

עד כה במודלים/סיפורים היו בתים ופרטים. לפרטים היה יחס העדפה על הבתים ומן הסתם לבתים לא היה יחס העדפה על הפרטים. אבל, יש סיטואציות שבהן לשני הצדדים יש העדפות. בעיית השדכן מתארת סיטואציה שכזו. נסתכל על סיפור שבו,

יש k גברים - m_1, \dots, m_k

ויש k נשים - w_1, \dots, w_k

לכל גבר יש יחס העדפה חזק על הנשים (ומעדיף כל אישה על פני להיות לבד), ולכל אישה יש יחס העדפה חזק על קבוצת הגברים (וכל גבר עדיף על פני להיות לבד).

אנחנו רוצים שסופו של הסיפור יהיה שידוך של כל המשתתפים לזוגות של גבר ואישה. כלומר, ליצור התאמה חד-חד-ערכית בין הגברים לנשים.

כאשר אנו יודעים מהו סופו הרצוי של הסיפור, ננסה לחשוב על דרך שתוביל אותנו אליו. אפשרויות פעולה ושיקולים שונים הוצעו בשיעור כאשר חשבנו כאילו אנו השדכנים / מעצבים-חברתיים:

- נרצה לשדך את בני הזוג כך שאף אחד לא יקבל את העדיפות האחרונה שלו. לא הוצעה דרך סדורה שמובילה לתוצאה זו, אבל הועלה שיקול לפיו ננסה להימנע מזיווגים גרועים במיוחד.
- להעשיר את המודל באינפורמציה נוספת שתאפשר לסדר את הנשים בצורה שתפתור ניגודי אינטרסים. גם כאן, אין מדובר בתהליך סדור וסגור, אלא בגישה.
- להתעלם מהעדפות הבנים והבנות, ולשדך לפי ידע חיצוני. זו כמובן דרך אפשרית שתוכל להוביל להרבה זיווגים, והיא אף נהוגה בחברות מסוימות. עם זאת, בסיפור שלנו אין מידע נוסף שעוזר לבצע שידוכים מסוג זה (מה ההורים של הגברים והנשים עושים, מה רכושם, נדונית וכד') וננסה לחשוב על שיטות שנשענות על העדפות הפרטים.
- דיקטטור/ית סדרתית/ת - להגריל את אחד הפרטים (גבר או אישה) ולתת לו/לה לבחור את הזיווג המועדף עליו. כעת נוציא את בני הזוג מהתהליך ונמשיך עם הנותרים. תהליך זה מוביל לשידוך, שכן אחרי k פעמים כולם יהיו מזווגים. יתרונו הוא שכשאנו חושבים על התהליך מראש, לפני שהחל (בלטינית - *ex-ante*), יש בו תחושה של הוגנות. חסרונו הוא שלאחר תום השידוכים (בלטינית *ex-post*) ייתכן שהשידוך עצמו יהיה לא הוגן כי יהיו בני זוג שירצו להחליף את זיווגם.
- ליצור לכל זוג אפשרי ציון לפי ההעדפות של בני הזוג - זוג אידיאלי הוא כזה שבו כל אחד מבני הזוג הוא העדיפות הראשונה של בן הזוג האחר, נסמנו באמצעות (1,1). זוג פחות טוב הוא כאשר, למשל, הגבר הוא עדיפות ראשונה של האישה, והאישה עדיפות שנייה של הגבר (1,2). הרעיון הוא ליצור סדר מוגדר מראש בין כל הזוגות האפשריים עוד טרם השידוך

(נצטרך להחליט למשל איזה זיווג ראוי לציון גבוה יותר (1,4) או (2,2), אבל כל עוד הכל יוגדר לא תהיה בעיה). כעת, לשם ביצוע תהליך השידוכים עצמו נתחיל בזוג שיקבל את הציון הכי גבוה ונשדך אותו, ואז נבחר את הגבוה מהנותרים וכן הלאה. גם תהליך זה יסתיים בשידוך והוא נשען על קריטריונים הנבעים מהעדפות הפרטים בלבד.

- להצמיד לכל עדיפות של כל אחד מהמינים ערך. למשל, אם בן משודך לעדיפות הראשונה שלו הערך יהיה 10, אם לשנייה 8, וכן הלאה. בצורה דומה, נאמר שאם בת משודכת לעדיפות הראשונה שלה הערך יהיה 17 אם לשנייה הערך הוא 5 וכן הלאה. ערכו של שידוך יהיה סכום הערכים הללו. למשל, אם בשידוך מסוים זוג אחד הוא העדיפות הראשונה של האחר, ובזוג שני בני הזוג הם העדיפות השנייה של האחר, אז ערך השידוך יהיה $40 = (8 + 5) + (10 + 17)$. כעת ניתן למחשב לעבור על כל השידוכים האפשריים ולחשב לכל אחד את ערכו. לבסוף, נבחר שידוך שערכו הוא גבוה ביותר.

אלגוריתם Gale-Shapley

אלגוריתם Gale-Shapley (GS להלן) מהווה שיטה מובטחת למציאת שידוך יחיד מכל פרופיל העדפות. נתארו בצורה ציורית ומטאפורית: הבנות יושבות בבית ומחכות לחיזורי הבנים. ביום הראשון, כל בן הולך לחזר אחר הבת המועדפת עליו ביותר. בצהריים הבנות מתעוררות ורואות מי בא לחזר אחריהן. אם מגיע בן אחד, הבת נשארת איתו. אם מגיע יותר ממחזר אחד הבת בוחרת בבחור שהיא מעדיפה ביותר מבין המחזרים. לכן, בסוף היום תהיה קבוצה של בנות שבחרו בבנים (כל הבנות שהגיע אליהן מחזר), וקבוצה של בנים שגורשו הביתה. בכל יום אחר, החל מהיום השני, רק הבנים חסרי השידוך מהיום הקודם משתתפים בחיפוש. כל בן חסר שידוך הולך בבוקר אל הבת שהוא מעדיף ביותר מתוך קבוצת הבנות שלא דחו אותו עד כה. בצהרי היום הבנות מתעוררות עם מי שבחרו ביום הקודם ועם המחזרים החדשים ובחרות את המועדף עליהן מבין (כלומר, הבן שנבחר אתמול או שלשום יכול להיות מסולק היום). וכך הלאה, יום אחרי יום. אם בבוקר אחד הימים אין אף בן דחוי, האלגוריתם מסתיים.

התהליך של GS מזכיר תהליכים יחסית טבעיים, והוא נשמע סביר ולכן הוא נתפס בעינינו כסיפור מעניין. מיד בהמשך נראה שהתהליך מסתיים בשידוך ושהשידוך מקיים תכונה רצויה של "יציבות".

לשם המחשה של האלגוריתם נסתכל על דירוגי גברים ונשים שמתוארים בטבלה הבאה:

דרוג הגברים				אישה	דירוג הנשים				גבר
4	3	2	1		4	3	2	1	
M4	M2	M1	M3	W1	W3	W2	W4	W1	M1
M1	M4	M2	M3	W2	W4	W1	W3	W2	M2
M1	M2	M3	M4	W3	W1	W3	W2	W4	M3
M2	M3	M4	M1	W4	W2	W1	W3	W4	M4

נדגים את האלגוריתם של GS על ההעדפות המתוארות בטבלה. בתרשימים שיופיעו להלן חץ מסמל שהגבר פונה לאישה בתחילת השלב, חץ מקווקו מסמל שהאישה דוחה את הגבר בתום אותו השלב:

שלב 1 (מאורעות היום הראשון):

כל אחד מהבנים פונה לאישה המועדפת עליו ביותר.

W1	←	_____	M1
W2	←	_____	M2
W3			M3
W4	←	_____	M4

(Note: A dashed arrow points from M3 to W4 in the original image.)

W1 ו- W2 קיבלו רק פניה אחת ולכן הן יישארו עם הגברים שפנו אליהן בלית ברירה (M1 ו- M2 בהתאמה). W4 קיבלה 2 פניות (M3 ו- M4) והיא תבחר לבן-זוג את המועדף עליה מבין השניים (M4).

שלב 2:

M3 נדחה בסיבוב 1 (ונותר ללא בת זוג), לכן הוא יפנה אל האישה המועדפת עליו ביותר מבין הנשים שלא דחו אותו (W2).

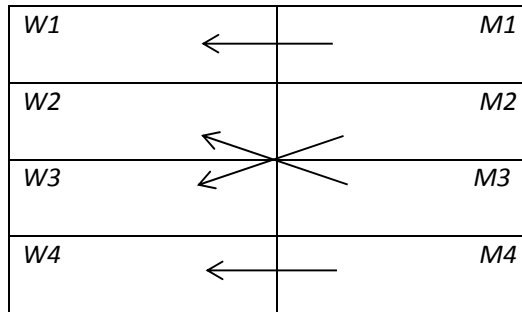
W1	←	_____	M1
W2	←	_____	M2
W3			M3
W4	←	_____	M4

(Note: A dashed arrow points from M3 to W2 in the original image.)

W2 עומדת עתה בפני שני מחזרים (M2 ו-M3) היא תבחר את המועדף עליה מבין השניים (M3).

שלב 3:

כעת M2 הוא הדחוי. M2 יפנה אל המועדפת עליו ביותר מבין הנשים שלא דחו אותו (W3). בשלב זה כל אישה מקבלת פנייה יחידה, ולכן הפונה יהיה בן-זוגה לשלב זה. בסוף השלב לכל הנשים יש בן-זוג, ולכן האלגוריתם ייעצר, והזוגות שנוצרו יהיו תוצאות אלגוריתם השידוך על חברה זו.

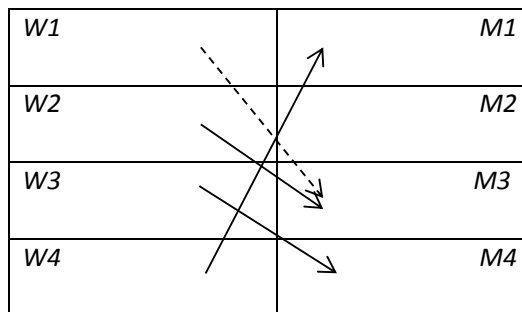


באלגוריתם GS הצדדים אינם סימטריים. הבנים הם הצד המציע, והבנות הצד המגיב. אם נחליף את התפקידים, השידוך שיתקבל בדרך כלל יהיה שונה ובהמשך נוכיח על כך תכונה מעניינת. יש אמנם מקרים (פרופילי העדפות מסוימים) שבהם שתי הדרכים יובילו לאותו השידוך, למשל במקרה זה.

כעת נפעיל את אלגוריתם GS כאשר הבנות הן הצד המציע:

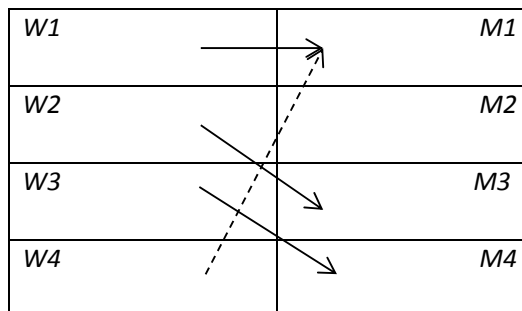
שלב 1:

W1 תפנה ל-M3, W2 תפנה ל-M3, W3 תפנה ל-M4 ו-W4 תחזר אחרי M1. ל-M3 יש שתי מחזרות ומתוכן הוא מעדיף את W2 ולכן W1 נדחית.



שלב 2:

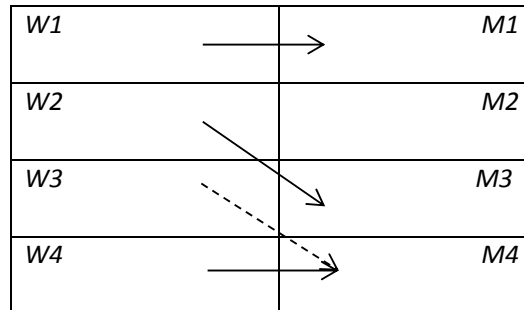
כעת W1 דחויה, והיא תפנה לגבר הבא בהעדפותיה שטרם דחה את חיזוריה – M1.



M1 מעדיף את W1 ולכן דוחה את W4.

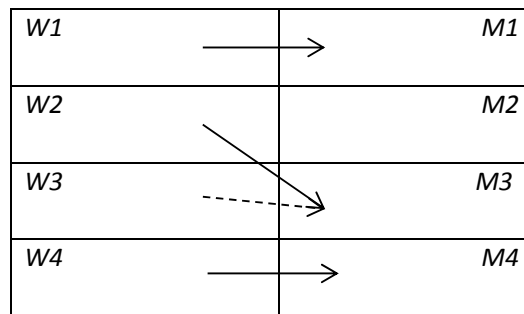
שלב 3:

W4 פונה ל-M4. M4 בוחר ב-W4 על פני W3.



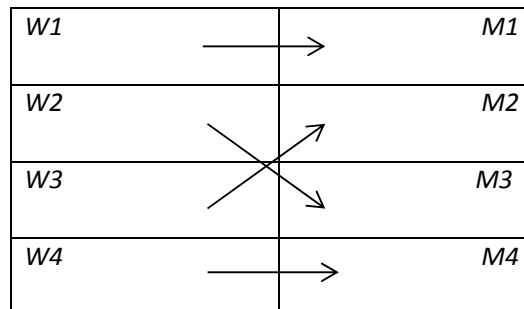
שלב 4:

W3 פונה ל-M3. אך M3 מעדיף את W2 על פניה והיא נדחית בשנית.



שלב 5:

W3 פונה ל-M2. כעת לכל גבר יש מחזרת אחת בדיוק והאלגוריתם מסתיים בשידוך.



כפי שטענו קודם, במקרה הספציפי הזה קיבלנו את אותו השידוך כשהצד המציע היה הגברים וכשהצד המציע היה הנשים. נראה שהמצב לא בהכרח כזה: למשל נניח שיש שני בנים ושתי בנות ופרופיל ההעדפות הוא כזה ש-M1 מעדיף ביותר את W1 ו-M2 מעדיף ביותר את W2, אבל W1 מעדיפה הכי פחות את M1 ו-W2 מעדיפה הכי פחות את M2. אם הגברים הם הצד המציע, אז השידוך שיתקבל הוא ש-M1 עם W1 ו-M2 עם W2. לעומת זאת, אם הנשים הן הצד המציע אז השידוך יהיה ש-M1 עם W2 ו-M2 עם W1. כלומר, השידוכים הסופיים שונים, ותלויים במי הצד המציע ומי הצד הנייח.

טענה: תהליך GS תמיד מוביל לשידוך

הדבר הראשון שנשאל את עצמנו היא האם התהליך GS מביא לסיום רצוי. נפרק את השאלה לשני מרכיבים: (1) האם התהליך מסתיים? (2) אם הוא כן מסתיים, האם הוא מסתיים בשידוך?

המרכיב השני חשוב כי אולי ייתכן שהאלגוריתם יסתיים כי כל הגברים נדחו מכל הנשים ולא יהיה שידוך.

הוכחה:

(1) אם בשלב מסוים אף גבר לא נדחה, אז התהליך מסתיים. אם בשלב מסוים יש גבר שנדחה, אז בשלב הבא הוא יחזר אחרי מישהי שדירוגה עברו נמוך יותר. מכיוון שיש מספר סופי של דחיות אפשריות (אישה יכולה לדחות לכל היותר את כל הגברים פרט לאחד) ומספר סופי של נשים, יש מספר סופי של שלבים, ולכן התהליך בהכרח יסתיים.

(2) כשהתהליך מסתיים אין אף גבר ללא שידוך: נניח שיש גבר שנדחה על ידי כל הנשים. נבחין בכך שאם אישה דחתה מישהו משמע שהיא בחרה מישהו אחר על פניו. כלומר, כאשר אישה דוחה מישהו היא לא נותרת לבד מאותו שלב ואילך. לכן, אם הגבר נדחה מכל הנשים, משמע שכל הנשים תפוסות. אבל מספר הגברים והנשים זהה ולכן סיטואציה כזו לא תתכן. כלומר, אין אף גבר שנותר ללא שידוך.

לכן, התהליך מסתיים ומסתיים בשידוך הגברים והנשים.

תכונת היציבות

מתי הקצאה (שידוך) תהיה "שיווי משקל"? מתי הקצאה תהיה יציבה או לא יציבה?

הקצאה אינה יציבה אם יש גבר ואישה שמעדיפים להיות זה עם זה מאשר עם השידוך הנוכחי שלהם. לחילופין, הקצאה היא יציבה אם אין אף זוג של גבר ואישה שמעדיפים להיות זה עם זה מאשר עם השידוך הנוכחי.

יציבות היא תכונה מעניינת. אם שידוך אינו יציב, אז יש פתח ל"תלונות". בני זוג יאמרו "למה אני איתו והוא איתה, כששנינו מעדיפים להיות זה עם זה?" אם נחשוב על שידוך של מתמחים ברפואה לבתי חולים, אז מתמחה ובית חולים יכולים לפנות למשרד הבריאות ולהתלונן שכל אחד מהם מעדיף את האחר, ולטעון שהסידור שיצר המשרד הבריאות איננו הגיוני. ב"חיים", בשביל ששידוך יהיה לא יציב, אז צריך שאפשר יהיה לגלות שיש מישהו אחר מועדף ושמעדיף אותך, וגם שיהיה אפשר לשבור את השידוך אחרי התגלית הזו. לא תמיד תנאים אלה מתקיימים, ואז התכונה פחות מעניינת.

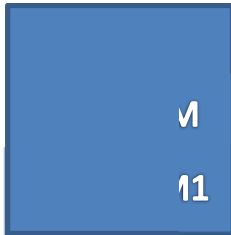
טענה: אלגוריתם GS מוביל להקצאה יציבה

הוכחה: סתירה ליציבות תהיה אם נוכל למצוא איזשהו מספר של בנים ובנות, ופרופיל העדפות, שלפיו התהליך מוביל לתוצאה אך היא אינה יציבה. נניח שהקצאה מתקבלת מ-GS. ונאמר ש- m_1 משודך ל- w_1 , m_2 משודך ל- w_2 וכך הלאה. בלי הגבלת הכלליות, נבדוק האם ייתכן ש- m_1 מעדיף את w_2 על פני w_1 , ו- w_2 מעדיפה את m_1 על פני m_2 . לפי האלגוריתם, אם m_1 מעדיף את w_2 וזה השידוך שהתקבל משמע ש- m_1 חזר אחרי w_2 אך לא נשאר אצלה. כלומר, ש- w_2 דחתה אותו. אבל w_2 דחתה אותו כי היה לה מחזר שהיא העדיפה על פניו. למעשה, בכל פעם שאשה דוחה גבר, היא נותרת עם גבר שהיא מעדיפה יותר ממי שדחתה. לכן, היא מעדיפה את m_2 על פני m_1 . כלומר, לא נמצא זוג של גבר ואישה שמעדיפים להיות זה עם זה.

התהליך עובד כך שהבנים והבנות שולחים את ההעדפות שלהם והמחשב מוצא את השידוך. אבל אולי ייתכן שלאחד הפרטים כדאי לדווח על העדפות שונות. ואכן, התהליך של GS ניתן למניפולציה, ונראה דוגמה כזו בתרגיל.

משפט: תהליך GS מוביל לשידוך היציב הטוב ביותר (במובן החלש, כלומר, שאין טוב ממנו) מבחינת הצד המציע (הגברים) מתוך כל התוצאות היציבות.

הוכחה: נקרא להקצאה המתקבלת מהתהליך GS. נניח בשלילה שיש הקצאה יציבה ST שבה אחד הגברים משודך למישהי שהוא מעדיף על פני השידוך שלו ב-GS. משמע שבהכרח בתהליך GS הוא



חזר אחר האישה הזו אך נדחה בשלב מסוים. מתוך כל הגברים שמשודכים למישהי שהם מעדיפים ב-ST על פני השידוך שלהם ב-GS, נסתכל על גבר שנדחה בשלב הקודם ביותר ב-GS על ידי האישה אליה משודך ב-ST. נקרא לו m ונסמן את זוגתו ב-ST (שדחתה אותו ב-GS) בתור w . ב-GS w דחתה את m לטובת m_1 . משמע ש- w מעדיפה את m_1 על פני m . כעת, נסמן את השידוך של m_1 ב-ST בתור w_1 . את מי m_1 מעדיף מבין השתיים? אם הוא

מעדיף את w_1 על פני w משמע שב-GS הוא ביקר את w_1 קודם ונדחה על ידה לפני שפנה ל- w (וזכה בליבה כאשר התמודד עליה עם m). אך מכיוון שבחרנו את m כך שהוא הגבר הראשון שנדחה ב-GS על ידי שידוכו ב-ST, לא ייתכן שב-GS m_1 פנה ל- w_1 ונדחה לפני שפנה ל- w . כלומר, ב-GS m_1 פנה ל- w מבלי שפנה ל- w_1 לפני כן. משמע ש- m_1 מעדיף את w על פני w_1 . הגענו לסתירה ליציבות של ST, כיוון שב-ST יש שני פרטים, w ו- m_1 , שמעדיפים להיות זה עם זה מאשר עם שידוכם הנוכחי. לכן, לא ייתכן שיש שידוך יציב שונה מ-GS שבו אחד הגברים משודך למישהי שהוא מעדיף על פני שידוכו ב-GS.