

### שיטות דרוג

מספר שחקנים (נקרא לו  $n$ ) עומדים להשתתף בטורניר. כל שני שחקנים בטורניר משחקים משחק בודד ותוצאת המפגש היא (כמו בכדורסל) ניצחון של אחד מהשניים (אין תיקו). אתה מתבקש לעצב את השיטה בה ידורגו השחקנים בסופו של הטורניר. בדרוג מותר ששחקנים שונים ידורגו באופן שווה. כמובן שהשיטה שתציע אמורה "לעבוד" תהינה תוצאות הטורניר אשר תהינה.

א. עולה על דעתך להציע שהשחקנים ידורגו לפי מספר הניצחונות.

בדוק האם שיטה זו מקיימת את התכונות הבאות:

אנונימיות: השיטה מתייחסת בצורה שווה לכל השחקנים.

מונוטוניות: אם במצב עניינים מסוים שחקן אחד מדורג באותו מקום או גבוה יותר משחקן ב, אז במצב עניינים אחר בו השתנתה רק תוצאת משחק אחד ושחקן א ניצח שחקן שהוא הפסיד לו במצב העניינים הראשון אז א ידורג מעל ב.

אי תלות: הדרוג היחסי של שני שחקנים נקבע רק על ידי תוצאות המשחקים שבהם הם משתתפים.

ראשית, נתאר את השיטה ביתר פירוט: נניח שהשחקנים נקראים  $1, 2, \dots, n$ . כל שחקן משחק פעם אחת מול כל אחד מיריביו. על כל ניצחון שחקן מקבל נקודה, על כל הפסד הוא לא מקבל דבר (כלומר, מקבל 0 נקודות). לבסוף, נדרג את השחקנים מהניקוד הגבוה לנמוך (ייתכן שיותר משחקן אחד יהיה באותו הדירוג). נראה שהשיטה מקיימת את כל שלוש התכונות:

אנונימיות: ברור שמתקיימת כיוון שהדירוג תלוי רק במספר הניצחונות, ואינו תלוי בשמו של מי שניצח בהם. אם שחקן אחד ניצח יותר משחקים משחקן אחר, אז הוא ידורג גבוה יותר.

מונוטוניות: אם שני שחקנים היו מדורגים לפחות באותו המקום, משמע שלשחקן אחד היה מספר ניצחונות לפחות כמו לאחר. לכן, אם ניצח בעוד משחק מספר הניצחונות שלו יהיה ממש גדול יותר משל האחר (שכן האחר ניצח באותו מספר משחקים, או אפילו באחד פחות).

אי תלות: השיטה מקצה ניקוד לכל שחקן, התלוי אך ורק במספר הניצחונות במשחקים שבהם השתתף (משחקים שבהם שיחקו אחרים אינם משפיעים על הניקוד). הדירוג היחסי של שני שחקנים נקבע לפי השוואת הניקוד שלהם בלבד ואינו תלוי בניקוד השחקנים האחרים, ולכן השיטה מקיימת אי תלות.

**ב. יש הטוענים שיש מגרעת רצינית לשיטה שתוארה בסעיף הקודם. יתכן ששחקן אחד ניצח שחקנים "חזקים" ואחד ניצח שחקנים "חלשים" ובכל זאת הם ידורגו במקום שווה. הסבר את הטענה. נסח שיטת דרוג שתהיה תגובה הולמת לתלונה זו.**

משמעות הטענה היא שלמשל יכול להיות ששחקן אחד ניצח את 3 השחקנים שניצחו במספר הגדול ביותר של משחקים, ושחקן אחר ניצח את 3 השחקנים שניצחו במספר הניצחונות הקטן ביותר. שניהם ידורגו באופן זהה, עם 3 ניצחונות, אך יש לנו תחושה שהשחקן הראשון ראוי לדירוג גבוה יותר (למשל, מי שמנצח את אלוף העולם באגרוף הוא אלוף העולם החדש באגרוף, אך כמובן שלא כל מי שמנצח באיזשהו קרב אגרוף נהיה אלוף העולם).

ישנן מספר דרכים לענות על תלונה זו, נתאר כאן שיטה פשוטה שבה ניצחון על שחקן "חזק" מקנה יותר נקודות מאשר ניצחון על שחקן "חלש": ניצור את הדירוג בשני שלבים – בשלב הראשון נסכם לכל שחקן את מספר הניצחונות בטורניר, בשלב השני הניקוד שיתרום ניצחון על יריב לניקוד הכולל של השחקן יהיה מספר הניצחונות של יריב זה במהלך הטורניר כולו (כך, ניצחון על שחקן שניצח הרבה משחקים במהלך כל הטורניר שווה יותר מאשר ניצחון על שחקן שניצח מעט משחקים), לבסוף נסכם את מספר הנקודות.

כדי להמחיש את השיטה נשתמש בטבלה לכל שלב שכזה, ואז נציג את הדירוג. בטבלה הבאה, נרשום את הניצחונות וההפסדים של כל שחקן, כאשר התא מתאר האם שחקן השורה ניצח או הפסיד לשחקן העמודה:

	מספר הניצחונות של השחקן	4	3	2	1
1	2	הפסד	ניצחון	ניצחון	
2	1	הפסד	ניצחון		הפסד
3	1	ניצחון		הפסד	הפסד
4	2		הפסד	ניצחון	ניצחון

נשים לב ששחקן 2 ניצח רק את שחקן 3, ושחקן 3 ניצח רק את שחקן 4 (שבעצמו ניצח פעמיים). כלומר, שחקן 2 ניצח שחקן חלש ו-3 ניצח שחקן חזק. בשיטה המקורית שניהם ידורגו באותה הרמה. באותו האופן 1 ו-4 ניצחו כל אחד שני שחקנים, אבל 4 ניצח את 1, ולכן יש לנו תחושה ש-4 צריך להיות מדורג מעל ל-1.

כעת ניתן לניקוד לניצחון על יריב לפי מספר הניצחונות שלו בטורניר כולו:

	מספר נקודות בטורניר	4	3	2	1
1	2	0	1	1	
2	1	0	1		0
3	2	2		0	0
4	3		0	1	2

כעת נדרג את השחקנים לפי מספר הנקודות: 4 במקום הראשון, 3 ו-1 חולקים את המקום השני ו-2 במקום האחרון. אכן שחקן 3 מדורג מעל שחקן 2, ו-4 מעל 1. נוצר מצב חדש לפיו 1 ניצח יותר משחקים מ-2 אך דירוגם זהה. ייתכן שזה מוצדק וייתכן שלא (לטעמי כן, כיוון שהדבר מייצג את גודל האתגר שבניצחון ולא רק את עצם הניצחון עצמו), ובכל מקרה גם זה ניתן לפתרון אם נגדיל מאוד את הניקוד שמקבלים על עצם הניצחון ונוסיף לו ניקוד לפי "קושי" הניצחון כמו בשיטה המקורית (למשל אם ניצחון יהיה שווה  $(n - 1)^2$  ועוד מספר הניצחונות של היריב אז נקבל שמי שמנצח יותר משחקים בטורניר תמיד ידורג גבוה יותר ממי שניצח פחות).

**ג. נסח שלוש שיטות דרוג נוספות:**

**אחת המקיימת את האנונימיות והמונוטוניות ולא את האי תלות.**

השיטה המתוארת בסעיף ב' עונה על דרישות אלה:

- אנונימיות – אין חשיבות לשמו של השחקן אלא רק למי הוא ניצח. כלומר, אם א' ו-ב' יתהפכו בלוח הניצחונות שלהם הם יתהפכו בדירוגם.
- מונוטוניות – ניצחון מוסיף ניקוד, ולכן אם לשחקן א' היה ניקוד שווה או גבוה מל-ב', אז ניצחון נוסף עבורו מגדיל את הניקוד שלו ולכן דירוגו יהיה ממש גבוה יותר (הניקוד של שחקן ב' יישאר אותו הדבר או ירד).
- אי תלות – לא תתקיים. הרי הרעיון מאחורי השיטה הוא שחשוב כמה ניצחונות היו לכל אחד מהיריבים שניצחת, ולא רק מהי תוצאת המשחק ביניכם. למשל, אם נסתכל על אותו המצב שמתואר בטבלה, אך 2 מפסיד גם ל-3, אז ניצחון עליו לא שווה דבר, וכעת 1, 3 ו-4 ידורגו במקום הראשון ו-2 בשני. כלומר, דירוגו של 1 השתנה בעקבות משחק שהוא לא שיחק בו.

מספר נקודות בטורניר	4	3	2	1	
2	0	1	0		1
0	0	0		0	2
2	2		0	0	3
2		0	0	2	4

**אחת המקיימת את האנונימיות ואי התלות אבל לא את המונוטוניות.**

נדרג את כל השחקנים במשותף במקום הראשון ("מדליה על השתתפות").

- אנונימיות – טריוויאלי – לא משנה מה שם השחקן, דירוגו לא מושפע.
- מונוטוניות – לא מתקיימת כיוון שאם שני שחקנים דורגו באותה הרמה, ניצחון נוסף לשחקן א' לא יעלה אותו בדירוג.
- אי תלות – מתקיימת כיוון שלמי שניצח בכל אחד מהמשחקים אין כל השפעה על הדירוג, ולכן גם לא למי שניצח במשחקים שלא שוחקו על ידי השחקן.

**אחת המקיימת את המונוטוניות והאי תלות אבל לא את האנונימיות.**

נדרג את השחקנים לפי מספר הניצחונות, ובמקרים של שוויון במספר הניצחונות, נדרג את השחקנים כך שמי ששמו נמוך יותר ידורג גבוה יותר. למשל, אם 3 ו-5 ניצחו את אותו מספר המשחקים, אז 3 ידורג ממש מעל 5.

- אנונימיות – לא מתקיימת. בהמשך לדוגמה, אם כעת ל-5 יקראו 3 ול-3 יקראו 5, אז דירוגם יתהפך.
- מונוטוניות – בשיטה זו אין דירוג זהה, אלא רק דירוג מעל. לכן, אם שחקן דורג מעל שחקן אחר, משמע שהשחקן הזה או ניצח יותר משחקים ולכן אם ניצח עוד משחק, ידורג עדיין גבוה יותר; או שניצח את אותו מספר המשחקים אך שמו קטן יותר, ולכן אם ניצח עוד משחק הוא ידורג גבוה יותר מהשחקן האחר.
- אי תלות – מספר הניצחונות של השחקנים האחרים אינו משנה.

#### ד. רעיונות נוספים?

נחלק את השחקנים לשתי קבוצות, ובכל קבוצה ניצור דירוג לפי מספר הניצחונות מול יתר שחקני הקבוצה בלבד. נדרג את השחקן האחרון בקבוצה הראשונה מעל השחקן הראשון בקבוצה השנייה. שיטה זו לא תקיים אנונימיות ולא מונוטוניות, אך תקיים אי-תלות.

נחלק את השחקנים לזוגות (אם המספר אי-זוגי אז יישאר שחקן בודד), כל מי שניצח מול בן-זוגו ידורג ראשון וכל מי שהפסיד ידורג שני (אם יש שחקן בודד הוא ידורג ראשון). גם שיטה זו תקיים רק אי-תלות.

נסכם לכל שחקן את מספר הניצחונות. כל מי שניצח יותר מממוצע הניצחונות ידורג במקום הראשון וכל מי שניצח כמו הממוצע או פחות ידורג במקום השני. שיטה זו לא תקיים מונוטוניות ולא אי-תלות אך תקיים אנונימיות.