אגדות כלכליות/אריאל רובינשטיין/תשע"ג

סיכום שיעור 11, 31 בדצמבר 2012: משחק סכום אפס

"משחק סכום אפס" הוא מושג מתורת המשחקים שזלג לשפה היום-יומית, שבה הוא מתאר בדרך כלל מצב בו אין אפשרות לבצע מהלכים שהם לטובת שני הצדדים. משחק סכום אפס הוא סיטואציה בה קיים משאב, ויש קונפליקט בין שני צדדים כיצד לחלק אותו. בשפה היום-יומית לפעמים זהו "תיאור של מציאות" ולעיתים עצם השימוש במושג הוא הבעת עמדה לגבי טיב יחסי הגומלין בין הצדדים (למשל בהקשר הישראלי-פלשתינאי).

משחק כמו שח-מט, הוא משחק סכום אפס – הלבן מעדיף שהוא מנצח על פני תיקו על פני שהשחור מנצח, ולשחקן בכלים השחורים השחור העדפות הפוכות. כלכלה, לעומת זאת, עוסקת בדרך כלל בסיטואציות שבהן יש תמהיל של ניגודי אינטרסים ושל אינטרסים משותפים. למשל, כל הציבור מעוניין בצמיחה כלכלית, אך יש ויכוח מי ראוי שייהנה ממנה.

<u>הגדרה</u>: משחק סכום אפס הוא משחק שני שחקנים, כך שלכל זוג תוצאות א' ו-ב', אם שחקן אחד מעדיף את תוצאה א' על ב' אז השחקן האחר מעדיף את ב' על א' ואם שחקן אחד אדיש בין א' ל-ב' גם האחר אדיש.

המושג "סכום אפס" בא מהעובדה שניתן לתאר משחק עם ניגוד אינטרסים מוחלט על ידי שמצמידים לשחקן 1 תשלומים המביעים את העדפותיו ולשחקן 2 תשלומים הפוכים. כלומר, אם התאמנו לשחקן 1 תשלום x נתאים לשחקן 2 את התשלום $-x$. (שים לב לכך ש-$x > y$ אם ורק אם $-x < -y$).

משחקים שבהם כל תוצאה של המשחק מתאפיינת מהעברת סכום כסף משחקן אחד לשני, ניתנים לתאור טבעי כמשחקי סכום אפס: התוצאה $(3, -3)$ תציין מצב שבו שחקן 1 מקבל 3 שקלים שמועברים אליו משחקן 2. אולם כאמור, משחקי סכום אפס מציינים כל סיטואציה של ניגוד אינטרסים מוחלט.

צורת החשיבה של *maxmin*

נסתכל שוב על גרסה של **"קרב המינים"** (שאיננו משחק סכום אפס, כיוון שלמשל שני השחקנים מעדיפים את התוצאה של פגישה בבלט מאשר תוצאה שבה הם לא נפגשים). נוסיף הנחה שאם השניים לא נפגשים, כל אחד מהם מעדיף להיות לבד בפעילות החביבה עליו מאשר בפעילות האחרת:

	בלט	אגרוף
אגרוף	0.5 , 0.5	2 , 1
בלט	1 , 2	0 , 0

גם למשחק זה שני שיוויי משקל של נאש, (בלט, בלט) ו- (אגרוף, אגרוף). שיווי המשקל של נאש מתאים לסיטואציה אם שוררת בה נורמת התנהגות יציבה והשחקנים מכירים אחד את האחר ומאמינים שהם יודעים כיצד הצד השני פועל. למשל, אם "הוא" יודע ש"היא" עקשנית ולכן תלך לבלט, הוא ייבחר ללכת לבלט. אך מה קורה כאשר אין נורמות מוכרות? למשל, מה קורה אם "הוא" ו"היא" מכירים זמן מועט ולא יודעים כיצד האחר ינהג? צורת חשיבה אפשרית לסיטואציה שכזו היא שהשחקן מחשב לגבי כל פעולה שלו "מה הגרוע ביותר שיכול לקרות אם אבחר בפעולה זו", ואז מוצא את הפעולה שמבטיחה לו את התשלום הטוב ביותר מבין התוצאות הגרועות ביותר.

צורת חשיבה זו קרויה *maxmin* וניתן לתאר אותה בשפה פורמלית בצורה הבאה:

$$\max_{a_1}\left\{\min_{a_2}\{u_1(a_1,a_2)\}\right\}$$

כלומר, לכל פעולה a_1 של שחקן 1, הוא שואל את עצמו מה הפעולה a_2 ש-2 יכול לנקוט ולפגוע בו ביותר (מול a_1), ותחת הנחה זו הוא מחפש את פעולה a_1 שתביא לתוצאה הטובה ביותר, כלומר לתוצאה הגרועה הכי פחות גרועה.

למשל, "הוא" חושב שאם ייבחר ללכת לאגרוף הגרוע ביותר יהיה ש"היא" תלך לבלט ואז "יקבל 0.5", ואם ייבחר ללכת לבלט הגרוע ביותר יהיה ש"היא" תלך לאגרוף ואז הוא "יקבל 0". לכן, אם ינקוט בצורת החשיבה הזו "הוא" ילך לאגרוף ובכך יבטיח לעצמו לפחות 0.5. בדומה, "היא" תעדיף ללכת לבלט ולהבטיח לעצמה לפחות 0.5 מאשר ללכת לאגרוף ולהסתכן בקבלת 0. לכן, אם שניהם עוקבים אחר צורת החשיבה זו התוצאה שתתקבל תהיה שכל אחד מהם ילך לפעילות החביבה עליו והשניים לא ייפגשו. תוצאת ה-*maxmin* במשחק איננה ש"מ של נאש, וזה אכן מצב לא יציב.

זוג או פרט – דוגמה למשחק סכום אפס

נאמר שבמשחק "זוג או פרט" שחקן 1 מנצח אם סכום "האצבעות" אי-זוגי ושחקן 2 מנצח אם הסכום זוגי. כיצד נייצג את פעולות השחקנים? ניתן לומר שלכל שחקן 5 פעולות (כמספר האצבעות) אך כיוון שמה שקובע את זהות המנצח הוא אך ורק זוגיות או אי-זוגיות הסכום ניתן גם לומר שלכל שחקן 2 פעולות – זוגית ואי-זוגית (למרות שהמשחקים שקולים מבחינת הניתוח התורת-משחקי הנפוץ, כאשר מבצעים ניסויים מתקבל הבדל קטן בין התוצאות כאשר יש 2 פעולות או 5 פעולות. מדוע? כיוון שאנשים נוטים לבחור פעולה בצורה רנדומית, וכאשר יש 5 פעולות לכל שחקן יש 13 תוצאות שמקנות ניצחון לשחקן הזוג ו-12 תוצאות שמקנות ניצחון לשחקן הפרט).

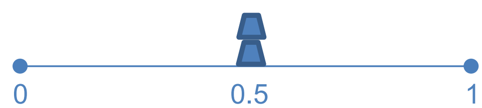
מדובר משחק סכום אפס: האינטרסים של השחקנים מנוגדים לחלוטין – כל אחד מעדיף לנצח על פני להפסיד, ובכל תוצאה אפשרית יש מנצח ומפסיד. אפשר לייצג את המשחק באמצעות מטריצת התשלומים הבאה:

		שחקן "זוג"	
		1	2
שחקן "פרט"	1	0 , 1	1 , 0
	2	1 , 0	0 , 1

למשחק אין ש"מ של נאש. ננתח את המשחק בגישת *maxmin*: אם שחקן ייבחר לשחק "1" הגרוע ביותר יהיה שיפסיד, אם ייבחר לשחק "2" גם אז הגרוע ביותר מבחינתו ש-2 ינצח. בדומה צורת חשיבה זו עבור פרט 2 מובילה אותה לתחושה ששחקן 1 ינצח. חשיבת *maxmin* מובילה את שני השחקנים לצפייה שונה לגבי תוצאת המשחק (לעובדה זו קשר בסיסי עם העובדה שלמשחק אין שווי משקל של נאש).

המשחק של הוטלינג

גם משחק זה שראינו בשיעור הקודם הוא משחק סכום אפס, שכן יש ניגוד אינטרסים מוחלט בין שני המוכרים. כאשר מוכר אחד מגדיל את חלקו הדבר בא על חשבון המוכר האחר. במשחק מצאנו שיווי משקל של נאש יחיד, ובו שני המוכרים התמקמו בנקודת האמצע – (0.5,0.5).



כעת ננתח את המשחק בגישת ה-*maxmin*: אם אינני יודע היכן היריב יתמקם, בכל פעולה שאנקוט המצב הגרוע ביותר מבחינתי יהיה שהוא יתמקם בצמוד אלי מהצד הארוך. למשל, אם אתמקם בנקודה 0.7 הגרוע ביותר יהיה שהוא יתמקם מעט לשמאלי, ואז אקבל רק 0.3 מהצרכנים; אם אתמקם בנקודה 0.1 הגרוע ביותר יהיה שהוא יתמקם מעט לימיני ואז אקבל רק 0.1 מהצרכנים. לכן, הפעולה שתביא לתוצאה הכי טובה מבין התוצאות הגרועות ביותר תהיה להתמקם ב-0.5.

כלומר, במשחק זה צורת החשיבה של *maxmin* מובילה אותנו לשיווי המשקל של נאש.

<u>משפט</u>: במשחקי סכום אפס פעולות שיוויי המשקל של נאש הינן גם פתרונות של בעיית ה- *maxmin*.

נניח שבמשחק סכום אפס יש שיווי משקל של נאש (a, b). נראה ש- a הינו פתרון אפשרי של בעיית ה-*maxmin* של שחקן 1 ו- b של שחקן 2.

			b			
a						
c						

אם 2 ישחק כל פעולה אחרת אל מול a מצבו לא ישתפר. מכיוון שזהו משחק סכום אפס, אם מצבו של 2 לא משתפר משמע שמצבו של 1 כן משתפר (במובן החלש – כלומר, לא מורע). לכן, התוצאה הגרועה ביותר ל-1 אם הוא מבצע את פעולה a תתקבל אם 2 בוחר ב-b.

מכיוון ש-(a, b) הוא שיווי משקל של נאש אז אם שחקן 1 ישחק פעולה אחרת כלשהי c אל מול b הוא יקבל בה תשלום נמוך יותר (במובן החלש). הגרוע ביותר לשחקן 1 כאשר הוא משחק c הוא או התשלום שמקבל כאשר 2 משחק b או שיש פעולה אחרת ש-2 נוקט ובה מקבל תשלום נמוך יותר. מובן שהגרוע ביותר כשמשחק c לא יכול להיות יותר *טוב* מהתשלום שמקבל ב-(c, b).

במילים אחרות, הגרוע ביותר עבור שחקן 1 כאשר הוא משחק a הוא ש-2 ישחק b. תוצאה זו טובה לפחות כמו הגרוע ביותר שיקרה לשחקן 1 אם ינקוט בפעולה אחרת c. כלומר, קיבלנו ש-a היא פעולה אליה 1 מגיע כאשר הוא חושב בצורת *maxmin*. באותו האופן נסיק לגבי 2 ש-b היא תוצר חשיבת ה-*maxmin* .

<u>מסקנה</u>: כל תוצאות שיווי המשקל של נאש במשחק סכום אפס נותנות את אותם התשלומים.

המסקנה מתקבלת כיוון שכל תוצאות שיווי המשקל של נאש מקנות לכל שחקן את ערך ה-*maxmin* שלו, אך אם ישנם תשלומים שונים, משמע שלפחות אחת התוצאות איננה *maxmin*.

נחזור לניתוח המשחק "זוג או פרט":

	1	2
1	0 , 1	1 , 0
2	1 , 0	0 , 1

נשנה את המשחק כך שניתן לכל שחקן 100 פתקים, ועל כל פתק השחקן יצטרך לכתוב שם פעולה (1 או 2). כל שחקן יכניס את כל פתקיו לכובע, ופתק אחד יישלף מכל כובע ולפיו תקבע תוצאת המשחק.

אסטרטגיה במשחק זה היא מה כותבים על כל אחד מ-100 הפתקים. ברור שמה שחשוב כאן הוא רק מספר הפתקים שעליהם כתוב המספר 1. כלומר, לכל שחקן יש 101 אסטרטגיות שמייצגות את מספר הפתקים שעליהם רשם 1 ומספר הפתקים עליהם רשם 2. למשל, האסטרטגיה $(60,40)$ של שחקן 1 (שחקן הפרט) מייצגת שהוא רשם על 60 פתקים את הספרה 1 ועל 40 פתקים את הספרה 2. נקבע את האינטרסים של השחקנים כך שכל אחד רוצה למקסם את ההסתברות שינצח.

מה יקרה אם 1 ישחק $(60,40)$ ו-2 ישחק $(30,70)$? הסיכוי של 1 לנצח יהיה הסיכוי שישלפו מהכובעים שני פתקים שונים – $0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7 = 0.54$.

אסטרטגיות אלה אינן מהוות שיווי משקל כיוון שאם שחקן 2 משחק $(30,70)$ אז התגובה הטובה ביותר של 1 היא לשחק $(100,0)$ ואז לנצח בהסתברות $0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.7 = 0.7$. באופן כללי, אם השחקן האחר נותן משקל יתר לאחת הספרות, התגובה הטובה ביותר היא לרשום על כל הפתקים ספרה זהה (1 ירשום את הספרה ההפוכה מזו שמקבלת משקל יתר ואילו 2 ירשום את הספרה שמקבלת משקל יתר).

לכן, שיווי המשקל של נאש היחיד במשחק זה הוא שכל שחקן בוחר באסטרטגיה $(50,50)$. במקרה זה הסתברות הנצחון של כל אחד מהשחקנים היא 0.5, וכל שינוי שאחד מהם יעשה לא ישפיע על סיכויי הזכייה שלו.

$(50,50)$ היא גם תוצאת ה-*maxmin* של המשחק, שכן הגרוע ביותר שיכול לקרות עבור אסטרטגיה כלשהי הוא שהסתברות הזכייה תהיה זהה למשקל שמקבלת הספרה שנרשמה פחות פעמים. לכן, לכל שחקן, הטוב ביותר מבין התוצאות הגרועות ביותר הוא לנקוט באסטרטגיה $(50,50)$.