אגדות כלכליות/אריאל רובינשטיין/תשע"ג

סיכום שיעור 4, 12 בנובמבר 2012: המשך שיווי המשקל של השוק

<u>טענה</u>: כל ש"מ של השוק הוא יעיל פארטו

משמעות הטענה היא שאם הגענו לש"מ של השוק, לא ניתן יהיה למצוא קבוצה של פרטים שירצו להחליף בתים בינם לבין עצמם (אנו מתבססים על השקילות שהראנו בתרגיל מספר 1 בין קיום קבוצת פרטים שכזו להגדרת הקצאה לא יעילה).

<u>הוכחה</u>: נניח שהגענו להקצאת שיווי משקל של השוק $a_1, a_2, \dots, a_n$ (פרט i מקבל את בית a_i) מההקצאה ההתחלתית $e_1, e_2, \dots, e_n$ (פרט i היה בעליו של e_i). נסמן ב- $p(e_i)$ את המחיר בשיווי המשקל של בית e_i. המשמעות שמדובר בהקצאת שיווי משקל של השוק, היא שלכל פרט i הבית a_i עדיף מבחינתו על כל הבתים שמחירם קטן או שווה ל-$p(e_i)$.

נניח בשלילה[1] ש-a אינה יעילה פרטו. כלומר, קיימת הקצאה אחרת $b_1, b_2, \dots, b_n$ כך שכל פרט מקבל בית טוב לפחות כמו בהקצאה a, ולפחות אחד הפרטים מעדיף ממש את הבית ב-b על פני הבית שמקבל ב-a. נסתכל על פרט i שמקבל בית אחר בהקצאות השונות $b_i \neq a_i$, ולפי ההנחה מתקיים $b_i \succ_i a_i$. לכן בהכרח $p(b_i) > p(a_i)$, כי אחרת, אם i יכול היה להרשות לעצמו את a_i אז היה יכול גם לרכוש את הסל העדיף מבחינתו b_i ו-a לא הייתה הקצאת ש"מ. אם פרט מקבל את אותו הבית, משמע ש- $p(b_i) = p(a_i)$. כעת נסכם את מחירי כל הבתים ב-a ונסכם את מחירי כל הבתים ב-b ונקבל אי-שוויון:

$$p(b_1) + \cdots + p(b_n) > p(a_1) + \cdots + p(a_n),$$

אך מדובר על סכום המחירים של כל הבתים בשוק ולכן חייב להיות ש-

$$p(b_1) + \cdots + p(b_n) = p(a_1) + \cdots + p(a_n).$$

משמע, ההנחה שגויה ואין הקצאה b שכזו. כלומר, הקצאת בשיווי משקל של השוק, יעילה פארטו.

<u>טענה</u>: הקצאת שיווי המשקל של השוק היא יחידה

יחידות מעניינת אותנו בכלכלה כי אם הוכחנו שסוף הסיפור הוא יחיד אז פרושו שתחילת הסיפור מובילה לסופו באופן מחייב. בתנאים אלה, אם אנחנו מאמינים במודל כתיאור טוב של המציאות, אז המודל מספק ניבוי מדויק לתוצאת הסיטואציה.

[1] הוכחה בשלילה – שיטת הוכחה שבה ההנחה תוביל לסתירה ולכן נסיק שההנחה בהכרח שגויה.

נניח בשלילה שבהנתן אותם פרמטרים - פרטים, בתים, העדפות *חזקות* והקצאה התחלתית $(e_1, \ldots, e_n)$, יש שתי הקצאות שונות שמהוות שיווי משקל של השוק – a ו-b. נניח שהמחירים במקרה הראשון הם $p(e_i)$ ובשני הם $q(e_i)$. נסתכל על המחירים בהקצאה הראשונה, ונבחר את הפרטים שבתיהם בעלי המחיר הגבוה ביותר (כאלה בהכרח קיימים כיוון שהקבוצה סופית, וראינו בשיעור הקודם שמחירי הבתים שווים בקרב אלו שמחליפים את בתיהם בינם לבין עצמם) – לשם המחשה, נאמר שאלה הפרטים 1, 3 ו-5. פרטים אלה מהווים מעגל מסחר, ומכיוון שהם הכי עשירים משמע שכל אחד מהם רוצה ביותר את הבית של האחר מבין כל הבתים הקיימים בשוק. כעת נסתכל על אותם הפרטים (1, 3 ו-5) בשיווי המשקל האחר. מתוך הפרטים האלה (1,3,5) בלבד, נסתכל על אחד הפרטים שערך הבית בבעלותו ההתחלתית גדול ביותר במערכת המחירים q. נאמר שזהו 1, כלומר $q(e_1) \geq q(e_3)$ ו-$q(e_1) \geq q(e_5)$. מכיוון ש-1 הוא העשיר ביותר במערכת המחירים זו מבין חברי הקבוצה, משמע שהוא יכול לרכוש את הבית של 3 (אותו רכש במערכת המחירים p). מכיוון שב-p הוא היה העשיר ביותר, משמע שהבית של 3 הוא הבית שהוא מעדיף מתוך כל הבתים כולם. לכן, הוא בהכרח ירצה לרכוש את הבית של 3 גם מבין קבוצת הבתים שיכול להרשות לעצמו במערכת המחירים q. מכיוון שהנחנו שגם b הקצאת שיווי משקל, אז גם ביתו של 3 שווה כמו של 1, ולכן גם של 5 שווה כמו של 3. מכאן שגם במערכת המחירים q יתבצע מעגל מסחר, דהיינו שלשת פרטים אלה מקבלים בשני שויי המשקל את אותו בית.

עד כה ראינו שמעגל המסחר הגבוה ביותר ב-a קיים גם ב-b. נראה שאם נמחק מרשימות הפרטים והבתים את מעגל מסחר נשאר עם הקצאת שיווי משקל בשוק בלי הפרטים שמשתתפים במעגל זה ובלי בתיהם הראשוניים: אם לפני המחיקה כל פרט שנותר בחר את הטוב ביותר שיכול להרשות לעצמו, השמטת הבתים שלא בחר בהם לא משפיעה על בחירתו. נמשיך עתה עם פחות פרטים ופחות בתים...

ההוכחה המלאה הינה באינדוקציה. אם מספר הפרטים הוא 1, אז ברור שיש שווי משקל יחיד של השוק. (הסבר למה). זה עתה הראנו שאם הטענה נכונה בשוק עם *n-1* פרטים אז היא נכונה גם לשוק עם n פרטים.