

במחצית השנייה של השיעור הקודם דנו בשתי שאלות עליהן עניתם בבית כמבוא לתורת המשחקים.

1. דמיין שאתה וחבר משחקים משחק שבו כל אחד צריך לבקש סכום כסף, מספר שלם, בין 91 ל-100. כל שחקן יקבל את הסכום שהוא יבקש, אך יקבל 100 דולר נוספים בתנאי שביקש מספר שנמוך בדיוק ב-1 מהמספר שאמר החבר.
2. ברשותכם 120 גודים ואתם הגנרל שצריך להחליט איך להקצות את הגודים ל-6 חזיתות. אתם מנצחים בחזית אם הקציתם לה ממש יותר גייסות מאשר השחקן היריב, ומקבלים נקודה על כל חזית שמנצחים בה.

ראינו שבשתי שאלות אלה היה מגוון תשובות שונות, ולכל אחת נימוק משלה. נדון בדוגמה שלישית במתכונת דומה לשאלות הקודמות, אלא שהפעם נציג אותה בהמשך בצורה פורמלית במסגרת תורת המשחקים:

דילמת הנוסע

שניים נוסעים באותה הטיסה. חברת התעופה איבדה לכל אחד מהם מזוודה המכילה חפץ זהה. ברור לכל ששווי החפץ הוא בין 180 ל-300 דולרים. כל אחד משני הנוסעים מתבקש לבחור בו זמנית, בלי לדעת את בחירתו של האחר, מספר שלם בין 180 ל-300. חברת התעופה מבטיחה ששני הנוסעים יקבלו כפיצוי על האובדן סכום כסף ששווה למספר הנמוך מבין שני הסכומים שיוכרוזו. בנוסף, אם שני הנוסעים בחרו מספרים שונים, יהיה תיקון של הסכום כך שמי שהכריז על מספר נמוך יותר יקבל חמישה דולר נוספים שיועברו אליו ממי שהכריז על המספר הגבוה.

תגובות הכיתה: 300 (22%), 295-299 (30%), 180 (35%), ורק 13% בחרו מספר בטווח הרחב 181-294. במדגם של כ-15000 סטודנטים המספר 300 היה הפופולרי ביותר (45%) ורק 11% בחרו במספר בטווח 295-299. (ייתכן שהנטייה בכיתה לבחור במספרים 295-299 נובעת מהדיון בשיעור הקודם במשחק הדרישה 100-91).

תורת המשחקים מנתחת את הסיטואציה באמצעות תבנית הקרויה "משחק". "משחק" הוא צורת התבוננות על סיטואציות אסטרטגיות שיש לה מבנה מאוד מוגדר וברור.

רכיבי המשחק:

1. מיהם השחקנים

2. מהן הפעולות האפשריות לכל שחקן

3. מה האינטרסים או ההעדפות של כל שחקן. תוצאה של המשחק היא פרופיל בחירות של השחקנים. את האינטרסים של השחקנים ניצג על ידי כך שנצמיד לכל תוצאה ולכל שחקן מספר שמציין את "התועלת" של השחקן מהתוצאה. משמעות התועלת מצומצם להבעה של העדפות השחקן.

את הדילמה של הנוסע נתאר באמצעות מושג המשחק כדלקמן:

1. **השחקנים** – בסיטואציה הזו אלה שני הנוסעים. נקרא להם 1 ו-2.
2. **הפעולות האפשריות עבור כל שחקן** – לשני השחקנים קבוצת פעולות זהה והיא כוללת את כל המספרים השלמים בין 180 ל-300: $\{180, 181, \dots, 300\}$. חשוב להבין שהמשחק הוא "סימולטני" במובן שכל שחקן מבצע פעולה מבלי לדעת (ייתכן שיש לו השערה או אמונה) מה האחר עשה.
3. **אינטרסים / העדפות** – למשחק 121×121 תוצאות אפשריות. ההנחה הקלאסית בכלכלה היא ששחקנים מונעים ממטרות מטריאליסטיות ובהקשר הזה מסך הכסף שיצברו במשחק. כלומר, הוא מעדיף לקבל יותר כסף מאשר פחות. מוטיבים אחרים כמו הרצון לקבל יותר מהשחקן האחר, שקולי הגינות או תועלתו של שחקן אחר, אינם נכנסים לניתוח הקלאסי. נאמץ עתה הנחות (בלתי הכרחיות) אלה:
אם שחקן 1 בוחר a_1 והאחר a_2 , התועלת של שחקן 1 תחושב כדלקמן: אם 1 בחר סכום גבוה יותר משחקן 2 אז שחקן 1 יקבל $a_2 - 5$, אם 1 בחר סכום זהה לשל שחקן 2 אז הוא יקבל a_1 , אם הוא בחר סכום נמוך משל שחקן 2 אז 1 יקבל $a_1 + 5$. בכתוב מקוצר:

$$u_1(a_1, a_2) = \begin{cases} a_2 - 5 & a_1 > a_2 \\ a_1 & a_1 = a_2 \\ a_1 + 5 & a_1 < a_2 \end{cases}$$

מה שעשינו לעיל הוא להכיל את הסיטואציה בתוך המסגרת הפורמלית של משחק.

נעבור להגדרת מושג "שיווי משקל" – שיווי המשקל שנגדיר יציין נורמות התנהגות יציבות במשחק. כלומר, שווי משקל יהיה נורמת התנהגות, "פעולה לכל שחקן" כך שעבור כל שחקן, אם כל השחקנים האחרים משחקים לפי הנורמה, אז גם השחקן מעוניין לשחק לפי הנורמה. מושג זה קרוי **שיווי המשקל של נאש (Nash)**.

במילים אחרות, שווי משקל של נאש הוא תפריט פעולות, פעולה אחת לכל שחקן, כך שאף שחקן אינו רוצה לסטות מהפעולה שלו כשהוא יודע שיתר השחקנים פועלים לפי התפריט.

נשים לב שאנו עוסקים בסיטואציה אסטרטגית. בניגוד לבעיית קבלת החלטות של פרט יחיד, הפעולה הרצויה של שחקן תלויה בפעולות שינקטו השחקנים האחרים המשתתפים בסיטואציה. בהתאם לכך, שיווי המשקל של נאש אינו מציע את הפעולה "הכי טובה": זהות הפעולה הטובה ביותר תלויה בפעולות השחקנים האחרים.

כעת נחשב את שיווי המשקל של נאש במשחק "דילמת הנוסע":

תפריט הפעולות לפיו שני השחקנים בוחרים 300 אינו נורמת התנהגות יציבה: אם אני אחד השחקנים ואני חושב שהאחר עומד לשחק 300, אז הפעולה 300 היא לא הפעולה הטובה ביותר עבורי, כי אם למשל אבחר ב-298 אז אקבל 303 וזה יותר טוב מאשר אם אבחר 300 כפי שמומלץ בתפריט. לכן, $(300, 300)$ אינו שיווי משקל.

התוצאה (298,299) גם היא אינה שווי משקל של נאש. שחקן 1, שמקבל את ההמלצה לבחור 298 אכן מבצע פעולה טובה ביותר בהינתן ששחקן 2 משחק לפי התפריט ובוחר 299, כי יקבל $298+5$, ובכל פעולה אחרת יקבל תשלום ממש יותר קטן מהתשלום שיקבל בסיטואציה זו. אך זה איננו שיווי משקל כיוון שמספיק שקיים שחקן אחד שיש לו סיבה לסטות מהנורמה ואמנם שחקן 2 עתיד לקבל 293 אם ישחק לפי התפריט, אך אם יבחר 297 יקבל 302.

(180,180) הוא שווי משקל. אם שחקן משחק לפי התפריט הוא מקבל 180 אך אם ייבחר בכל פעולה אחרת מול 180 של השחקן האחר הוא יקבל 175 ולכן אין לו רצון לסטות. יתרה מכך, זהו שווי משקל יחיד: אם שני השחקנים אומרים את אותו המספר שאינו 180, אז כל אחד ירצה לסטות למספר אחד כלפי מטה. אם שני השחקנים אינם נוקבים באותו מספר, אז השחקן שבוחר את המספר הגבוה ירצה לרדת למספר הנמוך ואף מתחת לו (אם יש אפשרות כזו). לכן נותרנו רק עם האפשרות לפיה שני השחקנים יציעו את אותו המספר שלא ניתן לרדת ממנו – כלומר (180,180).

קרב המינים – Battle of the Sexes

שני אנשים, "הוא" ו"היא", מאוד רוצים להיפגש בערב. שניהם דנו בבוקר היכן להיפגש, לא הגיעו להסכמה ונפרדו למשך היום. הם יכולים להיפגש בזירת האגרוף או במופע הבלט. הוא מעדיף אגרוף, היא מעדיפה בלט, ושניהם מעדיפים להיפגש על פני לא להיפגש כלל. היום הסתיים ואין באפשרותם לתקשר – כל אחד מהם צריך להחליט לאן לפנות.

נתרגם את הסיטואציה ל"משחק". נעשה זאת תוך שימוש בבי-מטריצה, כלי המסייע להצגה ולניתוח משחק.

השחקנים – 1=הוא ו-2=היא;

הפעולות האפשריות עבור כל שחקן – (א)אגרוף או (ב)לט;

האינטרסים מוצגים באמצעות המטריצה:

		2	
		א	ב
1	א	3 1	0 0
	ב	0 0	1 3

כל משבצת במטריצה מציינת תוצאה: שחקן השורות בוחר שורה (המתאימה לאחת משתי הפעולות) ושחקן העמודות בוחר עמודה (המתאימה לאחת משתי הפעולות שלו). בכל משבצת שני מספרים. השמאלי מתאים לתועלת (תשלום) של שחקן השורות והמספר הימני מתאים לתועלת של שחקן העמודות.

מהם שיווי המשקל האפשריים במשחק הזה?

התוצאה לפיה כל שחקן פונה למקום המועדף עליו אינה שווי משקל. אם הוא יודע שהיא עקשנית והולכת לבלט עדיף לו לפגוש אותה בבלט מאשר להתבודד בזירת האיגרוף. כנ"ל אם היא חושבת שהוא ילך לאיגרוף, עדיף לה לוותר וללכת לאיגרוף מאשר לפנות למופע הבלט.

התוצאה לפיה שני השחקנים מוותרים, גם היא איננה שווי משקל. אם הוא יודע שהיא תוותר ותלך לאיגרוף, עדיף לו לפגוש אותה באיגרוף מאשר לוותר וללכת לבלט.

למשחק שני שיווי משקל: (א,א) וגם (ב,ב). כלומר, אחד מוותר והאחר מתעקש.

עולה השאלה, כעת אם אני נתקל בסיטואציה כזו בחיים – מה עלי לעשות? לוותר או להתעקש? לא נלמד זאת מניתוח המשחק. כל שאנו מפיקים מהעיון עד עכשיו הוא ההבנה שאין פעולה רציונלית בפני עצמה. תועלתו של שחקן מפעולה תלויה במעשי השחקן האחר.

דילמת האסיר

שני אנשים עצורים לאחר שנתפסו רוכבים על אופנוע גנוב וחשודים בביצוע שוד בנק. הם נמצאים בחדרים נפרדים ובפני כל אחד עומדת האפשרות להודות או לא להודות בביצוע השוד. אם שניהם לא מודים, אז הם יועמדו לדין בגין גניבת אופנוע בלבד ויקבלו עונש של שנת מאסר אחת. אם אחד מהם מודה והאחר לא, אז זה שמודה יהפוך לעד מדינה ולא נכלא בעוד האסיר שלא-מודה מקבל עונש של עשר שנות מאסר. אם שני האסירים מודים בביצוע השוד אז כל אחד מקבל עונש מופחת מעט, של תשע שנים לכל אחד. נתרגם את הסיפור לשפת המשחק באמצעות שימוש במטריצת המשחק:

2

		מודה		לא מודה	
		1	1	10	0
1	מודה	1	1	10	0
	לא מודה	0	10	9	9

למספר התועלת יש כאן פשר ברור של מספר שנות הדרור (מתוך עשר השנים הבאות). נמצא את שיווי המשקל של המשחק:

(לא מודה, לא מודה) אינו שיווי משקל למרות שזו נראית התוצאה הסבירה "המועדפת" על שני השחקנים. לכל שחקן יש סיבה טובה לסטות מהנורמה ולזכות בשנת חופש נוספת.

גם התוצאות (לא מודה, מודה) ו-(מודה, לא מודה) אינן שיווי משקל.

שיווי המשקל היחיד הוא (מודה, מודה) כי אם האחר מודה אז כדאי לי להודות.

במשחק זה, "מודה" היא אסטרטגיה דומיננטית לכל אחד מהשחקנים – דומיננטית במובן שלא משנה מה השחקן האחר עושה, "להודות" היא הפעולה המיטבית. למשחק יש שווי משקל יחיד תקף במיוחד מכיוון שההגעה אליו אינה דורשת גיבוש אמונה על מה האחר עושה.