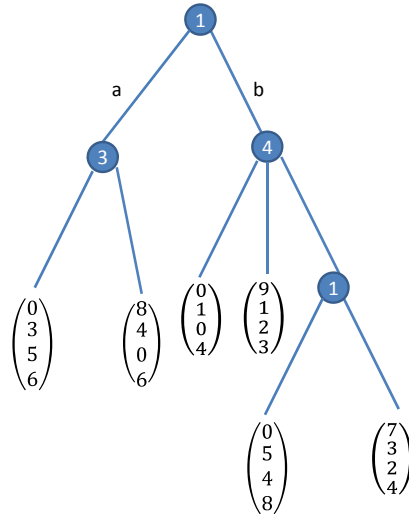


אגדות כלכליות/אריאל רובינשטיין/תשע"ג

סיכום שיעור 13, 14 בינואר 2013: משחקים בצורה רחבה (המשך) ורעיון האימפלמנטציה

משחק בצורה רחבה מגדיר לא רק את השחקנים, הפעולות והאינטרסים אלא גם את סדר הפעולות. לכן הוא מאפשר לנו לדון בהשלכות של פעולות מסוימות על מה יהיו הפעולות שינקטו בהמשך ומה תהיה תוצאת המשחק. בצורה זו נוכל לדון באיום אמין או לא אמין – כלומר, איום שאם ייבחן ימומש או לא ימומש.

אסטרטגיה במשחק בצורה רחבה, מגדירה לא רק תכנית פעולה במובן של מה השחקן יעשה עד לסיום המשחק. פרופיל אסטרטגיות הוא ניתוח שלם של המשחק כך שהוא מתייחס למה יקרה במשחק בכל הסיטואציות האפשריות, לרבות אלו שלא יתרחשו. למשל, כדי ששחקן 1 יבחר בין a ל- b הוא צריך לחשוב הן מה שחקן 4 יעשה אם הוא (1) יבחר ב- b והן מה שחקן 3 יעשה אם הוא חבחר ב- a אפילו שאחד מהם לא ישחק כתוצאה מפעולתו. בנוסף, 1 יודע שאם ייבחר ב- a , הוא לא ישחק בפעם השנייה ובכל זאת אסטרטגיה מגדירה מה יעשה בקדקוד ההחלטה האחר אפילו אם ייבחר a כי זה משליך על מה ש-4 יעשה אילו ייבחר ב- b ולכן ישפיע על שיקוליו של 1 במה לבחור בקדקוד ההחלטה הראשון.



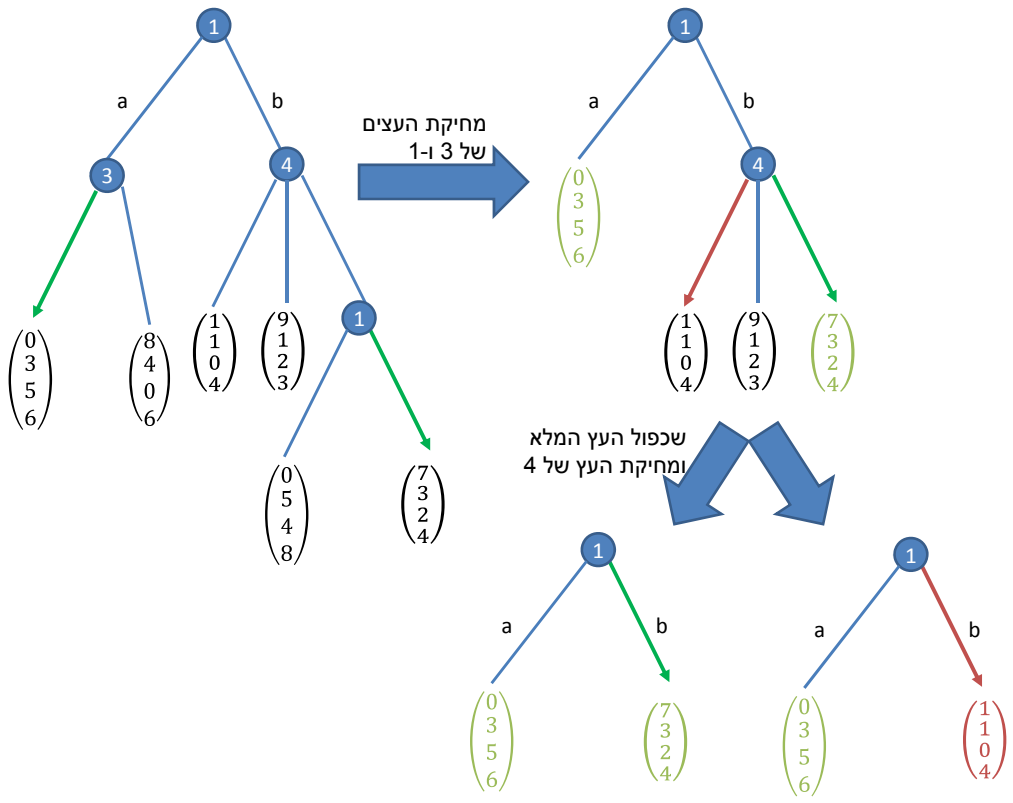
אינדוקציה לאחור – Backward Induction

אינדוקציה לאחור היא שיטה לניתוח משחק הנשענת על כך שכאשר שחקן נתקל בבעיית בחירה שבה כל פעולה שלו מובילה לתוצאה ברורה הוא ייבחר בפעולה שתוביל לתוצאה העדיפה עליו, כלומר זו עם התשלום הגבוה ביותר.

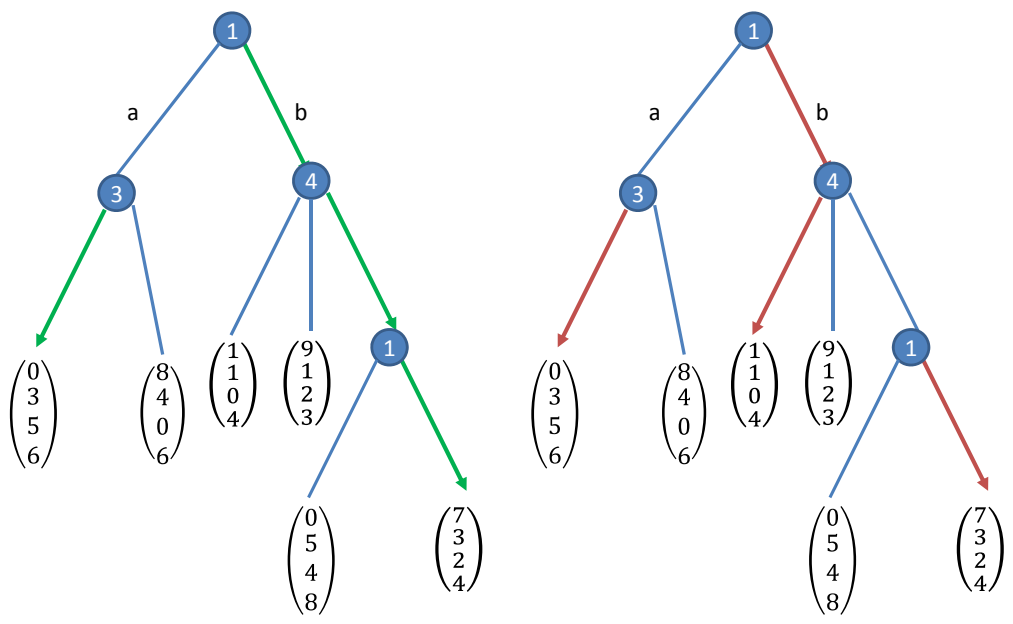
השיטה עובדת כך: מתבוננים בתתי העצים בקוטר 1 (כלומר העצים שהמרחק הרחוק ביותר מהשורש אל סוף המשחק הוא 1) ושואלים עבור השחקן שבשורש מה טוב יותר עבורו לעשות. בעצים בקוטר 1 פעולת השחקן מובילה לסיום המשחק ולתוצאה ברורה. לכן, אם השחקן מתנהג בצורה רציונלית כשיגיע לנקודת החלטה זו אז בחירתו תהיה באחת הפעולות המובילות לתשלום הגבוה ביותר (למשל, 3 ייבחר בענף השמאלי). כעת, ניתן לייחס לפעולה שמובילה לקדקוד זה את התוצאה שמצאנו (למשל, 1 יודע שאם ייבחר a תתקבל התוצאה שבה יקבל 0 ולא 8) ולמחוק את תת העץ שבו כבר טיפלנו. בשלב הבא נטפל בעצים החדשים שהם בקוטר 1 לאחר המחיקה. בעצים אלה פעולת השחקן אינה מובילה ממש לסיום המשחק, אך היא מובילה למצב שבו תוצאת המשחק "הוגדרה". נמשיך באותו האופן. מכיוון שהמשחק סופי, התהליך יסתיים.

בתהליך זה הצמדנו לכל קודקוד פעולה מסוימת. כלומר, הגדרנו פרופיל של אסטרטגיות, כיוון שעברנו על כל הקודקודים של כל שחקן והגדרנו לכל שחקן פעולה.

בשרטוט מתואר יישום השיטה על העץ שלעיל:



התוצאות:



טענה: פרופיל אסטרטגיות שנוצר באמצעות אינדוקציה לאחור מהווה שיווי משקל פרפקטי.

הטענה חשובה משתי סיבות – ראשית, זו שיטה למצוא שיווי משקל פרפקטי. שנית, הדבר מראה קיום של שיווי משקל פרפקטי בכל משחק סופי בצורה רחבה.

הוכחה: נסתכל על פרופיל האסטרטגיות שבנינו. נביט על פעולה של אחד השחקנים באחד הקודקודים. נטען שהפעולה שלו היא תגובה טובה ביותר: פעולה אחרת שלו לא תיתן לו תשלום גבוה יותר – אם יסטה וכל היתר ימשיכו לפי פרופיל האסטרטגיות, במקרה הטוב זה יביא לו לאותו תשלום ובמקרה הרע יביע לתשלום נמוך יותר, כיוון שכך בנינו את האסטרטגיות. אולם אולי השחקן יכול לשפר את מצבו על ידי כך שמשנה את האסטרטגיה שלו ביותר מנקודה אחת?

התשובה היא לא. נניח שיש מספר כלשהו של קודקודים שבהם שינוי הפעולה יביא לתוצאה טובה יותר עבור השחקן. ניקח אסטרטגיה כזו שכרוכה במספר השינויים הקטן ביותר ששחקן צריך לבצע כדי לשפר את מצבו. נסתכל על השינוי האחרון שמבוצע באסטרטגיה (כלומר, השינוי בשרש העץ בקוטר הקטן ביותר). בקודקוד זה, אם מבצע שינוי הוא בהכרח אינו משפר את מצבו לעומת האסטרטגיה המקורית כיוון שזו סטייה חד פעמית (והרי כך בנינו את האסטרטגיה שלו). לכן, אם אינו משפר את מצבו משמע שגם אם נוותר על השינוי בנקודה זו ונחזור לפעולה הרשומה באסטרטגיה המקורית תתקבל תוצאה זהה בעדיפותה עבור השחקן. קיבלנו סתירה למינימליות מספר השינויים.

משחק השח-מט

גם משחק השח-מט הוא משחק סופי שניתן לתארו כמשחק בצורה רחבה: לשחקן "לבן" יש 20 פעולות אפשריות בתור הראשון, ואחריו לשחקן "שחור" יש 20 פעולות עבור כל אחת מ-20 הפעולות של הלבן וכן הלאה, השחקנים פועלים לסירוגין ולכל שחקן פעולות רבות (לכן יש מספר עצום של הסתעפויות בעץ). זהו משחק סופי, כיוון שאם במשחק שחקן חוזר על אותה העמדה 3 פעמים, היריב יכול להכריז על תיקו.

המשחק מסתיים באחת משלוש תוצאות אפשריות – ניצחון ללבן, ניצחון לשחור או תיקו ומדובר במשחק עם ניגוד אינטרסים מוחלט, כלומר משחק סכום אפס. מהטענה שראינו קודם למשחק יש שווי משקל ומכיון שמדובר במשחק סכום אפס תוצאת שיווי משקל יחידה כלומר או שאחד השחקנים יכול להבטיח לעצמו ניצחון או ששניהם יכולים להבטיח תיקו. למשל, אם תוצאת שיווי המשקל היא שלב מנצח (בפועל, איננו יודעים מהי תוצאת שיווי המשקל, החישוב בשיטת האינדוקציה לאחור לא ניתן לביצוע בגלל מסובכות המשחק), משמע שהלבן יכול להבטיח לעצמו ניצחון ופעולות השחור לא משפיעות על תוצאת המשחק. אם תוצאת שיווי המשקל היא תיקו, אז כל שחקן יכול להבטיח לעצמו תיקומכאן שיש מובן לפיו, משחק השח-מט הוא טריוויאלי כמו איקס-עיגול. ההבדל העיקרי בין המשחקים הוא שאת תוצאת איקס-עיגול רוב בני האדם מכירים ואילו את תוצאת משחק השח-מט איש אינו מכיר.

משפט שלמה ורעיון האימפלמנטציה

נר שמן נמצא בירושלים. שני אזרחים טוענים לבעלות עליו. ברור שאחד מהם הוא בעליו האמיתי של הנר. ערכו של הנר H בעיני בעליו האמיתיים ורק L ($0 < L < H$) בעיני המתחזה. בעייתו של המלך שלמה היא כמובן שאינו יודע מיהו הבעלים האמיתי של הנר (בעוד הם יודעים את האמת היטב). "החכם באדם" מצווה על עריכת המשחק הבא:

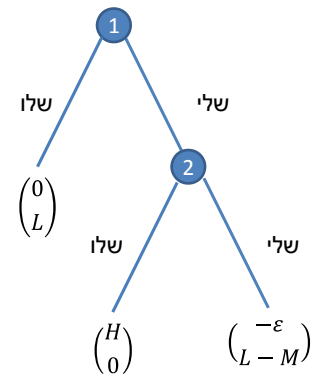
אחד מהשניים נקרא להכריז "שלי" או "שלו". הכרזה "שלו" תסיים את המשחק והשחקן האחר יקבל את הנר. אם המכריז אומר "שלי", יידרש השחקן השני לבחור בין לומר "שלו" – מה שיביא למתן הנר לטוען הראשון, או "שלי" מה שיחייב אותו לשלם למלך שלמה סכום M גבוה מ- L ונמוך מ- H לפני שיקבל את הנר. במקרה זה השחקן הראשון יענש בקנס $\varepsilon > 0$ קטן.

המשחק שיצר המלך שלמה מביא לכך שבשווי משקל פרפקטי הנר יוענק לבעליו המקוריים מבלי שייצטרך לשלם דבר.

המשחק מציג רעיון מרכזי שנקרא "אימפלמנטציה" – בהנתן בעיה, ננסה לבנות משחק שיביא לכך שבפתרונו יתקבלו כל התוצאות הרצויות והתוצאות הרצויות בלבד. אם לוקחים את תורת המשחקים בצורה רצינית, ניתן לחשוב עליה ככלי לבניית מנגנונים שיובילו לתוצאות רצויות. משפט שלמה מהווה דוגמה לכך. כדי לתאר את המשחק בצורה מלאה, צריך לרשום את המשחק פעמיים: פעם אחת כאשר 1 הוא הבעלים האמיתיים, ופעם אחרת כאשר 2 הוא הבעלים האמיתיים.

כאשר 1 הוא הבעלים האמיתיים:

בשיווי משקל פרפקטי, 2 יעדיף להכריז "שלו" ולקבל 0 מאשר להכריז "שלי" ולקבל תשלום שלילי $L - M$. לכן, 1 יעדיף להכריז "שלי" ולקבל H לעומת 0.



כאשר 2 הוא הבעלים האמיתיים:

2 יעדיף להתעקש ולומר "שלי", לקבל את הנר ולשלם את הסכום ולהשאר עם $H - M$, מאשר לומר "שלו" ולקבל תשלום 0. לכן, 1 יעדיף לומר "שלו" ולקבל תשלום 0, מאשר לומר "שלי" ואז לשלם את הקנס ε .

כלומר, באמצעות עיצוב משחק נכון, קיבלנו שתוצאת שיווי המשקל בכל אחד מהמצבים, היא שהשחקן שהנר שלו מקבל אותו מבלי לשלם קנס.

