

נתבונן בסיטואציה המתארת אינטראקציה בין מגן לתוקף. סיטואציה שכזו יכולה לתאר מגוון של מצבים, למשל, נחשוב על סיטואציה כלכלית שבה "המגן" הוא חנות הפועלת בשוק ו"התוקף" שוקל להקים חנות מתחרה. אנו מתעניינים בשאלות האם המתחרה ייכנס לשוק, ואם כן מה יעשה המגן.

נתאר את הסיטואציה כמשחק סימולטני (תוך שימוש בכלי שעסקנו בו כבר בקורס): שחקן 1 הוא התוקף הפוטנציאלי, ושחקן 2 הוא המגן. פעולות השחקנים הן: התוקף יכול לבחור האם לתקוף או לא לתקוף; המגן יכול לתכנן האם להתפשר או להילחם אם וכאשר התוקף יתקוף. נתאר את האינטרסים של השחקנים באמצעות המטריצה הבאה:

		2 – מגן	
		מתכנן להילחם	מתכנן להתפשר
1 – תוקף	תוקף	-1, -1	3, 1
	לא תוקף	1, 3	1, 3

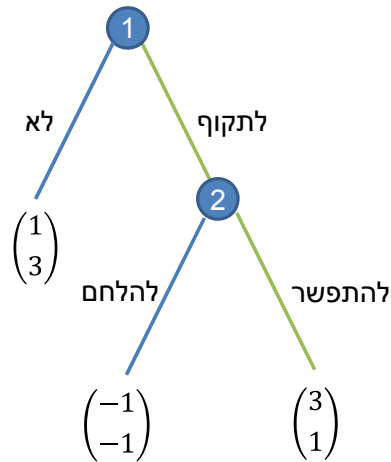
האפשרות הטובה ביותר לתוקף היא שהוא תוקף ו-2 מתפשר והגרועה ביותר שהוא תוקף ו-2 נלחם בו, בתווך נמצאת האפשרות שלא יתקוף, ואז תגובתו המתוכננת של 2 כלל לא תצא לפועל מבחינת המגן האפשרויות הטובות ביותר הן ש-1 אינו תוקף (ואז הוא נותר בודד בשוק ואינו צריך להוציא לפועל את תכניתו להתפשר או להילחם). בהנחה ש-1 יתקוף, 2 מעדיף להתפשר על פני להילחם. תיאור הסיטואציה כמשחק סימולטני תלויה בפרשנות לפעולות 2 כמתארות מחויבות לתכנית מותנית שתצא לפועל אחרי ש-1 תוקף ובהנחה שאין לו זמן לתכנן מה לעשות אלא יצטרך לבצע מיידית את הפעולה שבחר מראש.

למשחק שני שיווי משקל של נאש:

- (1-לא תוקף, 2- מתכנן להילחם). האיום של 2 אינו ממומש והוא "בחינם", ו"משיג את המטרה" ש-1 לא ייכנס.
- (1- תוקף, 2- מתכנן להתפשר) – אם 2 מתכוון להסכים לפשרה, כדאי ל-1 כדאי לתקוף.

הנקודה המרכזית בדוגמה היא שאילו אני שחקן 1, ואני נמצא בשיווי המשקל שבו אני לא תוקף והמגן מאיים להילחם, אני אומר לעצמי – "שיילחם, נראה אותו". אני יודע שאם אני תוקף, ואם יש ל-2 הזדמנות להגיב לצעד שאנקוט בצורה "מושכלת", הוא יעדיף להתפשר מאשר להילחם ולהפסיד. לכן, שיווי המשקל שבו 1 לא תוקף נראה לנו פחות מתקבל על הדעת. כלומר, אם אנו נמצאים בסיטואציה שבה 2 לא מחויב לתכנית המותנית שיצר לפני תחילת המשחק, אנו צריכים לתאר את המשחק במסגרת אחרת שבה "ייפסל" שיווי המשקל ללא תקיפה.

נתאר את המשחק באמצעות עץ. העץ מתאר גם את סדר הפעולות. כל קודקוד של העץ, פרט לקודקודים הסופיים, מתאר נקודת החלטה שבה שחקן (ששמו רשום על הקודקוד) צריך לבצע פעולה. הענפים היוצאים מכל קודקוד מתארים את הפעולות שהשחקן שהקודקוד מיוחס לו צריך לבחור מתוכן בנקודת החלטה זו. הקודקודים הסופיים מציינים היסטוריה אפשרית של המשחק (תוצאת המשחק). התשלומים נרשמים כך שהמספר העליון מסמל את התשלום ל-1 והתחתון את התשלום ל-2.



"היסטוריה סופית" מתארת כל מהלך עניינים שיכול להתרחש (למשל במשחק הזה היסטוריות סופיות הן "לא"; "לתקוף" ו"להלחם"; "לתקוף" ו"להכנע").

במשחק בצורה רחבה, אסטרטגיה של שחקן היא תכנית פעולה שמגדירה לו מה הוא הולך לעשות בכל קודקוד שאליו הוא עשוי להגיע (גם אם לא יגיע אליו). למשל, במשחק הנ"ל, שחקן 1 מחליט האם לתקוף או לא לתקוף, ושחקן 2 צריך להחליט האם להתפשר או להילחם אם 1 תוקף.

ש"מ נאש הוא תפריט אסטרטגיות של השחקנים, כך שבהנתן האסטרטגיה של האחר כל שחקן לא רוצה לבחור באסטרטגיה אחרת מזו הרשומה בתפריט. כלומר, צמד אסטרטגיות מהוות שיווי משקל נאש אם תכנית הפעולה המותווית מראש של כל שחקן מהווה תגובה טובה ביותר לתכנית הפעולה של האחר.

שיווי משקל פרפקטי כולל דרישה שבכל קודקוד שניתן להגיע אליו במשחק, התכנית של השחקן מאותה נקודה אופטימלית אל מול תכניות השחקנים האחרים. כלומר, צמד אסטרטגיות מהוות שיווי משקל פרפקטי, אם תכנית הפעולה של כל שחקן מהווה תגובה טובה ביותר לתכנית של האחר בכל קודקוד במשחק. במילים אחרות, אם שחקן מאיים שינקוט בפעולה מסוימת, צריך שאם הוא יבחן את תכניתו גם בנקודת החלטה שבה הוא צריך לממש את האיום, מימושו אכן יהיה מיטבי עבורו.

למשחק שלנו ש"מ פרפקטי יחיד (המסומן בענפים הירוקים) שבו שחקן 1 תוקף ושחקן 2 מתפשר. זאת מכיוון שאם יגיע תורו של 2 לשחק, נדרש שתכניתו תהיה אופטימלית, ולכן הוא חייב להסכים לפשרה. ולכן, בחירתו של התוקף היא בין התשלומים 1 אם שחקן 1 לא תוקף, לבין 3 אם שחקן 1 תוקף (כי שחקן 2 מתפשר אם הוא תוקף), ולכן תגובתו הטובה ביותר היחידה היא לתקוף.

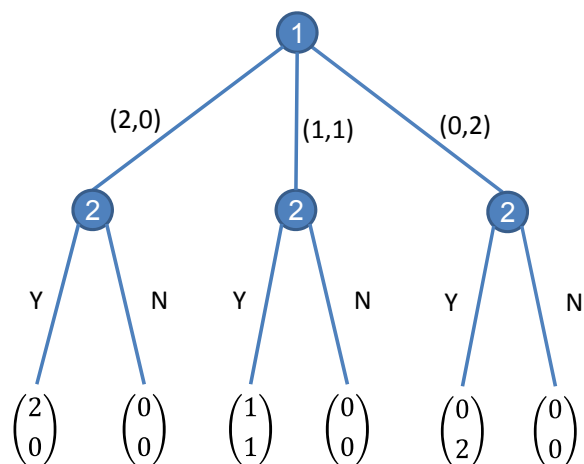
ש"מ נאש הנוסף שמצאנו אינו פרפקטי (אך הוא עדיין ש"מ נאש, מסומן בכחול). השחקנים מגיבים בצורה אופטימלית זה לזה לפני שמתחיל האירוע להתרחש: 1 מגיב בצורה טובה ביותר לכך ש-2 מאיים להלחם, ו-2 מגיב בצורה טובה ביותר לכך ש-1 לא תוקף. אך אם 1 אכן תוקף, 2 יעדיף שלא להילחם ולכן זהו אינו ש"מ פרפקטי.

כשניתחנו את המשחק למציאת שיווי המשקל הפרפקטי עשינו זאת מהסוף להתחלה. התהליך נקרא "אינדוקציה לאחור" (*Backward Induction*) והוא משקף את ההיגיון שכשאתה חושב מה לעשות מלכתחילה אתה חושב מה יהיו ההשלכות של כל פעולה שתעשה, ולכן צריך לנתח את המשחק מסופו ולא מהתחלתו.

משחק האולטימטום

משחק האולטימטום הוא סיטואציית המיקוח הפשוטה ביותר. שתי יחידות עומדות לחלוקה בין 1 ו-2. לשחקן 1 מעמד של "מציע" ולשחקן 2 מעמד של "מגיב". השחקן המציע פועל ראשון והוא מציע הצעה כיצד לחלק את שתי היחידות, השחקן המגיב יכול להגיד "כן" או "לא". אם המגיב אומר כן, ההצעה מתקבלת ומיושמת, אם המגיב אומר "לא" אף אחד מהשניים לא מקבל את היחידות.

נייצג את המשחק כעץ. הפעולה $(2,0)$, למשל, של שחקן 1 מייצגת שהוא מציע שתי יחידות לעצמו ו-0 יחידות לשחקן 2. עבור כל הצעה שחקן 2 מגיב ב-Y או N (כן או לא). נניח שכל שחקן מעוניין רק במספר היחידות שיעמוד לרשותו בסופו של המשחק.



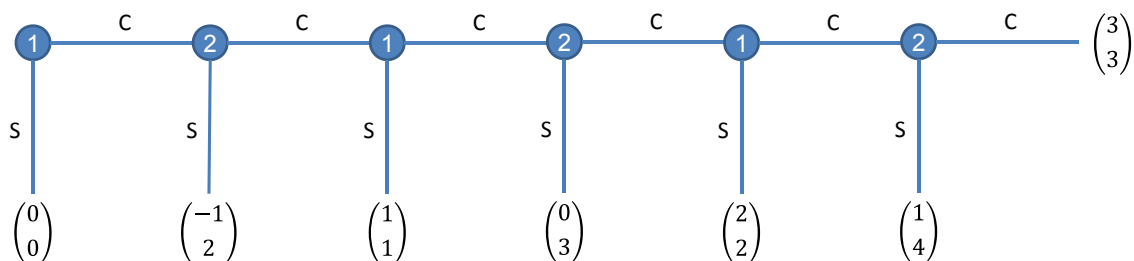
כאמור, אסטרטגיה היא תכנית פעולה שמגדירה מה לעשות בכל מצב שניתן להיקלע אליו. לשחקן 1 שלוש אסטרטגיות. לשחקן 2, $2^3 = 8$ אסטרטגיות אפשריות כיוון שלכל אחת משלוש ההצעות של 1 יש לו שתי אפשרויות פעולה (כן או לא). דוגמאות לאסטרטגיות של שחקן 2 הן "כן לכל הצעה", "כן רק אם מציע חלוקה שווה ולא אם מציע חלוקה אחרת", ו-"כן אם מציע לי לפחות יחידה אחת אך לא אם מציע לי אפס".

שיווי משקל פרפקטיים למשחק: אם 2 מקבל הצעה שבה מוצעות לו 2 יחידות או יחידה 1, תגובתו הטובה ביותר היחידה היא להגיב ב"כן". אם ל-2 לא תוצע אף יחידה (0), שתי הפעולות "כן" ו-"לא" מהוות תגובה טובה ביותר. לכן, שתי האסטרטגיות – "כן לכל הצעה" או "כן ליחידה 1 או 2 ולא ל-0" הן מועמדות להיות חלק משיווי משקל פרפקטי. במקרה שבו 2 אומר כן לכל, 1 יציע לעצמו את 2 היחידות כי אז מצבו הטוב ביותר. אם 2 אומר לא ל-0, אז 1 יציע את החלוקה (1,1) כי זו הפעולה הטובה ביותר בהינתן תגובתו של 2, ותגובתו של 2 לומר "לא" אם 1 מציע לעצמו את שתי היחידות היא איום אמין. לסיכום, שיווי המשקל הפרפקטיים הם ((2,0), "כן לכל הצעה") ו-((1,1), "כן ליחידה אחת או שתיים ולא לאפס").

דוגמה לשיווי משקל שאינו פרפקטי: 1 מציע ל-2 את שתי היחידות, ו-2 מתכנן להגיב "כן" רק אם מוצעות לו שתי היחידות. זהו ש"מ של נאש, כיוון שבהנתן האסטרטגיות, כל שחקן מגיב בצורה טובה ביותר לאסטרטגיית האחר – אם 1 מציע את שתי היחידות אז להגיב "כן" להצעה ותגובה כלשהי להצעות אחרות מהוות תגובה טובה ביותר (בלי חשיבות למה אומר להצעות האחרות); אם 2 אומר "לא" להצעות האחרות, להציע את שתי היחידות ל-2 היא תגובה טובה ביותר של 1 (כמו כל פעולה אחרת). אולם, אם 1 יציע ל-2 יחידה אחת, אז 2 כבר לא מגיב בצורה טובה ביותר – כלומר, 2 מאיים איום לא אמין ולכן זהו ש"מ שאינו פרפקטי.

משחק מרבה הרגליים (Centipede Game)

שני שחקנים משחקים לסירוגין. שחקן בתורו מחליט האם להמשיך (C) או להפסיק (S). אם ממשיך, אז נגרעת יחידה מכיסו ונוספות 2 יחידות לשחקן הבא. אם מפסיק, המשחק נגמר.



הן לשחקן 1 והן לשחקן 2, שמונה אסטרטגיות אפשריות (למשל, "תמיד להמשיך", "להפסיק בכל תור", או "להפסיק, ולהמשיך"). נשים לב שחלק מהאסטרטגיות הן יותר מופשטות מהמושג "תכנית פעולה" כפי שהתייחסנו אליה עד כה, כי אם שחקן 1 מתכנן עוצר בתור הראשון, אז אין לו צורך לתכנן את צעדיו במידה ולא יעצור. את החלקים של האסטרטגיה שאינם יכולים להתממש יש לפרש כחלקים של הניתוח של המשחק ולא תכנית פעולה.

למשחק ש"מ פרפקטי יחיד ובו האסטרטגיה של כל שחקן היא להפסיק את המשחק בכל תור (מסומן בחצים). מדוע? כי בתור האחרון שלו 2 מעדיף להפסיק (4 גדול מ-3), ולכן בתור שלפני 1 יעדיף להפסיק (2 גדול מ-1), לכן 2 יעדיף להפסיק בתור הקודם שלו (3 גדול מ-2), וכן הלאה עד שבתור הראשון 1 יעדיף להפסיק מאשר להמשיך (0 גדול מ-1).

