אגדות כלכליות/אריאל רובינשטיין/תשע"ג

סיכום שיעור 2, 29 בנובמבר 2012: שיווי המשקל של הג'ונגל

תזכורת: בסיפור שלנו הגיבורים הם פרטים ובתים, שמספרם זהה. לכל פרט יש יחס העדפה על הבתים שמגדיר לגבי כל הבתים את דירוג העדפותיו באופן מוחלט. אם פרט 1 מעדיף את בית A על פני בית B נסמן זאת כך: $A \succ_1 B$

הקצאה היא פונקצייה חד-חד-ערכית ועל בין הפרטים לבתים. המשוואה $a(i) = h$ מתארת שפרט i מקבל בהקצאה a את בית h. לעיתים נסמן a_i בתור הבית שמקבל i בהקצאה a.

בטבלה הבאה מופיעה דוגמה של דירוג בתים (D,C,B,A) של הפרטים (1,2,3,4). הקצאה אפשרית מסומנת בטבלה בצהוב (תא שמסומן בצהוב משמעו שהבית שרשום בתא מוקצה לפרט ששמו מופיע בכותרת העמודה).

1	2	3	4
A	B	B	B
B	C	A	C
C	D	C	A
D	A	D	D

הקצאה יעילה פרטו: a היא הקצאה יעילה פרטו אם *אין* הקצאה אחרת b שבה *כל* פרט שמקבל בית שונה מאשר ב-a, *מעדיף* את הבית ב-b על פני הבית ב-a.

ולהפך, הקצאה a *אינה* יעילה אם *יש* הקצאה אחרת b שבה מצבם של חלק מהפרטים משתפר ואף אחד *לא נפגע*.

למשל, ההקצאה המסומנת בטבלה אינה יעילה. מדוע? למשל, אם 1 יקבל את A, 2 את D, 3 את C ו-4 את B אף אחד לא יחסר ואילו 1 ו-2 נהנים ממש.

הגדרה שנייה ושקולה להקצאה יעילה פרטו: הקצאה a היא יעילה פרטו אם לא קיימת קבוצה של פרטים $\{i_1, \ldots, i_L\}$ כך שלכל $l > 1$ מתקיים $a(i_{l-1}) \succ_{i_l} a(i_l)$ וכמו כן $a(i_L) \succ_1 a(i_1)$.

כלומר, אין אפשרות לבצע "מעגל חליפין" שבו כל הפרטים בקבוצה רוצים להחליף את הבתים בינם לבין עצמם.

הוכחת שקילות (שקילות משמעה שאם ההגדרה הראשונה מתקיימת אז גם השנייה, ולהיפך, שאם השנייה מתקיימת אז גם הראשונה מתקיימת):

נניח שבהקצאה a יש מעגל חליפין $\{i_1,\dots,i_L\}$ שבו פרט i_1 ישמח לקבל את הבית המוחזק על ידי i_2, פרט i_2 ישמח לקבל את הבית המוחזק על ידי i_3 וכו... ,מצב כל הפרטים טוב יותר, אז נתבונן בהקצאה בה b שבה: אם $i \notin \{i_1,\dots,i_L\}$ אז $b(i)=a(i)$ (אנחנו לא משנים את ההקצאה לפרטים שאינם במעגל); אם $i \in \{i_1,\dots,i_L\}$ אז $b(i_l)=a(i_{l-1})$ לכל $l>1$ ו-$b(i_1)=a(i_L)$ (כלומר, לאלה שבמעגל אנחנו מחליפים את ההקצאה לבית שהם מעדיפים). בהקצאה זו מצבם של חלק מהפרטים טוב יותר מאשר ב- a ומצבם של האחרים אינו מורע.

בכיוון השני, נניח שההקצאה a אינה פרטו יעילה ונמצא מעגל מסחר רצוי. מכיוון שההקצאה אינה יעילה יש איזושהי הקצאה אחרת טובה יותר b. איך נדע שיש מעגל מסחר שבו כל החברים רוצים להשתתף? כי נתחיל באחד הפרטים שמקבל בית שונה בהקצאה b, נקרא לו i_1. מכיוון ש-b שונה מ-a משמע שאת הבית שלו מ-a מקבל ב-b פרט אחר, נקרא לו i_2. מכיוון ש-b שולטת פרטו על a אז $b(i_2)=a(i_1)\succ_2 a(i_2)$. כעת, נסתכל על i_3 כך ש-$b(i_3)=a(i_2)$, ומכיוון ש-b שולטת פרטו על a משמע ש-$b(i_3)\succ_3 a(i_3)$ וכך הלאה. מפני שיש מספר סופי של פרטים בסופו של דבר יהיה פרט i_L שעבורו $a(i_L)=b(i_1)$ (נחזור בהכרח לבית שמקבל ב-b הפרט i_1) והמעגל ייסגר.

[סוף התזכורת]

המטרה עד כה הייתה לדון בבעיה כלכלית טיפוסית – כיצד אפשר להתייחס להקצאת מקורות (בדוגמה שלנו בתים) לפרטים כאשר יש ניגוד אינטרסים (פרטים שונים רוצים לפעמים את אותו הדבר) ולכן אין פתרון פשוט שבו כל אחד מקבל את הדבר הטוב ביותר בעיניו. הכלכלה עוסקת בחקר מנגנונים להקצאות מסוג זה. מנגנונים שראינו בשיעור הקודם היו טכניים. כעת נפנה לתיאור סיפור אחר:

הג'ונגל

הגיבורים של הסיפור הם הפרטים ולכל אחד העדפות על קבוצת הבתים. בג'ונגל אין חוק, אין בעלים ואין רכוש. פרט אינו יכול להיות בעליו של בית אלא רק מחזיק של בית. מה שמניע את גלגלי הג'ונגל הוא **כוח**. משמעותו של הכוח בסיפור שלנו היא שאם 1 חזק יותר מ-2, ואם 2 מחזיק בבית כלשהו אז 1 יכול לקחת מ-2את ביתו. נסמן iSj את "i חזק מ- j".

בעולם שאנחנו מתארים יחסי הכוחות הם חדים וברורים לחלוטין, אין שוויון כוחות, ויחסי הכוח קבועים. בלי הגבלת הכלליות[1] נניח ש- 1 חזק מ-2 חזק מ-3 חזק מ-4 וכן הלאה עד לפרט n החלש ביותר.

כעת נגיע למושג **שיווי המשקל**. שיווי משקל (ש"מ) הוא מצב (בסיפור שלנו זו הקצאה) שבו אין בכוחו של אף אחד מהשחקנים לבצע פעולה שתשפר את מצבו על פי העדפותיו שלו. כלומר, ש"מ הוא הקצאה שבו כל פרט יכול להגיד לעצמו ביחס למצבו...

[1] פירוש הביטוי "בלי הגבלת הכלליות" הוא שקביעת שמות או יחסים מסוימים אינם מגבילים את התוצאות שיתקבלו כך שהן יישארו נכונות גם אם נקבע סדר או שמות ספציפיים אחרים.

"מה שאני רוצה (יותר ממה שיש לי) **אני לא יכול, ומה שאני יכול אני לא רוצה"**

אם תיארנו את יחסי הכוחות, והחזק יכול לקבל את מה שיש לחלש, מה לא יהיה שיווי משקל? מצב שבו פרט חלש מחזיק בבית שפרט חזק יותר רוצה. למשל, לא ייתכן שבשיווי משקל 2 יחזיק ב-A, כאשר 1 רוצה את A.

<u>הגדרה</u>: הקצאה a היא הקצאת *שיווי משקל של הג'ונגל* אם: <u>אין</u> פרט i ופרט j כך ש-i חזק מ-j ואילו i מעדיף את הבית המוחזק על ידי j על פני הבית שהוא עצמו מחזיק.
בכתיב מקוצר: בהקצאה a אין אף i ו-j כך ש-iSj ואילו $a_j \succ_i a_i$.

באופן שקול, מצב a <u>איננו</u> שיווי משקל אם יש שני פרטים i ו- j כך ש iSj אבל $a_j \succ_i a_i$.

מושג שיווי המשקל שלנו אינו תופס מצב שבו יחסי הכוחות הם לא קבועים או ברורים - לא ייתכן בסיפור שלנו שפרט חלש *לפעמים* ינצח פרט חזק. כמו כן, בסיפור שלנו אין אפשרות להתארגנות של קבוצה של חלשים כדי לגבור על פרט חזק יותר.

אחרי שהגדרנו מצב של ש"מ, השאלה הראשונה שהכלכלן שואל את עצמו, היא האם בכלל **קיים** מצב של ש"מ? אם לא קיים מצב כזה, ההגדרה מאבדת ממשמעותה כי היא דנה במקרה שאינו מתרחש.

<u>טענה 1</u>: ש"מ של הג'ונגל תמיד קיים

ב"תמיד" הכוונה היא ששיווי המשקל אפשרי בכל מימוש של הפרמטרים של המודל – לא משנה מהם הבתים, מיהם הפרטים, מה יחסי העדפה של הפרטים ומה יחסי הכוחות ביניהם. כלומר, הטענה אומרת שלכל פרמטרים שיהיו, יהיה ניתן למצוא הקצאה (לפחות אחת) שבה אף אחד מהפרטים לא מעדיף בית שפרט חלש ממנו מחזיק.

<u>הוכחה</u>: נדמיין שאנחנו נותנים לפרט 1, החזק ביותר, זכות לבחור את הבית הטוב ביותר בעיניו, וזה יהיה הבית a_1. כלומר, $a_1 \succ_1 h \ \forall h \neq a_1$ (הבית a_1 טוב יותר בעיניו של 1 מכל יתר הבתים). לאחר מכן, אנו קוראים ל-2, ונותנים לו לבחור את הבית הטוב ביותר בעיניו מתוך כל הבתים שנשארו אחרי ש-a_1 כבר נלקח. כלומר, $a_2 \succ_2 h \ \forall h \notin \{a_1, a_2\}$. וכך הלאה, בכל שלב אנו "מוחקים מהרשימה" פרט אחד ובית אחד עד שמסיימים עם כל הבתים וכל הפרטים. בתהליך זה *יצרנו הקצאה* כיוון שכל פרט קיבל בית, ולכל בית הוקצה פרט. כעת נותר לנו להראות שההקצאה הזו היא ש"מ של הג'ונגל. מדוע? כיוון שפרט i יכול להשתלט רק על הבתים של החלשים ממנו, אבל הוא מראש בחר את הבית הטוב ביותר בעיניו מבין הבתים שמחזיקים הוא וכל החלשים ממנו. כלומר, $a_i \succ_i a_j$ לכל $i < j$ (נזכור שאם $i < j$ אז iSj). לכן, a היא ש"מ של הג'ונגל.

<u>טענה 2</u>: ש"מ של הג'ונגל הוא יחיד

הוכחנו שתמיד יש ש"מ אחד לפחות, ועכשיו נוודא ששיווי המשקל הוא אחד ויחיד - (הבהרה: המשמעות היא שאם הג'ונגל נמצא בשיווי משקל אז יש רק מצב אחד שהוא יכול להימצא בו).

<u>הוכחה:</u> נניח שיש שני שיוויי משקל שונים ונראה שזהו מצב בלתי אפשרי. נניח ש-a ו-b הן שתי הקצאות ש"מ שונות:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

נסתכל על פרט i החזק ביותר (מספרו הקטן ביותר) ועבורו $a_i \neq b_i$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$a_i \succ_i b_i$. מכיוון שההקצאות זהות לכל הפרטים החזקים יותר מ-i, משמע שהבית a_i אינו אחד מהבתים $\{b_1, \dots, b_{i-1}\} = \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ ולכן הוא נמצא בהקצאה b ברשות פרט חלש יותר, נקרא לו j. כלומר, iSj, $b_j \succ_i b_i$ ולכן b איננו ש"מ של הג'ונגל בסתירה לכך שיש יותר משיווי משקל אחד.

<u>טענה 3</u>: ש"מ של הג'ונגל הוא יעיל פרטו

כלומר, אם הג'ונגל נמצא בש"מ אין אף קבוצה של פרטים שירצו להחליף ביניהם את הבתים (והרי את שיווי המשקל הגדרנו לפי הרצונות של כל פרט בנפרד). זוהי תכונת יציבות חזקה של שיווי המשקל.

<u>הוכחה</u>: נניח ש-$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ הינו ש"מ של הג'ונגל אך הוא אינו יעיל פרטו. כלומר, יש הקצאה אחרת $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ששולטת פרטו על ההקצאה הזו. נסתכל על הפרט החזק ביותר (ה-i המינימלי) שעבורו $a_i \neq b_i$. אם b שולטת על a, סימן ש $b_i \succ_i a_i$. אבל מכיוון ש $\{b_1, \dots, b_{i-1}\} = \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ משמע שהבית b_i נמצא בהקצאה a ברשות פרט חלש יותר j. לכן, iSj $a_j \succ_i a_i$ בסתירה לכך ש-a הוא שיווי משקל של הג'ונגל.