אגדות הכלכלה – סתיו 2012: אריאל רובינשטיין

תרגיל 9: משחקי סכום אפס ומשחק בצורה רחבה

1. במשחק סכום אפס השתפר אחד התשלומים של שחקן 1. גם במשחק המקורי וגם במשחק אחרי השנוי יש שווי משקל. הראה שהשנוי אינו יכול להרע את מצב שחקן 1 (בשווי משקל).
לעומת זאת הראה שבמשחק שני שחקנים שאיננו משחק סכום אפס יכול להיות שיש שני שוויי משקל וכאשר השתפר תשלומו של שחקן 1 באחת התוצאות האפשריות של המשחק "נעלם" שווי המשקל המועדף על ידו.

במשחק סכום אפס שיווי המשקל של נאש מתלכד עם תוצאות חשיבת maxmin. נניח שמשתפר התשלום לשחקן 1 בתוצאה (a,b). שיפור זה יכול לשפר או לא לשנות את התוצאה הגרועה ביותר (ה-min) שנובעת מפעולה כלשהי של שחקן 2 אל מול a ובכל מקרה אינו יכול לפגוע בתוצאה הגרועה ביותר הטובה ביותר במשחק. לכן, מצבו של 1 אינו מורע בשיווי משקל.

נסתכל על דוגמה שממחישה שהדבר אינו נכון עבור משחק שאיננו סכום אפס:

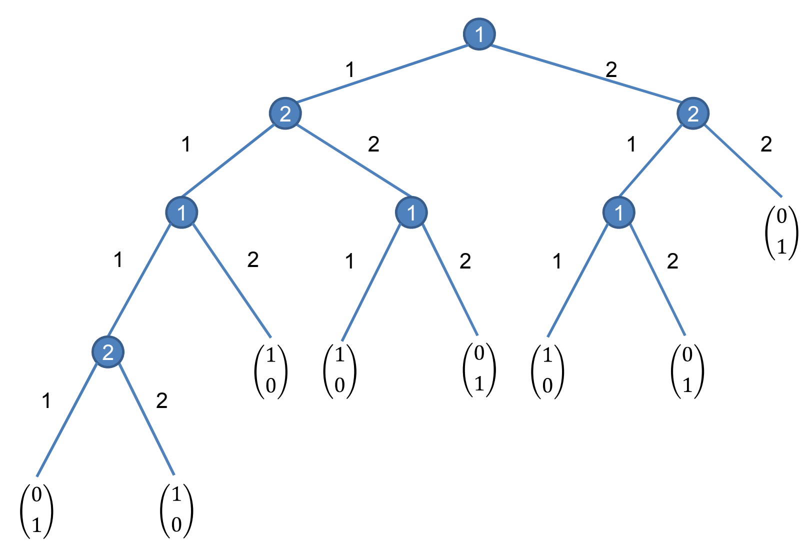
במשחק הימני שני שוויי משקל (T,L) ו-(B,R) והתשלומים מייצגים ששחקן 1 מעדיף את שיווי המשקל הראשון על השני. במשחק השמאלי תשלומו של 1 השתפר בתוצאה (B,L). כעת התוצאה (T,L) כבר לא מהווה שיווי משקל כיוון שאם שחקן 2 משחק L, שחקן 1 יעדיף לשחק B.

	L	R
T	3 , 2	0 , 0
B	2 , 0	1 , 2

	L	R
T	3 , 2	0 , 0
B	4 , 0	1 , 2

2. **משחק הגפרורים**: בפני שני שחקנים 21 גפרורים. כל שחקן בתורו חייב ליטול גפרור אחד או שניים. השחקן שנוטל את הגפרור האחרון מפסיד את המשחק.
   א. צייר את המשחק עבור המקרה שבמקום 21 גפרורים היו רק 5.
   ב. חשב את שווי המשקל של המשחק (עם 21 גפרורים) והראה שיש לו תוצאה יחידה ובה לאחד השחקנים מובטח נצחון.

א.



שרטטנו את המשחק כך ש-1 מסמל נצחון ו-0 הפסד והתשלום העליון הוא לשחקן 1 והתחתון לשחקן 2. צמצמנו את המהלכים האחרונים למצב שבו כאשר יש גפרור אחד על השולחן, לשחקן שזה תורו אין בחירה, ולכן שחקן שמותיר גפרור אחד מבטיח לעצמו נצחון.

ב. ל-1 אסטרטגיה שמבטיחה לו נצחון, ולכן מספיק לתאר אותה בכדי לתאר את כל שוויי המשקל. נבחין ש-1 יכול להשלים את פעולת 2, כך שסכום הגפרורים שירימו שניהם בשני תורות עוקבים יהיה 3. לכן, בכדי להשאיר ל-2 גפרור אחד על השולחן, שחקן 1 צריך לוודא שבכל תור של 2 הוא מותיר לו מספר גפרורים ששווה ל-1 ועוד כפולה של 3 (כלומר, 4, 7, 10 וכן הלאה). לכן, בתור הראשון 1 יסיר שני גפרורים ויותיר את 2 עם 19 גפרורים ($1 + 3 * 6=$) ומשם והלאה ישלים את פעולת שחקן 2 כך שסכום הגפרורים יהיה שלושה ובהכרח יגיעו למצב שבו 2 נותר עם גפרור אחד על השולחן ולכן 1 מנצח במשחק.
הערה: אילו מספר הגפרורים ההתחלתי היה בעצמו מתחלק ב-3 עם שארית 1, אז לשחקן 2 הייתה (אותה) אסטרטגיה שמבטיחה לו נצחון.

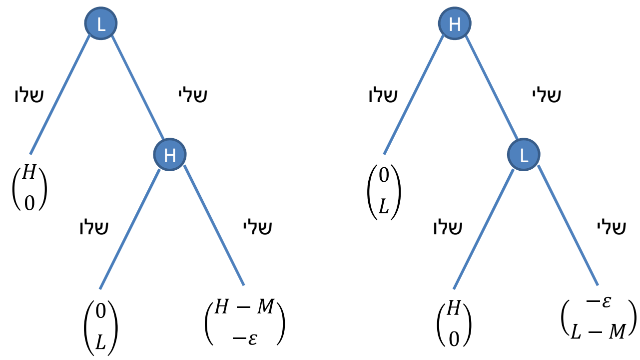
3. באיזה מובן **טיק-טאק-טו** (איקס-עיגול) הינו משחק טריוויאלי? מדוע בני אדם משחקים את המשחק למרות עובדה זו?

טיק-טאק-טו הוא משחק טריוויאלי כיוון שמדובר במשחק סופי בצורה רחבה מהסוג שדברנו עליו בכיתה. כפי שהוכחנו בכיתה למשחק יש שווי משקל של נאש (ואפילו שווי משקל פרפקטי). לכן למשחק יש תוצאת שווי משקל יחידה (תיקו) ואסטרטגיות maxmin המבטיחות לכל שחקן שלא להפסיד.
בני אדם משחקים את המשחק מכיוון שבני אדם אינם "מושלמים" ועושים טעויות, וחלקם אינו מכיר את האסטרטגיות המבטיחות להם שלא להפסיד.

4. משפט שלמה

נר שמן נמצא בירושלים. שני אזרחים טוענים לבעלות עליו. ברור שאחד מהם הוא בעליו האמיתיים של הנר. ערכו של הנר H בעיני בעליו האמיתיים ורק L ‏(H>L>0) בעיני המתחזה. בעייתו של המלך שלמה היא כמובן שאינו יודע מיהו הבעלים האמיתי של הנר (בעוד הם יודעים את האמת היטב). "החכם באדם" מצווה על עריכת המשחק הבא: אחד מהשניים נקרא להכריז "שלי" או "שלו". הכרזה "שלו" תסיים את המשחק והשחקן האחר יקבל את הנר. אם המכריז אמר "שלי", יידרש השחקן השני לבחור בין לומר "שלו" – מה שיביא למתן הנר לטוען הראשון, או "שלי" מה שיחייב אותו לשלם למלך שלמה סכום M גבוה מ-L ונמוך מ-H לפני שיקבל את הנר. במקרה זה השחקן הראשון ייענש בקנס $\varepsilon > 0$ קטן. הסבר מדוע מושג שווי המשקל הפרפקטי "מנבא" שהמלך שלמה יצליח להביא את הנר לבעליו המקוריים מבלי שייצטרך לשלם דבר?

נתאר את הסיטואציה כשני עצי משחק: באחד מהם H משחק ראשון, ובאחר L משחק ראשון (נזכור ששלמה לא יודע מי הוא מי). בשני עצי המשחק התשלום העליון מתאר את האינטרסים של השחקן H והתחתון את של L:



בשיווי משקל פרפקטי בעץ הימני (כאשר H משחק ראשון) כאשר יגיע תורו של L, הוא יעדיף לומר "שלו" ולהפסיד את הנר מאשר לומר "שלי" ולהקנס ביותר משווי הנר עבורו. לכן, H יודע שאם יכריז "שלי", L יכריז "שלו" והוא יקבל את הנר מבלי להקנס, אך אם יכריז "שלו" יפסיד את הנר. כלומר, ש"מ הוא ש-H מכריז "שלי" ו-L מכריז "שלו".

בשיווי משקל פרפקטי בעץ השמאלי (כאשר L משחק ראשון) כאשר יגיע תורו של H הוא יעדיף להתעקש ולומר "שלי" ולשלם את הקנס מאשר להפסיד את הנר. לכן, L יודע שאם יכריז "שלו" יקבל 0, אך אם יכריז "שלי", H יכריז "שלי" גם כן ולכן L ייקנס ב-ε. כלומר, ש"מ הוא ש-L מכריז "שלו", ו-H מכריז "שלי" (אם יגיע תורו, מה שלא יקרה עקב הכרזתו של L).

5. משחק מרבה הרגלים

הראה שלמשחק מרבה הרגלים שדברנו עליו בכיתה (בגרסא בה לכל שחקן 10 הזדמנויות להפסיק את המשחק) יש תוצאת שווי משקל יחידה.

צמדי האסטרטגיות שבהם כל שחקן מפסיק את המשחק בהזדמנות הראשונה שלו הינם כמובן שווי משקל של נאש שתוצאתו הפסקה מיידית של המשחק.

נניח שיש שווי משקל של נאש שתוצאתו איננה שהמשחק מסתיים מיד. אין שווי משקל שתוצאתו ששני השחקנים יבחרו תמיד C כי אז לשחקן האחרון כדאי לבחור S בשלב האחרון. אין שווי משקל בו המשחק ממשיך עד נקודה מסוימת שבה אחד השחקנים מפסיק אותו כי אז עדיף לשחקן האחר להפסיק את המשחק שלב אחד קודם. לכן בכל ש"מ נאש בהכרח המשחק תמיד נפסק בתור הראשון.