

משפט אי-האפשריות של Arrow: (עבור לפחות שלוש אלטרנטיבות) אם שיטה מקיימת את התכונות פרטו ו-IIA היא בהכרח שיטת הדיקטטור. כלומר, קיים פרט i מתוך הקבוצה שההעדפה החברתית היא ההעדפה שלו.

הוכחה: נניח שיש שיטה כלשהי המקיימת את פרטו ו-IIA.

שלב ראשון – ניקח אלטרנטיבה כלשהי b ונסתכל על פרופיל כלשהו בו כל פרט מדרג את b או במקום הגבוה ביותר או במקום הנמוך ביותר. נראה שבכל פרופיל שכזה, b תדורג במקום הראשון או האחרון בהעדפה החברתית.

1	2	3	...	88
b	b	d		b
	d	c	...	c
a	c	a	...	a
c			...	
d	a	b	...	d

נניח בשלילה שהטענה שגויה – כלומר, שיש פרופיל מסוג זה, ובו b לא מדורגת דירוג קיצוני בהעדפה החברתית: כלומר, יש שתי אלטרנטיבות אחרות ש- b מדורגת ביניהן - $a \succ b \succ c$. נסתכל על פרופיל חדש הנבנה מהפרופיל המקורי על ידי כך שעבור כל פרט שדירג את c מתחת ל- a , נתקן את דירוגו כך ש- c יופיע מיד מעל a (כל ההשוואות שבהן b מעורב אינן משתנות):

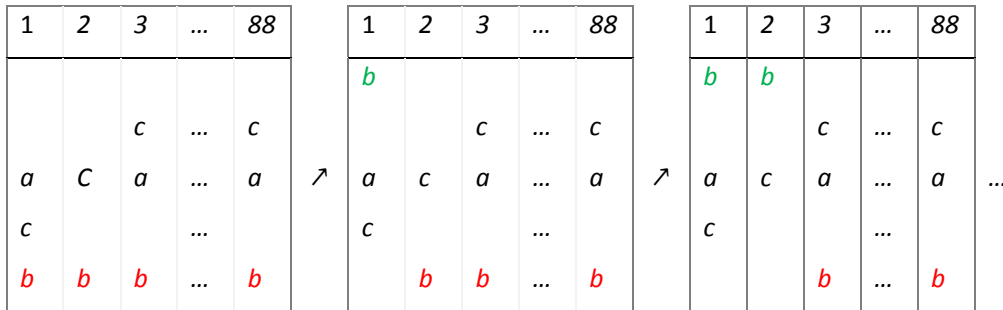
1	2	3	...	88
b	b			b
		a	...	c
a	c		...	a
c		c	...	
	a	b	...	

↗ ↗ ↗

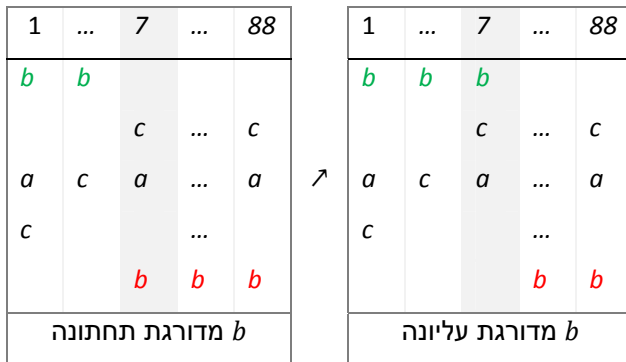
1	2	3	...	88
b	b	c		b
c		a	...	c
a	c		...	a
			...	
	a	b	...	

מכיוון שלא שינינו את הדירוג היחסי של אף פרט בין b ל- a ובין b ל- c (כי בדירוג קיצוני), אז לפי תכונת IIA בהעדפה החברתית b נשארת מדורגת מתחת ל- a ומעל ל- c , כלומר a מדורגת חברתית כטובה לפחות כמו c . אך מתכונת פרטו נקבל ש- c מדורגת בפרופיל החדש ממש מעל a – וקיבלנו סתירה. לכן, בכל פרופיל מסוג זה b מדורגת חברתית כאלטרנטיבה היחידה העדיפה ביותר או הנחותה ביותר.

שלב שני – ניקח פרופיל שבו b מדורגת תחתונה אצל כל הפרטים. מפרטו נובע שהחברה מדורגת את b בעדיפות האחרונה. נתחיל לשנות את הפרופיל כך שבכל שלב נקפיץ את b לעדיפות הראשונה אצל אחד הפרטים לפי הסדר:



מכיוון שאם היינו מקפיצים את b אצל כל הפרטים אז b הייתה עדיפה על a ברור שיש פרט, נקרא לו 7, כך שעד ההקפצה של b בהעדפה שלו, b הייתה נחותה ביותר חברתית ואחרי ההקפצה אצלו היא הפכה למועדפת ביותר חברתית.



מתוך שימוש ב- IIA נשים לב שזיהוי של 7 לא משנה מה דירוג ההעדפות של הפרטים לגבי יתר האלטרנטיבות. כלומר, גם כאשר עדיפויות הפרטים ביחס לאלטרנטיבות האחרות שונות, "השינוי הדרמטי" בהעדפה החברתית לגבי b יקרה אצל פרט 7.

שלב שלישי – נטען שבכל פרופיל העדפות כלשהו לגבי כל שתי אלטרנטיבות אחרות, אם פרט 7 מעדיף את a על פני c , אז ההעדפה החברתית מעדיפה את a על c (בלי כל קשר איך הפרטים האחרים מדרגים את a ו- c).

נתחיל בפרופיל שרירותי כלשהו ונסתכל על b . נסתכל על פרופיל אחר שבו עבור כל הפרטים 1 עד 6 נעלה את b לעדיפות הראשונה, לכל הפרטים 8 עד 88 נוריד את b לעדיפות האחרונה, ועבור פרט 7 נקבע את b להיות מדורגת בין a ל- c . בגלל IIA אף אחד מצעדים אלה לא משפיע על הדירוג החברתי של a ו- c כי שמרנו על היחס ביניהם אצל כל הפרטים:

1	...	7	...	88
<i>b</i>		<i>a</i>	...	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	...	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>b</i>		...	
		<i>b</i>	...	

→

1	...	7	...	88
<i>b</i>	<i>b</i>			
		<i>a</i>	...	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	...	<i>a</i>
		<i>c</i>		
<i>c</i>			...	
			<i>b</i>	<i>b</i>

מה תהיה ההעדפה החברתית בין b ל- c בפרופיל שהתקבל עתה (נקרא לו, הפרופיל הימני)?

אילו נשנה את הפרופיל הימני הזה לפרופיל אחר שבו b מדורגת במיקום הראשון גם אצל 7, אז החברה תדרג את b בעדיפות העליונה, לרבות מעל c . מהנחת ה- IIA , מכיוון שהדירוג היחסי בין b ל- c לא השתנה, נובע שגם בפרופיל הימני b מדורגת מעל c .

1	...	7	...	88
<i>b</i>	<i>b</i>			
		<i>a</i>	...	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	...	<i>a</i>
		<i>c</i>		
<i>c</i>			...	
			<i>b</i>	<i>b</i>

→

1	...	7	...	88
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>		
		<i>a</i>	...	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	...	<i>a</i>
		<i>c</i>		
<i>c</i>			...	
			<i>b</i>	<i>b</i>

בצורה דומה, נסתכל על הדירוג של b לעומת a , ונחליף את הפרופיל המטופל לפרופיל שבו b מדורגת בדירוג הנמוך ביותר אצל 7. ראינו בשלב הראשון שבמקרה כזה, b מדורגת אחרונה בהעדפה החברתית, לרבות מתחת ל- a . הדירוג היחסי בין a ל- b בשני הפרופילים לא השתנה ולכן מתוך IIA נסיק שבפרופיל הימני b מדורגת חברתית מתחת ל- a .

1	...	7	...	88
<i>b</i>	<i>b</i>			
		<i>a</i>	...	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	...	<i>a</i>
		<i>c</i>		
<i>c</i>			...	
			<i>b</i>	<i>b</i>

→

1	...	7	...	88
<i>b</i>	<i>b</i>			
		<i>a</i>	...	<i>C</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	...	<i>A</i>
		<i>c</i>		
<i>c</i>			...	
		<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>

כלומר, הוכחנו שלכל שתי אלטרנטיבות שאינן b , ההעדפה החברתית נקבעת לפי פרט 7.

שלב רביעי – נטען שבכל פרופיל העדפות, פרט 7 קובע את ההעדפה החברתית גם בהשוואה בין b ואפשרות אחרת a . נסתכל על אפשרות שלישית d , ובגלל IIA נוכל לשנות את מיקומה אצל כל אחד מהפרטים מבלי להשפיע על ההעדפה החברתית בין a ל- b .

1	...	7	...	88
	<i>d</i>			
	<i>b</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>d</i>		<i>a</i>
<i>b</i>				

→

1	...	7	...	88
		<i>b</i>	<i>b</i>	...
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>d</i>	<i>a</i>
<i>d</i>				

בהעדפותיו של 7, נשים את d בתוך. אצל כל האחרים נשים את d מתחת לשתי האלטרנטיבות b ו- a . מהצעד הקודם נובע שהחברה מעדיפה את d על פני a . מפרטו נובע שהחברה מעדיפה את b על- d . ולכן החברה מעדיפה את b על פני a .

לסיכום, הגענו למסקנה ששיטה המקיימת את תכונות פרטו ו- A חייבת להיות כזו שבה יש איזשהו פרט (אנחנו קראנו לו 7), שההעדפה החברתית זהה להעדפותיו.