

1. הנח שקיימות שתי אלטרנטיבות בלבד. לכל פרט יש העדפה על שתי האלטרנטיבות. שיטת הכרעה חברתית קובעת עבור כל פרופיל של העדפות הפרטים מהי ההעדפה החברתית כפונקציה של העדפות הפרטים. הנח שבחברה מספר אי זוגי של פרטים.

א. הראה לפחות שתי שיטות שונות שאינן מתייחסות לכל הפרטים באופן זהה.

שיטת הדיקטטור – ההעדפה החברתית נקבעת לפי ההעדפות של אחד הפרטים, נאמר פרט מספר 2. השיטה אינה מתייחסת לכל הפרטים באופן זהה, כיוון שאם פרט 2 משנה את העדפותיו אז ההעדפה החברתית משתנה, אך אם כל פרט אחר, למשל פרט 3, משנה את העדפותיו ההעדפה החברתית לא משתנה.

ראשון בין (לא) שווים – ההעדפה החברתית קובעת כאלטרנטיבה מועדפת את זו המועדפת על די רוב הפרטים כאשר לאחד הפרטים (יושב הראש) ניתן משקל של שלושה חברים.

מובן שהשיטה אינה מתייחסת לכל הפרטים באופן זהה. נניח שבחברה יש 5 פרטים, 1 הוא יושב הראש. די בכך ש-1 וחבר אחד נוסף יעדיפו אלטרנטיבה מסוימת כדי שהיא תקבע להיות האלטרנטיבה החברתית המועדפת. וכמובן אין זה עבור מצב בו שני פרטים אחרים (שאינם כוללים את 1) מעדיפים אלטרנטיבה מסוימת.

ב. הראה שיטה שאינה מתייחסת לשתי האפשרויות באופן זהה.

רוב יחסי - אם שתי האפשרויות הן א' ו-ב', אז אפשרות א' נבחרת אם לפחות $2/3$ מהפרטים מעדיפים אותה על פני ב'.

ג. (חלק יותר קשה) הוכח ששיטת ההכרעה לפי הרוב הינה השיטה היחידה, המתייחסת לכל הפרטים באופן זהה, מתייחסת באופן סימטרי לשתי האפשרויות, ו"מונוטונית" במובן שאם בפרופיל מסוים החברה מעדיפה את x על פני y אז היא תעדיף ממש את x על פני y אם אחד מהפרטים שהעדיף את y שינה דעתו והוא מעדיף את x .

טענה זו מורכבת משני חלקים – הראשון הוא ששיטת הרוב כאשר יש שתי אפשרויות אכן מקיימת את תכונות אלה (ובכך נוכיח קיום של שיטה כלשהי המקיימת את התכונות), והשני הוא שהיא היחידה שמקיימת אותן.

לפני שנפנה להוכיח את הטענה נזכר ששיטת הרוב "עובדת" כאשר יש שתי אפשרויות בלבד, כיוון שבמקרה כזה לא יכולים להיווצר מעגלים של העדפות (לא ייתכן שגם יהיה רוב שמעדיף את x על y וגם רוב שמעדיף את y על x). (ההפך).

חלק ראשון

אנונימיות - שיטת הרוב מתייחסת לכל הפרטים באופן זהה כי כל פרט שווה קול אחד, ולא משנה מה שמו.

ניטרליות - שיטת הרוב מתייחסת באופן סימטרי לשתי האפשרויות כי נניח שבפרופיל העדפות מסוים הרוב הוביל להעדפת x על y , אז המשמעות היא שיותר פרטים מעדיפים את x על y . כעת, אם כל פרט יהפוך את העדפותיו אז בפרופיל החדש יהיו יותר פרטים שמעדיפים את y על x ולכן ההעדפה החברתית תתהפך.

מונוטוניות - השיטה מונוטונית כיוון שאם בפרופיל מסוים החברה העדיפה את x על y משמע שמספר המעדיפים את x היה גדול ממספר המעדיפים את y . בפרופיל אחר כל מה שהשתנה הוא שפרט אחד שקודם העדיף את y כעת מעדיף x , משמע שבפרופיל החדש מספר המעדיפים את x עלה באחד ומספר המעדיפים את y קטן באחד, ולכן יש רוב לטובת x והיא האפשרות המועדפת.

חלק שני

נניח שהשיטה היא שיטה כלשהי (לאו דווקא שיטת הרוב) המקיימת את שלושת התנאים. לשם הפשטות נאמר שיש חמישה פרטים - 1,2,3,4,5 - ושתי האפשרויות הן א' ו-ב' (ההוכחה עובדת גם למספר אי-זוגי כלשהו של פרטים).

נסתכל על שני פרופילים של העדפות, A ו-B: בפרופיל A יש שלושה פרטים שמעדיפים את א' לעומת שניים שמעדיפים את ב' (בטבלה מתוארת האפשרות המועדפת. מכיוון שיש רק שתי אפשרויות, זה מספיק לתיאור ההעדפות של הפרט), ובפרופיל B יש שלושה פרטים שמעדיפים את ב' לעומת שניים שמעדיפים את א':

	5	4	3	2	1	
A	א	א	ב	א	ב	
B	א	א	ב	ב	ב	

מכיוון שלעומת A ב-B פרט 2 שינה את העדפותיו לטובת ב', ממונוטוניות נובע שאם במצב A החברה העדיפה את ב', אז במצב B, ב' עדיפה ממש על א'. בכיוון ההפוך כשנשווה את A לעומת B, אז פרט 2 הפך את העדפותיו לטובת א'. כלומר, ממונוטוניות נובע שאם במצב B החברה העדיפה את א', אז במצב A א' עדיפה ממש.

כעת נצא מתוך B ונסדר את שמות הפרטים אחרת בפרופיל B', כך שהעדפותיהם יהיו הפוכות לעומת A. בזכות תכונת האנונימיות, החלפת ההעדפות בין הפרטים לא תשנה את ההעדפה החברתית, וההעדפה ב-B' זהה להעדפה ב-B – בשני הפרופילים יש שלושה פרטים שמעדיפים את ב' ושניים שמעדיפים את א'.

	5	4	3	2	1	
A	א	א	ב	א	ב	
B'	ב	ב	א	ב	א	

מניטרליות, מכיוון שהעדפות הפרטים הפוכות ב-A לעומת B', נובע שבמצב A ההעדפה החברתית הפוכה מאשר במצב B'. לא יכול להיות שבמצב A ב' מועדפת על א' (גם לא חלש), כי אז לפי הפסקה הקודמת אפשרות ב' מועדפת על א' גם ב-B', בסתירה לניטרליות. מאותו הנימוק, לא ייתכן שבמצב B א' מועדפת על ב'. כלומר, האפשרות היחידה היא שבמצב A החברה מעדיפה ממש את א' ובמצב B ממש את ב'.

כעת, לכל מצב כלשהו של העדפות הפרטים שבו מספר התומכים ב-א' גדול יותר לעומת מצב A, בזכות אנונימיות אנחנו יכולים לסדר את שמות הפרטים כך שמי שהעדיף את א' במצב A מעדיף אותה גם במצב החדש מבלי לשנות את ההעדפה החברתית. אם נפעיל את תכונת המונוטוניות מספר פעמים כנדרש נגיע למסקנה ש-א' היא האפשרות המועדפת. אותו הטיעון נכון לגבי ב' אם מספר התומכים בה גדול יותר ובהשוואה למצב B'.

קיבלנו שאם מספר התומכים ב-א' גדול ממספר התומכים ב-ב' אז ההעדפה החברתית היא לטובת א', ולהיפך. כלומר, שאם יש שיטה המקיימת את תנאים אלה היא עונה לעקרון הרוב, וראינו ששיטת הרוב מקיימת תנאים אלה.

2. שלוש אלטרנטיבות פוליטיות הינן שמאל, מרכז וימין.

על קבוצה זו יש ששה יחסי העדפה אפשריים. הנח ששתי ההעדפות בהן "מרכז", היא האפשרות הנחותה ביותר אינן אפשריות (דנו בהנחה זו בשיעור האחרון). הראה שאם בחברה יש מספר אי זוגי של פרטים וההעדפה החברתית בין כל שתי אלטרנטיבות נקבעת על ידי כלל הרוב, אז (בניגוד למה שקרה בפרדוקס הבחירה) השיטה תשרה יחס העדפה (ללא מעגל).

אם יש מעגל אז מרכז נחות לפי ההעדפה החברתית מאחת האלטרנטיבות האחרות, נאמר ימין. אבל אם יש לחות שני פרטים המעדיפים את הימין על המרכז אז (בהינתן המגבלה שמרכז אינה יכולה להיות האלטרנטיבה הגרועה ביותר) הם גם מעדיפים את המרכז על השמאל ולכן את הימין על השמאל. מכאן שיש רוב שמעדיף את הימין על השמאל (ואין מעגל בהעדפה החברתית).

3. קבוצת אנשים מתווכחת על עמדותיהן של שלוש מפלגות X ו-Y ו-Z. לכל פרט יש דעה אילו מהמפלגות הן "אותו הדבר". יכול להיות שפרט אחד סבור שכל המפלגות מובחנות, יכול להיות שפרט חושב שכל המפלגות "זרות" וייתכן שפרט חושב שאחת המפלגות מובחנת משתיים אחרות שהן "אותו הדבר". שיטה לצרף את דעותיהם של הפרטים צריכה לומר לנו מה הקבוצה חושבת ככלל לגבי אילו מפלגות הן אותו הדבר כפונקציה של עמדות כל הפרטים.

א. התייחס לשיטה שקובעת ששתי אלטרנטיבות הן "אותו הדבר" אם רוב הפרטים חושבים שהן אותו הדבר. הסבר מדוע שיטה זו עשויה ליצור "תוצאות מוזרות" במובן שאפשרות אחת תקבע חברתית כדומה לשנייה, השנייה דומה לשלישית, אך הראשונה לא דומה לשלישית".

נסתכל על מקרה בו יש שלושה פרטים – 1,2,3. ודעותיהם הן:

1 חושב שכל המפלגות הן אותו דבר.

2 חושב ש-X שונה, אבל Y ו-Z הן אותו הדבר.

3 חושב ש-Z שונה, אבל X ו-Y הן אותו הדבר.

	3	2	1
X		X	X
Y		Y	Y
Z		Z	Z

לפי כלל הרוב X היא אותו הדבר כמו Y (כי 1 ו-3 חושבים כך), Y אותו הדבר כמו Z (כי 1 ו-2 חושבים כך) אבל X ו-Z אינן אותו הדבר (כי רק 1 חושב שהן אותו הדבר). קיבלנו מצב מוזר לפיו X היא אותו הדבר כמו Y שאותו הדבר כמו Z, אבל X ו-Z שונות.

ב. הצע שלוש שיטות ש"עובדות תמיד".

דיקטטור – שתי מפלגות הן אותו הדבר רק אם פרט מסוים i חושב שהן אותו הדבר. השיטה תעבוד, כי המחשבות של כל פרט, ובפרט של הדיקטטור, הן כאלה שאינן "מוזרות" – כלומר, אם פרט חושב ש-X דומה ל-Y ו-Y ל-Z אז הוא חושב שגם X דומה ל-Z.

פה-אחד – שתי מפלגות הן אותו הדבר רק אם כל הפרטים חושבים שהן אותו הדבר. השיטה תעבוד תמיד גם כאן כי המחשבות של כל הפרטים אינן "מוזרות" (ראו לעיל).

מומחה חיצוני – מומחה חיצוני (בעל מחשבה לא מוזרה) קובע אילו מפלגות הן אותו הדבר, בלי קשר למחשבות הפרטים.