף 1 קיים :

$$\sum_k p1_k t_k \geq \sum_k p2_k t_k \Leftrightarrow \sum_k p1_k v(q) t_k \geq \sum_k p2_k v(q) t_k \Leftrightarrow E_{L1}(v(q)\cdot t) \geq E_{L2}(v(q)\cdot t) \Leftrightarrow L1\succeq L2$$

(נזכור כי תמיד v(q)>0)
תכונה ג' מתקיימת כי לכל שתי הגרלות L1,L2 באופן המוגדר בסעיף 1 (כאשר q1>q2) מתקיים : מהיות v עולה ממש $v(q_1)>v(q_2)$ ולכן בכל מקרה בו Et>0 מתקבל $E(v(q_1)\cdot t) > E(v(q_2)\cdot t)$ ולכן L1 תועדף על L2.

3. (i) מקיום הנחות vNM קיימת איזושהיא w פונקצית תועלת vNM על התוצאות הוודאיות (q,t) כך שהפרט מקבל ההחלטות מבצע מכסימיזציה של תוחלת w(q,t).

(ii) מתוך הנחה ב' לכל איכות חיים q נתונה הפרט ממכסם את תוחלת החיים ולכן במקרה זה t יכולה לשמש כפונקצית תועלת המייצגת את יחס ההעדפה על אורכי החיים (בהינתן איכות q). אבל בגלל יחידות פונקצית התועלת עד כדי טרנספורמציה אפינית חייב להיות כי לכל q ישנם a(q) ו b(q) כך ש : w(q,t)=a(q)t+b(q) כאשר a(q)>0.

(iii) מתוך הנחה א' : לכל q_1,q_2 קיים $(q_1,0)\sim(q_2,0)$ ומכיוון שהפרט ממכסם את תוחלת a(q)t+b(q) הרי שלכל q_1,q_2 קיים $b(q_1)=b(q_2)$.

(iv) בגלל אינווריאנטיות פונקצית התועלת להזזות נוכל לקבוע את b(q) להיות b(q)=0 לכל q. לכן, a(q)t מייצגת את יחס ההעדפה הנתון, וקיים a(q)>0. ולבסוף, לכל $q_1>q_2$ חייב להתקיים כי $a(q_1)>a(q_2)$ אחרת מתקבלת סתירה להנחה ג' (כאשר נבחר אורך חיים t>0 ונשווה את (q_1,t) ל (q_2,t)), כלומר, הפונקציה a(q) גם עולה ממש כנדרש.