

1. משחק המרוץ (לקוח מהספר של Osborne<sup>1</sup>)  
שני שחקנים נמצאים במרחקים A ו-B מהמטרה.  
השחקן שיגיע למטרה ראשון יקבל כפרס מספר כלשהו בין 6 ל-7.  
השחקנים מחליפים תורות וכל שחקן בתורו (שחקן 1 מתחיל) יכול לבחור להתקדם צעד 1 (עלות 2), שני צעדים (עלות 4) או לא להתקדם כלל (עלות 0). אם בשני תורות עוקבים שני השחקנים בחרו שלא להתקדם, המשחק נפסק ואיש אינו מקבל פרס.  
מטרת כל שחקן להשיג מקסימום רווח (הרווח שווה לפרס פחות עלויות).  
הראה שלכל A ו-B יש למשחק תוצאת שווי משקל פרפקטי יחידה.

תוצאת שמי"פ בכל תת משחק בו שחקן נמצא במרחק 1 מהמטרה ותורו לשחק היא שהשחקן יצעד ויגיע ראשון למטרה.  
אם השחקן שתורו לצעוד נמצא במרחק 2 מהמטרה וחברו במרחק 1, תוצאת שווי המשקל הפרפקטי חייבת להיות שהוא יצעד שני צעדים ויסיים את המשחק.  
אם השחקן שתורו לצעוד נמצא במרחק 2 מהמטרה וחברו במרחק 2, תוצאת שווי המשקל הפרפקטי חייבת להיות שהוא יצעד שני צעדים ויסיים את המשחק שכן אחרת נובע מהשלב הקדם שחברו יקדים אותו.  
אם השחקן שתורו לצעוד נמצא במרחק 2 מהמטרה וחברו במרחק גדול מ-2, תוצאת שווי המשקל הפרפקטי חייבת להיות שהוא יצעד צעד אחד, שכן חברו לא יזוז והוא יצעד צעד נוסף בתור מאוחר יותר.  
אם השחקן שתורו לצעוד נמצא במרחק 3 מהמטרה וחברו במרחק 1 או 2, הוא לא יזוז שכן מהשקול הנ"ל השחקן האחר יגיע מיד לקו הגמר.  
אם השחקן שתורו לצעוד נמצא במרחק 3 מהמטרה וחברו במרחק גדול מ-2 הוא יצעד צעד אחד בלבד שכן מהנאמר לעיל נובע שחברו לא ינוע.  
לבסוף שחקן שנמצא במרחק גדול מ-3 לא ינוע שכן בכל מקרה התזווה תביא לו לרווח קטן מעלות ההגעה ליעד.

2. משחק האמון: לשחקן 1 יש 10 דולר. הוא יכול להחליט כמה מתוכם לקחת לעצמו וכמה להעביר לשחקן 2. שחקן 2 משלש את הסכום שיקבל ואז יצטרך להחליט איזה סכום להחזיר לשחקן 1.  
מתוך הנחה שהשחקנים מעוניינים אך ורק בסכום הכסף שיימצא בכיסם בסוף המשחק, נתח את הסיטואציה כמשחק בצורה רחבה ומצא את שווי המשקל הפרפקטים של המשחק. מצא גם שווי משקל שאיננו שווי משקל פרפקטי.  
חזור על התרגיל מתוך הנחה שהשחקנים משחקים את המשחק 3 פעמים בזה אחר זה.

כאשר המשחק משוחק פעם אחת בלבד:

נפתור באינדוקציה לאחור ונמצא שווי משקל פרפקטיים - שחקן 2 יישלש כל סכום שיקבל וישמור את כולו לעצמו. לכן, שחקן 1 יודע שהסכום שיעביר לשחקן 2 לא יחזור אליו ולכן ייבחר לא להעביר ל-2 דבר. תוצאת שיווי המשקל הפרפקטי היא ש-1 מקבל 10 דולר, ו-2 מקבל 0 דולר.

<sup>1</sup> Martin J. Osborne, *An introduction to game theory*. Oxford University Press, August 2003

דוגמא לשווי משקל נאש שאיננו פרפקטי הוא ש-2 משלש את הסכום ומחזיר ל-1 בדיוק את הסכום שנתן לו, ו-1 מעביר סכום של 0 דולר. תוצאת שיווי המשקל זהה.

כאשר המשחק משוחק 3 פעמים :

השוני הוא שכעת 1 יכול להתנות את הסכום שהוא מעביר במשחק בארועים במשחקים הקודמים. כלומר, 1 יכול להעביר ל-2 כסף במשחק הראשון ולאיים עליו שאם לא יחזיר לו, הוא לא יעביר לו כלום במשחקים הבאים ואם יחזיר אז יעביר לו עוד.

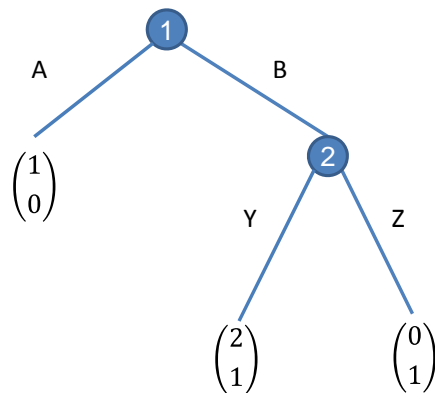
אבל, בשווי משקל פרפקטי, במשחק השלישי, ללא קשר למה שקרה בשני המשחקים הראשונים, 2 לא יחזיר ל-1 דבר ממה שיקבל (כי 1 כבר לא יכול לאיים, להעניש או להיטיב). לכן, במשחק השלישי, 1 לא יעביר ל-2 דבר ויקח את עשרת הדולרים לעצמו. לכן, במשחק השני, 2 יודע ש-1 בכל מקרה לא יעביר לו דבר במשחק השלישי ותגובתו הטובה ביותר לכל סכום שיקבל תהיה לשלשו ולשלשו לכיסו. לכן, גם במשחק השני 1 לא יעביר ל-2 דבר. כך גם במשחק הראשון. כלומר, בשיווי משקל פרפקטי, האסטרטגיות הן: שחקן 1 לוקח את כל 10 הדולרים לעצמו בכל אחד מהמשחקים עבור כל היסטוריה; שחקן 2 משלש ולוקח לעצמו את כל הסכום שמקבל מ-1 בכל משחק.

למעשה כל שיווי משקל נאש מוביל לאותה התוצאה. נניח שיש שווי משקל בו שחקן 1 מעביר סכום חיובי לשחקן 2. בתקופה האחרונה בה 1 מעביר סכום חיובי האסטרטגיה האופטימלית של 2, תכלול אי החזרת דבר באותה תקופה, ולכן שחקן 1 יעשה טוב יותר אם לא יעביר דבר. לכן, אין תקופה שבה 1 מעביר סכום חיובי. אולם כמו בסעיף הקודם יש שיווי משקל נוספים שאינם פרפקטיים. למשל, 1 לוקח את 10 הדולרים לעצמו בכל המשחקים עבור כמעט כל ההיסטוריות, פרט לאלה שבהן העביר ל-2 סכום חיובי והוא החזיר לו אותו במשחק הראשון ואז מעביר ל-2 10 דולרים במשחק השני; 2 משלש ומחזיר ל-1 את הסכום שקיבל ממנו.

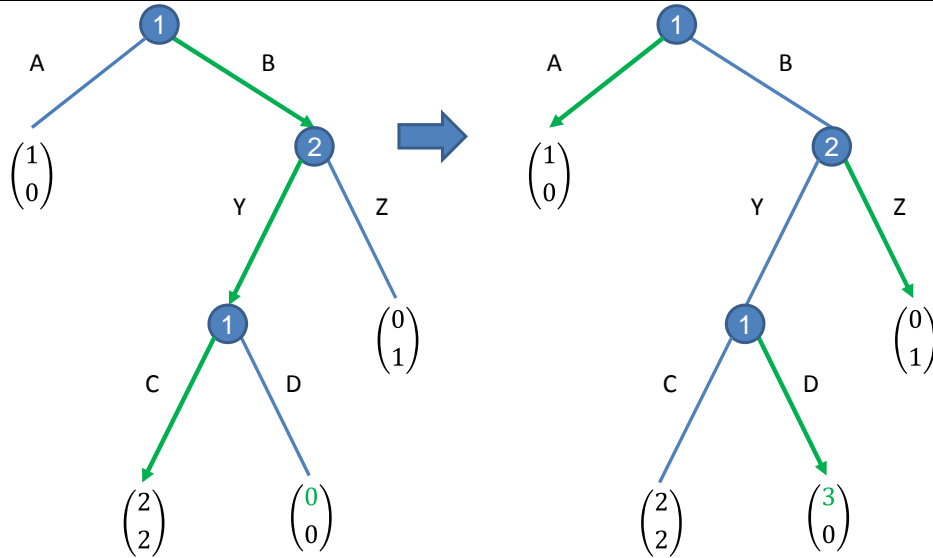
3. בנה דוגמא למשחק בצורה רחבה שיש לו שני שיווי משקל פרפקטיים והאחד מהם נחות מהאחר עבור שני השחקנים.

במשחק המתואר יש שני שיווי משקל פרפקטיים:  
 (1 משחק A; 2 משחק Z) התשלומים הם (1,0)  
 (1 משחק B; 2 משחק Y) התשלומים הם (2,1)

שווי המשקל הראשון נחות מהשני עבור שני השחקנים. מפתח למציאת שני שיווי משקל שכאלה הוא האדישות של שחקן 2 כאשר מגיע תורו.



4. בנה דוגמא למשחק עם שווי משקל פרפקטי יחיד, כך ששיפור אחד התשלומים לשחקן 1 יביא דווקא להרעה במצבו בשווי משקל הפרפקטי היחיד במשחק החדש.



במשחק השמאלי יש שיווי משקל פרפקטי יחיד ובו 1 משחק B ו-2 משחק Y. שחקן 1 מקבל את התשלום 2. במשחק הימני השתפר התשלום לשחקן 1 בתוצאה שמתקבלת כאשר 1 בוחר B ו-2 בוחר Y. עקב כך, שיווי המשקל הפרפקטי היחיד במשחק החדש הוא ש-1 משחק A ו-2 משחק Z. בשיווי משקל זה 1 מקבל תשלום 0. כלומר, מצבו הורע כתוצאה מהשיפור בתשלום.