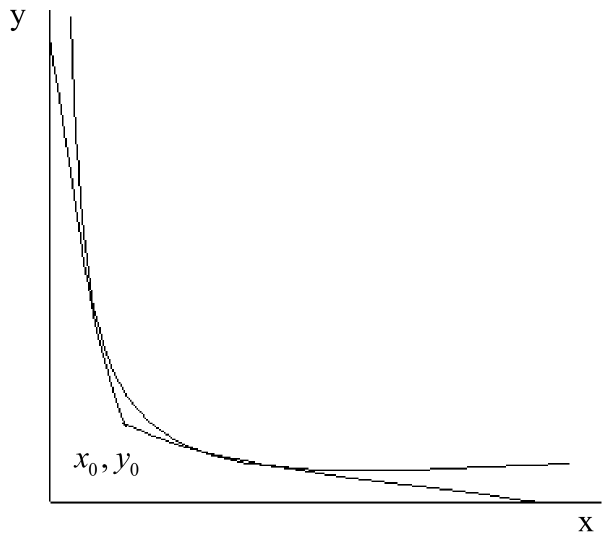
פתרון מבחן בתיאוריה כלכלית-מיקרו א
פתר: שי נתנאל
מועד: פברואר 2003
מרצה: אריאל רובינשטיין

שאלה 1:

א. פונקציות ההחלפה g, f והסל ההתחלתי של הפרט מגדירים קו תקציב. קבוצת הסלים הסופיים האפשריים היא קבוצה סגורה, היות שפונקציות ההחלפה רציפות, וחסומה, שכן בהינתן כמויות התחלתיות x_0, y_0 הפרט לא יכול לצרוך יותר מ- $(x_0, +g(y_0)$ יחידות ממוצר 1 או $y_0 + f(x_0)$ יחידות ממוצר 2. מכאן שקבוצת הסלים הסופיים האפשריים היא קבוצה קומפקטית. היות ויחס ההעדפה של הפרט רציף, הוא ניתן לייצוג על ידי פונקצית תועלת רציפה. היות שלפונקציה רציפה יש נק' מקסימום בקבוצה קומפקטית, יש פתרון לבעיית הצרכן.

ב. כאשר פונקציות ההחלפה קמורות ו/או אין אף תנאי הדן בשיפועי שתי פונקציות ההחלפה סביב הנקודה התחילית, "קו התקציב" של הפרט עשוי להיות קעור. במצב זה אין מניעה שיהיה יותר מפתרון אחד אף על פי שיחס ההעדפה של הפרט קמור כפי שעולה מהשרטוט הבא:



ג. יתרון לגודל בהחלפת יחידות ממוצר 1 - ככול שהפרט יחליף יותר יחידות ממוצר 1, ההחלפה תתבצע ביחס טוב יותר.

ד. היות ובנקודה x_0, y_0 מכפלת הנגזרות של פונקציות ההחלפה היא 1 חייב להתקיים ש- $f'(x_0) = 1/g'(y_0)$. מכאן נובע ש"קו התקציב" של הפרט גזיר בנקודה x_0, y_0, שכן f היא פונקציה מ- x ל- y ו- g היא פונקציה מ- y ל- x. היות ו- g, f קעורות, מתקבל קו תקציב קמור. נניח בשלילה שהפרט מוצא שתי עסקאות כאופטימליות באחת הוא צורך x_1, y_1 ובשניה הוא צורך x_2, y_2. היות וקו התקציב קמור הסל $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}$ הוא סל אפשרי. היות והפרט אדיש בין הסל x_1, y_1 והסל x_2, y_2 הוא יעדיף על פניהם ממש את הסל $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}$ על פי הקמירות החזקה של יחס ההעדפה שלו, בסתירה להנחה שהסלים x_1, y_1 ו- x_2, y_2 אופטימליים.

ה. אם פרט מחליף יחידה אחת מהמוצר הראשון הוא יקבל תמורתה a יחידות מהמוצר השני. אם כעת הוא יחליף יחידות אלו חזרה ליחידות של המוצר הראשון הוא יקבל ab יחידות. באופן דומה אם היה מתחיל מיחידה אחת מהמוצר השני היה יכול להחליפה באמצעות שתי עסקאות ל- ab יחידות. מכאן שעל מנת לוודא שפרט לא יכול לצאת ברווח משרשרת של עסקאות החלפה נדרוש $a \cdot b \leq 1$. המשמעות של פונקציות ההחלפה הליניאריות היא שיחס ההחלפה אינו תלוי בכמות המוצרים המוחלפת.

שאלה 2:

א. תחילה נראה שאקסיומת האי-תלות אכן אינה מתקיימת. ניקח לדוגמה שתי התפלגויות הכנסות שוויוניות לחלוטין: בהתפלגות A כל הפרטים מקבלים 100 ש"ח ובהתפלגות B כל הפרטים מקבלים 200 ש"ח. ברור ששתי ההתפלגויות שוויוניות באותה מידה. כעת נערבב את שתי ההתפלגויות הללו עם ההתפלגות A בהסתברות חצי. בעירוב של B עם A מתקבלת התפלגות בה מחצית מהפרטים מקבלים 100 ש"ח ומחציתם מקבלים 200 ש"ח. בעירוב של A עם A מתקבלת ההתפלגות A בה כל הפרטים מקבלים 100 ש"ח. מובן שעירוב של A עם A יותר שוויוני מאשר עירוב של A עם B, בניגוד לאקסיומת האי תלות. הסיבה לכך היא שהיחס המבוקש דן בפיזור ההכנסות בלבד ולא בגובהן. אקסיומת האי-תלות מתאימה למצב בו יחס ההעדפה של הפרט הוא על גובה ההכנסות ורק דרך התועלת השולית הפוחתת מגובה ההכנסות מתקבלת שנאת אי השוויון בהכנסות.

ב. אקסיומה הנה תכונה אשר אינטואיטיבית צריכה להתקיים עבור כל יחס סדר אפשרי, לדוגמה: נניח שהתפלגות הכנסות A זהה להתפלגות הכנסות B מלבד שההכנסה הכי גבוהה ב-B הנה "הזזה כלפי מעלה" של ההכנסה הכי גבוהה ב-A או שההכנסה הכי נמוכה ב-B הנה "הזזה כלפי מטה" של ההכנסה הכי נמוכה ב-A, הרי שהתפלגות ההכנסות A שוויונית לפחות כמו B.
דוגמאות לפונקציות ש"שלילתן" תייצג יחסים המקיימים אקסיומה זו:

- שונות התפלגות ההכנסות.
- המרחק בין ההכנסה הגבוהה ביותר להכנסה הנמוכה ביותר.
- היחס בין ההכנסה הגבוהה ביותר להכנסה הנמוכה ביותר.

שאלה 3:

א. שיווי משקל תחרותי הנו וקטור של מחירים והקצאה של הכסף והבתים, כך שעבור כל פרט, הסל שאותו הוא מקבל בהקצאה הסופית הוא אופטימלי בהינתן קבוצת הבחירה העומדת בפניו, הנובעת מהמחירים וההקצאה התחילית.

ב. שיווי משקל תחרותי מתאפיין בשתי התכונות הבאות:

- בשיווי משקל תחרותי פרט 0 אינו מחזיק בבתים – אם היה ברשותו בית, חייב היה להיות שמחירו של בית זה הוא אפס, אחרת היה מעדיף למכרו. מאידך אם מחירו של בית כלשהו הוא אפס, לא ייתכן שלא יימכר שכן היה נמצא פרט כלשהו מבין שאר הפרטים שנשאר ללא בית והיה מעוניין לרכוש בית זה במחיר אפס.
- בשיווי משקל תחרותי לא ייתכן ששני פרטים יכולים לרכוש את הבית הטוב ביותר, אחרת אחד מהם פועל בצורה לא אופטימלית. מכאן שמחיר הבית הטוב ביותר חייב להיות גדול מ- m(2) וקטן או שווה ל- m(1). באופן דומה מחיר הבית השני הכי טוב חייב להיות גדול מ- m(3) וקטן או שווה ל- m(2) וכן הלאה.

בשיווי משקל מחירו של הבית ה-k הכי טוב יהיה $m(k+1) < p_i^k \le m(k)$ (כאשר מחיר סחורה אפס מנורמל לאחד). מחיר הבית הגרוע ביותר יהיה בין גדול או שווה לאפס וקטן או שווה ל- m(n). ההקצאה בשיווי משקל היא שהפרט העשיר ביותר מקבל את הבית הטוב ביותר, הפרט השני בעושרו מקבל את הבית השני בטיבו וכן הלאה. כמות הכסף שנותרת ברשות כל פרט $k \neq 0$ היא $m(k) - p_i^k$. סכום הכסף שמקבל פרט אפס הנו $\sum_i p_i$, ואין ברשותו בתים.

ג. הקצאת **הבתים** בכל שיווי המשקל התחרותיים היא יעילה שכן כל הבתים עוברים לפרטים שמעונינים בהם (הסדר לא משנה). עם זאת יש לשים לב שבמספר רב של שיווי המשקל הקצאת כלל המשאבים במשק (כסף ובתים) אינה יעילה שכן לא כל הכסף עובר בהכרח לפרט אפס.