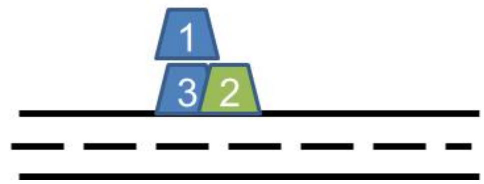
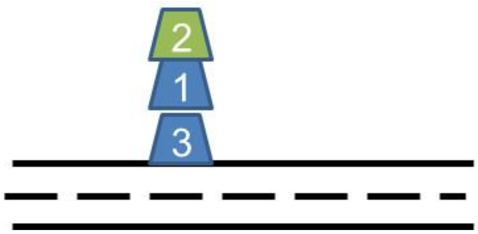
אגדות הכלכלה – סתיו 2012: אריאל רובינשטיין

תרגיל 8: המשחק הלא שתופי (המשך)

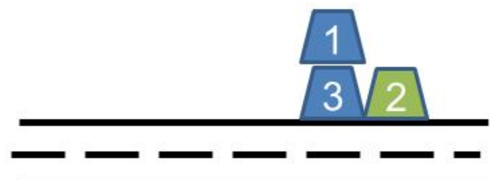
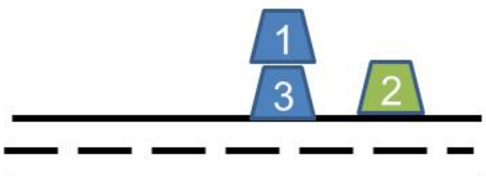
1. **הוטלינג עם 3 שחקנים:** הראה שבמשחק של הוטלינג שהגדרנו בכיתה עם 3 שחקנים אין שווי משקל של נאש.

נפסול את כל התוצאות האפשריות כשיווי משקל:

- נניח שהשלושה מתמקמים באותה נקודה: שחקן נהנה משליש מהשוק. בלפחות אחד משני הצדדים יש חצי מהצרכנים. לשחקן משתלם לסטות לצד זה ולזכות בכולו (לפחות חצי מהצרכנים) לעומת לקבל שליש (המצב באיור הימני עדיף ל-2 על פני המצב בשמאלי).

- נניח ששניים מתמקמים באותה נקודה והשלישי במקום אחר: השלישי ירצה להתקרב לשניים ובכך לקבל יותר צרכנים.

- נניח שכל אחד מתמקם בנקודה אחרת: שחקן קיצוני ירצה להתקרב לשכנו ולקבל יותר צרכנים.


2. **המשחק של קורנו**: שני יצרנים מתחרים בשוק למוצר מסויים. כל יצרן יכול להחליט על כמות של המוצר שייצר (מספר שלם). המחיר של המוצר בשוק ייקבע לפי ההיצע הכולל של שני היצרנים באופן הבא: אם סך ההיצע יהיה x המחיר של כל יחידה יהיה $6-x$. מטרת כל יצרן למקסם רווח. הנח לשם פשטות שליצרנים אין הוצאות ייצור.

א. מהי כמות הייצור האופטימלית של יצרן אם הוא פועל בשוק כיצרן יחיד (מונופול)?

ב. חשב את שוויי המשקל של נאש של המשחק.

א. רווחי היצרן מתוארים במשוואה הבאה: $\Pi=(6-x)x$. שיא הרווח מתקבל כאשר $x=3$. לכן, היצרן ייצר 3 יחידות וירוויח 9.

ב. כעת הרווח של כל יצרן תלוי גם בכמות שמייצר היצרן האחר, כיוון שהכמות שמייצר האחר מורידה את המחיר. נראה בטבלה את התגובה הטובה ביותר לכל פעולה של האחר.

כמה מייצר האחר	**תגובה טובה ביותר**	**הסבר**
0	3	כמו סעיף א'
1	2 או 3	ייצור יחידה 1 יוביל למחיר 4 ולכן לרווח 4 ייצור 2 יחידות יוביל למחיר 3 ולכן לרווח 6 ייצור 3 יחידות יוביל למחיר 2 ולכן לרווח 6 ייצור 4 יחידות יוביל למחיר 1 ולכן לרווח 4 כל כמות אחרת תביא לרווח 0
2	2	ייצור יחידה 1 יוביל למחיר 3 ולכן לרווח 3 ייצור 2 יחידות יוביל למחיר 2 ולכן לרווח 4 ייצור 3 יחידות יוביל למחיר 1 ולכן לרווח 3 כל כמות אחרת תביא לרווח 0
3	1 או 2	ייצור יחידה 1 יוביל למחיר 2 ולכן לרווח 2 ייצור 2 יחידות יוביל למחיר 1 ולכן לרווח 2 כל כמות אחרת תביא לרווח 0
4	1	ייצור יחידה 1 יוביל למחיר 1 ולכן לרווח 1 כל כמות אחרת תביא לרווח 0
5	0 או 1	שתיהן יתנו רווח 0 (היתר "לא חוקיות")
6	0	כל כמות אחרת "אינה חוקית"

שיווי משקל הוא מצב שבו כל אחד משחק תגובה טובה ביותר לאחר – קל לראות שיש שלושה שיווי משקל:

(2,2) – כי 2 היא תגובה טובה ביותר ל-2

(1,3) ו-(3,1) – כי 1 היא תגובה טובה ביותר ל-3 ו-3 תגובה טובה ביותר ל-1.

בכל יתר הזוגות הפעולות אינן מהוות תגובה טובה ביותר אחת לרעותה.

3. **התבונן במשחק הבא**:

	W	X	Y	Z
A	5,2	2,6	1,4	0,4
B	0,0	3,2	2,1	1,1
C	7,0	2,2	1,5	5,1
D	9,5	1,3	0,2	4,8

מהי התוצאה היחידה ששורדת מחיקה אטרטיבית של אסטרטגיות נשלטות חזק?

מחיקה סדרתית של אסטרטגיות נשלטות חזק: האסטרטגיה W נשלטת על ידי Z ולכן נמחק אותה.

	~~W~~	X	Y	Z
A	~~5,2~~	2,6	1,4	0,4
B	~~0,0~~	3,2	2,1	1,1
C	~~7,0~~	2,2	1,5	5,1
D	~~9,5~~	1,3	0,2	4,8

כעת, האסטרטגיה D נשלטת על ידי C ו-A נשלטת על ידי B ונמחק גם אותן.

	X	Y	Z
~~A~~	~~2,6~~	~~1,4~~	~~0,4~~
B	3,2	2,1	1,1
C	2,2	1,5	5,1
~~D~~	~~1,3~~	~~0,2~~	~~4,8~~

כעת Z נשלטת על ידי X. נמחק אותה

	X	Y	~~Z~~
B	3,2	2,1	~~1,1~~
C	2,2	1,5	~~5,1~~

כעת C נשלטת על ידי B

	X	Y
B	3,2	2,1
~~C~~	~~2,2~~	~~1,5~~

כעת Y נשלטת על ידי X, ולכן נקבל שווי משקל יחיד שבו ישוחק (B,X) והתשלומים יהיו (3,2).

	X	Y
B	3,2	2,1

4. הנח שבמשחק שני שחקנים יש תוצאה יחידה השורדת מחיקה סדרתית של אסטרטגיות נשלטות. הראה שתוצאה זו הינה שווי משקל של נאש.

נניח שהתוצאה אינה שווי משקל ויש אסטרטגיה עבור אחד השחקנים שנותנת תשלום גבוה מזו ששרדה את המחיקות אל מול השורדת היחידה של היריב. נסתכל על האסטרטגיה שנותנת תשלום גבוה ביותר. תנאי למחיקה של אסטרטגיה בשלב כלשהו הוא שהיא תיתן תשלום נמוך יותר מאסטרטגיה אחרת אל מול כל יתר האסטרטגיות של היריב ששרדו עד שלב זה, וביניהן כמובן השורדת היחידה של היריב. כלומר, אסטרטגיה זו לא יכלה להמחק בשום שלב קודם, כיוון שהיא לא נשלטת על ידי אף אסטרטגיה של השחקן למול האסטרטגיה של היריב ששרדה את כל המחיקות.

לכן, אל מול האסטרטגיה של היריב ששרדה, כל יתר האסטרטגיות של השחקן נותנות תשלום נמוך יותר – כלומר, התוצאה הינה שיווי משקל של נאש כי לשני השחקנים אין סטייה רווחית.

5. שני שחקנים, 1 ו-2, משתתפים במכרז על תמונה ששוויה ל-1 הוא 12 ול-2 הוא 10. כל שחקן אמור לשים הצעת מחיר במעטפה וייזכה בתמונה מי שישים את המספר הגבוה ביותר (במקרה ששניהם יכתבו מספר זהה, ייזכה בתמונה שחקן 1).

א. הנח שהזוכה בתמונה משלם את הצעת המחיר שלו. כלומר, ערך קבלת התמונה בעיניו של שחקן הוא ערך התמונה פחות המחיר שישלם. מהם שווי המשקל של נאש של המשחק?

לא תתכן בשיווי משקל הצעה גבוהה מ-12, כי במקרה זה הזוכה משלם על התמונה יותר מערכה עבורו, ולכן מוטב לו לרדת ל-0. לכן נסיק שלא ייתכן ששחקן 2 מציע סכום שונה משל שחקן 1, כי אז שחקן 1 יעדיף להשוות להצעתו של 2 כי יזכה ויקבל ערך אי-שלילי (ואם 2 מציע 12 וזוכה, אז 2 יעדיף להציע 0).

כמו כן, לא ייתכן ששחקן 1 מציע פחות מ-10, כי במקרה זה אם 1 זוכה אז שחקן 2 יעדיף להציע מעט יותר ממנו, ואם 1 מפסיד אז הוא יעדיף להשוות להצעתו של 2 ולזכות.

לכן, נותרו כמועמדים לשיווי משקל המקרים שבהם שני השחקנים מציעים סכום זהה בין 10 ל-12, ואכן אלו כל שיוויי המשקל של נאש של המשחק: בתמונה יזכה 1, ולכן יישאר עם רווח אי-שלילי, הצעה נמוכה יותר תביא לרווח אפס ואינה רווחית והצעה גבוהה יותר תקטין את רווחיו. שחקן 2 לא זוכה בתמונה ולכן כל פעולה שבה מציע מספר נמוך יותר לא תשנה את מצבו והצעה גבוהה יותר תרע את מצבו כי ישלם על התמונה יותר משוויה עבורו.

ב. הנח עתה שהזוכה בתמונה הוא השחקן שהכריז על המחיר הגבוה ביותר אבל הוא ישלם את המחיר הנמוך יותר (כלומר, את הצעת המחיר של השחקן שהפסיד). הראה שבמשחק זה האסטרטגיה של הגשת הצעת מחיר בגובה ערך החפץ עבור השחקן הינה אסטרטגיה שולטת (דהיינו יעשה מה שיעשה השחקן השני האסטרטגיה הזו תביא לשחקן תועלת גבוהה ביותר).

הראה שלמשחק יש שווי משקל שונה מאשר בסעיף א'.

<u>מציע</u>	<u>תשלומים</u>
$x > v$	אם זוכה מקבל $v - y$ ועשוי להיות ש-$y > v$ ולכן התשלום שלילי
$x = v$	זוכה ומקבל $v - y$ רק במקרים בהם $y \leq v$
$x < v$	אם זוכה מקבל $v - y$, אך מפסיד רווח חיובי במקרים בהם $x < y < v$

נניח שהשחקן מציע הצעה שזהה לערך התמונה עבורו – לכן אם זוכה מקבל תשלום אי-שלילי, ואם מפסיד מקבל תשלום 0. אם זוכה, אז אם יקטין מתחת להצעת היריב לא יקבל את התמונה ואם יקטין אל מעל להצעת היריב (או יגדיל) יקבל את אותו התשלום כמו שהיה מקבל אם היה מציע את ערכה עבורו. אם מפסיד ומגדיל את הצעתו, אז אם לא יגדיל אל מעל להצעת היריב (או אם יקטין את הצעתו) יישאר בלי התמונה עם תשלום 0, ואם יגדיל מעל להצעת היריב ישלם עבור התמונה יותר משוויה עבורו. לכן, זו אסטרטגיה שולטת.

שיוויי המשקל של נאש במשחק זה הם כל זוגות הפעולות שבהן הזוכה מציע הצעה גבוהה מערך החפץ עבור המפסיד, והמפסיד מציע הצעה נמוכה מערך החפץ עבור הזוכה. כלומר:

(*1 זוכה*) שחקן 1 מציע לפחות 10 ושחקן 2 מציע פחות משחקן 1 וגם פחות מ-12;

(*2 זוכה*) שחקן 2 מציע יותר מ-12 ושחקן 1 מציע לכל היותר 10.

הסבר: במקרים אלה הזוכה משלם עבור החפץ פחות משוויו עבורו. אין לו סטייה רווחית, כי כל הצעה שתבטיח לו זכיה לא תשנה את רווחיו, והצעה נמוכה משל האחר תגרום להפסד החפץ; לשחקן המפסיד אין סטייה רווחית כי הצעה גבוהה משל היריב תגרום לו לשלם על התמונה יותר משוויה עבורו.
כל יתר האפשרויות אינן יכולות להוות שיווי משקל: לא ייתכן שבשווי משקל הזוכה מציע פחות מערך החפץ עבור המפסיד, כי אז למפסיד עדיף להציע את הערך של החפץ עבורו ולזכות; לא ייתכן שבשווי משקל המפסיד מציע יותר מערך החפץ עבור הזוכה, כי אז לזוכה עדיף להציע 0 ולא לשלם.
אמנם, שיוויי המשקל מהמשחק בסעיף א׳ מהווים שווי משקל גם בסעיף הנוכחי (מהווים חלק משוויי המשקל שבהם 1 זוכה), אך יש שוויי משקל נוספים.

6. **משחק התרומה**
לכל אחד מחמישה שחקנים 10 אסימונים. כל שחקן יכול לחלק את האסימונים בין ״קופה פרטית״ ו״קופה ציבורית״. כל שחקן יקבל עבור כל אסימון בקופה הפרטית 4 שקלים ועבור כל אסימון שיושם על ידי שחקן כלשהו בקופה הציבורית 2 שקלים.
נתח את הסיטואציה כמשחק מתוך הנחה שכל שחקן מעוניין בסכום כסף גבוה ככל האפשר.
הגב על העובדה שבחירתכם לשים בקופה הצבורית הייתה מגוונת: בכל אחד מהמספרים 0,1,2,3,5,10 בחרו בין 14 ל-16 אחוזים (לשם השוואה, בקרב 8500 סטודנטים ברחבי העולם בחרו 37% במספר 0, 15% במספר 10, 13% במספר 5, ו-26% בחרו מספר בתחום בין 0 ל-4. רק 9% בחרו מספר בין 6 ל-9).

<u>שחקנים</u>: 1,2,3,4,5

<u>פעולות אפשריות לשחקן</u>: מספר שלם בין 0 ל-10 המסמל את מספר האסימונים ששם בקופה הציבורית.

<u>אינטרסים של שחקן בהינתן פעולות האחרים</u>: אם האחרים שמו בקופה הציבורית סך הכל n אסימונים, והוא תורם a אסימונים לקופה הציבורית השחקן מקבל תשלום של $2(n+a)+4(10-a)=2n+40-2a$.

לכן, לכל שחקן יש אסטרטגיה שולטת (ממש) לפיה כדאי לו לשים 0 אסימונים בקופה הציבורית (כל אסימון ששם בקופה הציבורית מפחית את תשלומו ב-2 שקלים). לכן, יש שיווי משקל באסטרטגיות שולטות, וזהו גם שיווי משקל נאש היחיד, לפיו כל שחקן שומר את כל האסימונים לקופה הפרטית ומקבל תשלום של 40.