

תזכורת: מטרתנו היא להבהיר את המושג של רצון הקבוצה. במסגרת בה אנו עוסקים יש קבוצת פרטים ולכל אחד מהם העדפות (דירוג) על קבוצת אלטרנטיבות נתונה. אנו מחפשים שיטת אגרגציה (צירוף) של העדפות הפרטים לכדי העדפה חברתית. כלומר, השיטה אמורה להצמיד העדפה חברתית לכל קונפיגורציה אפשרית של העדפות הפרטים.

בסיום השיעור הקודם הצעתם שיטות שונות כיצד לצרף רצונות להעדפה חברתית: כלל בורדה, דיקטטור, אנטי-דיקטטור וכד'. לשם העשרת הדיון נציג כעת שיטה נוספת: השיטה תבוסס על מזעור ממוצע ה"מרחק" בין העדפות הפרטים להעדפה החברתית. ראשית עלינו להגדיר מרחק בין העדפות. למשל אם ההעדפות של פרט 7 הן $a >_7 b >_7 c >_7 d$ וההעדפה החברתית היא $b > a > c > d$ אז יש לנו תחושה שההעדפות החברתיות די קרובות לשל פרט 7. לעומת זאת, אם ההעדפות של פרט 9 הן $a >_9 b >_9 c >_9 d$, אז ההעדפה החברתית רחוקה ביותר מהעדפותיו של הפרט. דרך אחת להגדיר את המרחק בצורה ש"תתפוס את תחושתנו" זו היא לספור עבור כל פרט את מספר הזוגות של אפשרויות שעבורם ההעדפה החברתית הפוכה משלו. כך למשל, פרט 7 נמצא במרחק 1 מההעדפה החברתית (רק ההעדפה בין a ל- b התהפכה) ואילו פרט 9 נמצא במרחק 6 מההעדפה החברתית (כי ההעדפות לגבי כל הזוגות התהפכו). כעת נסקור את כל ההעדפות החברתיות האפשריות, ועבור כל אחת מהן נחשב את המרחק של כל פרט מההעדפה החברתית. השיטה תבחר את ההעדפה החברתית שבה ממוצע המרחק של הפרטים מההעדפה החברתית הוא הנמוך ביותר. זו שיטה מעניינת אך מסובכת לחישוב.

כיצד נמשיך? אנו מכירים בכך שיש עושר גדול מאוד של שיטות אפשריות, אך לא הצענו עד כה דרך לשפוט ביניהן. בשיעור זה נעשה זאת על ידי הגדרת תכונות של שיטות שאנו מעריכים כמתקבלת על הדעת. רעיונות שהועלו בכיתה:

- **ניטרליות** – "שוויון בסיסי בין האלטרנטיבות". כלומר, שיטת ההעדפה מתייחסת לאלטרנטיבות בלי להיות מושפעת מתוכנן. (לדוגמה, התבונן בשיטת ההכרעה בחבר מושבעים שנדרש להחליט בין זכאי או אשם בו נדרשים 9 מ-12 מושבעים כדי להרשיע). שתי האפשרויות אינן זוכות ליחס שווה. אם 8 מושבעים יבחרו לזכות ו-4 מושבעים להרשיע, הנאשם יימצא זכאי, אך אם 8 יאשימו ו-4 יזכו ההכרעה החברתית לא תתהפך וגם אז הנאשם יימצא זכאי.)
- **אנונימיות** – שוויון בסיסי בין הפרטים. כלומר, אם פרטים מחליפים את ההעדפות ביניהם, ההעדפה החברתית לא תשתנה.
- **מונוטוניות** – אם לפי פרופיל העדפות מסוים החברה מעדיפה את a על b ואחד הפרטים קידם את a בהעדפותיו, אז לא ייתכן ש- a תרד בדירוגה מתחת ל- b .

- **קשה/לא-ניתנת למניפולציה** – באיזשהו מובן (לא נגדיר באופן מדויק) נרצה שלפרטים לא יהיה כדאי לדווח על העדפות אחרות מהאמת כדי לקדם את העדפותיהם האמתיות בהעדפה החברתית.
- **סיבוכיות** – במובן ה"חישובי" ייתכן ונרצה שתוצאת השיטה תהיה פשוטה לחישוב. למשל, שיטת הדיקטטור היא מאוד פשוטה לחישוב ואילו שיטת מזעור המרחקים היא יחסית מסובכת.

נדון כעת בשתי תכונות נוספות:

תכונת פרטו: אם כל הפרטים דירגו את x מעל y , אז השיטה תוביל לכך שבהעדפה החברתית x ידורג מעל y . זו תכונה מאוד מתקבלת על הדעת, שהרי יראה לנו מוזר שאם יש אחדות דעים לגבי איזו אפשרות עדיפה, ההעדפה החברתית תהיה אחרת.

שיטת הדיקטטור מקיימת תכונה זו, כי אם כל הפרטים מעדיפים את x על y , אז בפרט גם הדיקטטור מעדיף את x על y ולכן ההעדפה החברתית תדרג את x מעל y . שיטת בורדה תקיים תכונה זו אם כל הנקודות שמקבלות האפשרויות השונות בדירוג הפרטים הן חיוביות ועולות ממש (כלומר אם אפשרות מדורגת גבוה יותר היא מקבלת יותר נקודות). האנטי דיקטטור אינו מקיים את תכונת פרטו.

תכונת אי-תלות באלטרנטיבות לא רלבנטיות (*IIA – Independence of Irrelevant Alternatives*): לגבי כל שתי אלטרנטיבות a ו- b , הדירוג החברתי של שתי אלטרנטיבות אלו מושפע רק מהדירוג היחסי של a ו- b של הפרטים. במילים אחרות, כדי לקבוע את ההעדפה החברתית לגבי a ו- b לא חשוב מהן העדפות הפרטים בנוגע להשוואת בין c ו- d או בין a או b עם c .

כלומר, נניח שחלק מהפרטים מעדיפים את a על b וחלק את b על a (ויש גם אלטרנטיבה c), ונניח שהחברה מעדיפה את a על b . התכונה אומרת שאם c ו- b התחלפו בדירוג אצל אחד הפרטים אך a ו- b שמרו על דירוגם היחסי, אז ההעדפה החברתית תמשיך להעדיף את a על b .

שיטת הדיקטטור מקיימת תכונה זו, כי ההעדפה החברתית בין a ל- b נקבעת לפי הדירוג היחסי של הדיקטטור את a ו- b בלבד.

שיטת בורדה לא מקיימת תכונה זו. למשל, נתבונן באילוסטרציה הבאה, שבה אם פרופיל ההעדפות הוא השמאלי אז b תדורג מעל a בהעדפה החברתית אך בפרופיל הימני a תדורג מעל b בהעדפה החברתית, כאשר כל מה שהשתנה בין הפרופילים הם הדירוגים בין אלטרנטיבות אחרות, אך לא בין a ל- b .

דוגמה לניקוד בורדה	פרופיל שמאל	פרופיל ימין
12	$b : : :$	$: : : :$
10	$: : : :$	$: : : :$
8	$: a a a$	$: a a a$
6	$: b b b$	$: b b b$
4	$: : : :$	$: : : :$
2	$: : : :$	$b : : :$
1	$a : : :$	$a : : :$

עקרון הרוב (אם מאפייני הבעיה יאפשרו שעקרון הרוב יעבוד כשיטה) יקיים את תכונה זו, כיוון שההעדפה החברתית תלויה אך ורק בדירוג היחסי של זוג האלטרנטיבות.

משפט אי-האפשריות של Arrow: (עבור לפחות שלוש אלטרנטיבות) אם שיטה מקיימת את התכונות פרטו ו- $A//$ היא בהכרח שיטת הדיקטטור. כלומר, קיים פרט i מתוך הקבוצה שההעדפה החברתית היא ההעדפה שלו.

המשפט הזה מאוד פשוט ואטרקטיבי בניסוחו. אך לעיתים הוא מעורר פרשנויות לא טובות, כמו למשל המסקנה המוזרה שלפיה דמוקרטיה איננה אפשרית. כל מה שהמשפט אומר הוא ששיטה לצרוף העדפות הפרטים שאינה דיקטטורית, צריכה להיות מורכבת במובן שהשוואה בין שתי אלטרנטיבות צריכה להיעשות לא רק על סמך העדפות הפרטים על שתי האלטרנטיבות. שיטת בורדה (עם משקלות אלו או אחרים) היא שיטה מורכבת שכזו. בניסוח מעט אחר, המשפט אכן אומר שאין שיטה מאוד פשוטה שמאפשרת רק על פי ההעדפות היחסיות לקבוע את ההעדפה החברתית כך שתקיים את תכונת פרטו.

את המשפט נוכיח בשיעור הבא.