אגדות הכלכלה – סתיו 2012: אריאל רובינשטיין

תרגיל 7: המשחק הלא שתופי

1. **משחק הדרישה**: שני שחקנים יכולים לחלק $10 בין שניהם. נתח את שני המשחקים הבאים:

א. כל שחקן רושם "דרישה" ושולח את הדרישה (מספר שלם בין 0 ו-10) ל"מרכז".

אם סכום המספרים אינו עולה על 10, כל שחקן מקבל את דרישתו.

אם סכום המספרים עולה על 10, אז כל שחקן לא מקבל דבר.

ב. כל שחקן רושם "דרישה" ושולח את הדרישה (מספר שלם בין 0 ו-10) ל"מרכז".

אם סכום המספרים אינו עולה על 10, כל שחקן מקבל את דרישתו.

אם סכום המספרים עולה על 10, השחקן שדרש פחות מחברו מקבל את מה שדרש והשחקן שדרש יותר מקבל את היתרה. במידה ושני השחקנים העלו את אותה דרישה ודרישה זו הייתה גבוהה מ-5, כל אחד מהם יקבל 5.

הצג את הסיטואציה בצורת משחק ומצא את שוויי המשקל של המשחק.

א. <u>שחקנים</u>: 1 ו-2.

<u>הפעולות האפשריות לכל שחקן</u>: מספר שלם בין 0 ל-10.

<u>האינטרסים של שחקן</u>: מקבל את דרישתו אם סכום הדרישות אינו עולה על 10, מקבל אפס אחרת.

התגובה הטובה ביותר היחידה של כל שחקן לדרישה של השחקן האחר שנופלת מ-10, היא לדרוש מספר המשלים ל-10 את דרישת האחר (אם ידרוש יותר, אז יקבל 0; אם ידרוש פחות, אז יקבל פחות).

כל פעולה היא תגובה טובה ביותר לפעולה 10.

לכן כל זוג פעולות המשלימות ל-10 הינו שווי משקל של נאש, ובנוסף "שני השחקנים דורשים 10" הוא שווי משקל. לעומת זאת כל צרוף פעולות אחר איננו שווי משקל.

ב. <u>שחקנים</u>: 1 ו-2

<u>הפעולות האפשריות לכל שחקן</u>: מספר שלם בין 0 ל-10

<u>האינטרסים של שחקן</u>: מקבל את דרישתו אם סכום הדרישות אינו עולה על 10 או אם ביקש פחות מהאחר, מקבל את המשלים ל-10 של דרישת האחר אם דרש יותר מהאחר וסכום הדרישות עולה על 10, או מקבל 5 אם דרש כמו האחר והסכום עולה על 10.

<u>טענה</u>: במשחק יש ארבעה שוויי משקל של נאש: (5,5), (6,6), (5,6), (6,5)

<u>הוכחה</u>: כל שחקן יכול להבטיח לעצמו 5, על ידי שישחק 5. לכן, אף שחקן לא ישחק פחות מ-5.

מכיוון שיש 10 לחלוקה ביניהם בשווי משקל כל שחקן מקבל בדיוק 5.

אם אחד השחקנים מכריז מספר גבוה מ-6 השחקן האחר יכול לסטות רווחית ל-6 (ולקבל 6 במקום 5).

נותרנו עם ארבע התוצאות שבטענה וקל לוודא שהן שוויי משקל של נאש.

2. **מלחמת התשה:** שני שחקנים שרויים במחלוקת על חפץ ששווה לשחקן אחד H דולרים ולשני L דולרים כאשר $H > L \geq 0$. חשוב על הזמן כמשתנה "רציף" המתחיל ב-0 ואין לו סוף. כל שחקן צריך לבחור את הזמן בו הוא מתכנן "להיכנע". אם שחקן נכנע ראשון, השחקן השני מקבל את החפץ. אם שניהם נכנעים באותו רגע כל אחד מהם מקבל את מחציתו השווה לו חצי מערכו בעיניו. שחקן מאבד דולר בכל יחידת זמן בה הסכסוך אינו פתור.

הצג את הסיטואציה כמשחק ומצא את שוויי המשקל נאש שלו. הראה שבכל שיווי משקל, המשחק מסתיים מיידית.

<u>השחקנים</u>: "שחקן H" ו"שחקן L" (לפי שווי החפץ עבור השחקן)

<u>פעולות אפשריות לכל שחקן</u>: מספר אי-שלילי שמסמל את זמן הכניעה.

<u>אינטרסים של שחקן</u>: השחקן מקבל את ערך החפץ עבורו (H או L) פחות משך הזמן שבו נכנע היריב אם היריב נכנע קודם; חצי מערך החפץ עבורו פחות הזמן שבו נכנע הוא עצמו אם נכנעו באותו הזמן; או מינוס זמן הכניעה שלו אם נכנע ראשון.

אין שווי משקל בו שני השחקנים מתכננים לעצור בזמנים שונים חיוביים. שכן השחקן שאמור להכנע קודם יעשה טוב יותר אם ייכנע מיד.

אין שווי משקל בו שני השחקנים מתכננים לעצור באותו זמן שכן סטייה של כל שחקן כך שיתכן להכנע מעט אחר כך תשפר את מצבו ממש (יקבל את כל החפץ ולא את מחציתו).

מכאן שבשווי משקל אחד השחקנים נכנע מיד. אם השחקן שנכנע מיד הוא L אז מוכרח להיות ש-H מתכנן להכנע באיזשהו זמן ארוך מ- L (אחרת כדאי ל- L לא לעצור מיד ולחכות עד אחרי ש-H ייכנע).

ובדומה אם השחקן שנכנע מיד הוא H אז מוכרח להיות ש-L מתכנן להכנע באיזשהו זמן ארוך מ-H.

מכאן ששוויי המשקל הם משני סוגים:

1) שחקן H מתכונן להכנע בזמן כלשהו ארוך מ-L ושחקן L נכנע מיד.

2) שחקן L מתכונן להכנע בזמן כלשהו ארוך מ-H ושחקן H נכנע מיד.

3. **"נחש את שני שליש הממוצע"**: במשחק n שחקנים. כל שחקן צריך לבחור מספר שלם בין 1 ל-100. כל שחקן שואף לנחש את "שני שליש הממוצע של המספרים שבחרו כל המשתתפים במשחק". ליתר דיוק, אם וקטור ההכרזות הוא $(x_1,\ldots,x_n)$ אז שחקן i יזכה בפרס אם x_i הינו המספר השלם הקרוב ביותר ל- $(2/3)\frac{1}{n}\sum_j x_j$. שים לב יתכן ששום שחקן לא יקבל פרס, ויתכן שיותר משחקן אחד ייזכה בפרס.

נסח את הסיטואציה כמשחק, הראה שלמשחק שווי משקל יחיד בו כל השחקנים בוחרים במספר 1.

<u>שחקנים</u>: *1,2,…,n*

<u>פעולות אפשריות לכל שחקן</u>: מספר שלם בין 1 ל-100

<u>אינטרסים של שחקן</u>: מקבל פרס אם מכריז על מספר שהוא השלם הקרוב ביותר לשני שליש הממוצע; מקבל 0 אחרת.

<u>טענה</u>: למשחק שיווי משקל יחיד בו כל השחקנים מכריזים על המספר 1.

<u>הוכחה</u>: נניח שבוקטור ההכרזות יש שחקן שמנחש מספר גדול מ-1, ונסתכל על שחקן שמנחש את המספר הגבוה ביותר. מכיוון שהוא מנחש את המספר הגבוה ביותר, ממוצע ההכרזות הוא לכל היותר הכרזתו והמספר השלם הקרוב לשני שליש הממוצע של ניחושי השחקנים קטן ממש מהכרזתו ולכן הוא לא זוכה בפרס. מאידך קיים מספר (קטן יותר) שאם יציע אותו יוכל לזכות בפרס.

מכאן שבשיווי משקל אף שחקן לא ינקוב במספר גדול מ-1.

מאידך "כל השחקנים מכריזים 1" הוא שווי משקל: שני שליש הממוצע הוא 2/3, ואכן 1 הוא המספר השלם הקרוב ביותר, כולם מקבלים את הפרס ולאף שחקן לא כדאי לסטות.

4. שני שחקנים עומדים לשחק את קרב המינים (שתואר בכיתה): כל שחקן צריך לבחור בין "ללכת ל- A" לבין "ללכת ל- B", שחקן 1 מעוניין להפגש ב-A ושחקן 2 ב-B. בטרם החלטתם שולח שחקן 1 מסר לשחקן 2. המסר יכול להיות "אלך ל- A" או "אלך ל- B".

א. בנה משחק מטריציוני שיתאר את שלב שליחת ההודעה וההחלטה לאן ללכת באפן הבא:

אסטרטגיה לשחקן 1 תהייה זוג של הכרזה ופעולה (דהיינו לשחקן 1 יש 4 אסטרטגיות אפשריות).

אסטרטגיה לשחקן 2 תהיה תכנית מה יעשה אם ישמע את ההכרזה "אלך ל-A" ומה יעשה אם ישמע את ההכרזה "אלך ל-B" (גם לו 4 אסטרטגיות אפשריות).

הנח שהעדפותיו של כל שחקן הן כאלה שבלי קשר להכרזה הוא מעדיף להפגש במקום האהוב עליו, על פני האפשרות להפגש במקום הפחות אהוב עליו. האפשרות הגרועה ביותר בשביל כל שחקן היא שלא ייפגשו כלל.

ב. חשב את שוויי המשקל של נאש במשחק זה.

א. כפי שראינו בכיתה, העמודות מתארות את האסטרטגיות של שחקן 2, השורות את האסטרטגיות של שחקן 1 ובתוך כל תא המספר השמאלי מציין את התועלת של שחקן 1 והימני את התועלת של שחקן 2.

שחקן 2 / שחקן 1	אלך לאן ששחקן 1 יכריז	אלך בכל מקרה ל-A	אלך הפוך מההכרזה של שחקן 1	אלך בכל מקרה ל-B
אכריז "אלך ל-A", אלך ל-A	3,1	3,1	0,0	0,0
אכריז "אלך ל-A", אלך ל-B	0,0	0,0	1,3	1,3
אכריז "אלך ל-B", אלך ל-A	0,0	3,1	3,1	0,0
אכריז "אלך ל-B", אלך ל-B	1,3	0,0	0,0	1,3

ב. שוויי המשקל של נאש מסומנים בטבלה בצבע. קל במיוחד למצוא את ש"מ נאש במטריצה, כיוון שלכל תא כל שצריך לבדוק הוא האם יש תא אחר באותה העמודה שהתשלום בו גדול ממש עבור שחקן השורות, או אם יש תא אחר באותה השורה שהתשלום בו גדול ממש עבור שחקן העמודות. אם אין אף תא כזה, צמד האסטרטגיות שמייצג התא מהוות שיווי משקל של נאש.

כמו במשחק המקורי, ללא ההכרזה, גם כאן כל תוצאה שבה השניים לא נפגשים לא מהווה שיווי משקל. בנוסף, נשים לב שהיכולת להכריז מה יעשה אינה מבטיחה לשחקן 1 שבכל שיוויי המשקל הם יילכו ל-A (כפי שאולי ניתן היה לצפות), אולם היא כן פוסלת חלק מהתוצאות שבהן השניים נפגשים ב-B: אם הפעולה של שחקן 2 תלויה במה שמכריז שחקן 1 (זהה או הפוכה להכרזה) אז הוא יכול להבטיח שייפגשו ב-A באמצעות ההכרזה, ושחקן 2 לא ירצה לשנות את פעולתו.