

1. בחברה  $2n$  פרטים. הפרטים אמורים להתחלק לזוגות (למשל לצורך הכנת תרגילים לשבוע הבא). לכל פרט דרוג העדפות של  $2n-1$  הפרטים האחרים שיכולים להיות בני זוג. התאמה היא חלוקה של הפרטים ל- $n$  זוגות. התאמה היא יציבה אם אין שני פרטים שמעוניינים להיות אחד עם השני יותר מאשר עם בני זוגם בחלוקה. בנה דוגמה של ארבעה פרטים (עם יחסי העדפה של כל אחד מהם על השלושה האחרים) שאין בה התאמה יציבה.

	1	2	3	4
עדיפות ראשונה	2	3	1	3
עדיפות שנייה	3	1	2	2
עדיפות שלישית	4	4	4	1

הטבלה מתארת את עדיפויות כל אחד מארבעת הפרטים. כעת נראה שאין אף התאמה יציבה:

(1,2) ו-(3,4) לא יציב כי 2 מעדיף את 3 על 1, ו-3 מעדיף את 2 על 4

(1,3) ו-(2,4) לא יציב כי 1 מעדיף את 2 על 3, ו-2 מעדיף את 1 על 4

(1,4) ו-(2,3) לא יציב כי 1 מעדיף את 3 על 4, ו-3 מעדיף את 1 על 2.

2. בשיעור הראנו שהאלגוריתם של Gale-Shapley מייצר הקצאה שהיא הטובה ביותר עבור כל בן מתוך כל ההקצאות היציבות האפשריות. הראה שמכאן נובע שאין הקצאה יציבה אחרת הגרועה מבחינת מישהי מהבנות מהקצאת GS.

נניח שיש הקצאה יציבה אחרת WS שהיא גרועה יותר מבחינת הבת  $w$ . כלומר, ב-GS היא שודכה ל- $m$  והעדיפה אותו על השידוך ב-WS. מכיוון שההקצאה GS היא הטובה ביותר לגברים, משמע ש- $m$  מעדיף את  $w$  על פני זוגתו ב-WS. מכיוון שב-WS  $m$  ו- $w$  מעדיפים להיות זה עם זה מאשר עם שידוכם, ההקצאה לא יציבה - בסתירה להנחה.

3. למד את האלגוריתם המודגם ב- <http://mathsite.math.berkeley.edu/smp/smp.html>

במה הוא שונה מהאלגוריתם שתואר בכיתה? (מדוע הוא מביא תמיד לתוצאה זזה? חלק קשה מדי. הושמט)

האלגוריתם האחר שונה בכך שהוא מבוצע בתורות שבהם כל פעם גבר אחד בלבד מציע הצעה לאישה או אישה אחת דוחה מחזר אחד בלבד, ובכך שלכל היותר שני גברים יכולים להציע עצמם לבחורה. הוא מביא לתוצאה זזה מכיוון שבשני האלגוריתמים קבוצת הגברים שמחזרת אחר כל אישה היא זזה, ומתוכה האישה בוחרת את המועדף עליה ביותר בלי חשיבות לסדר המציעים:

#### 4. התבונן בפרופיל ההעדפות הבא:

m1:  $w_1 > w_2 > w_3$

m2:  $w_2 > w_1 > w_3$

m3:  $w_1 > w_2 > w_3$

w1:  $m_2 > m_1 > m_3$

w2:  $m_1 > m_2 > m_3$

w3:  $m_1 > m_2 > m_3$

הראה ש-  $w_1$  יכולה להרוויח אם יופעל האלגוריתם של GS על ידי דווח על העדפות שונות מהעדפותיה האמתיות.

אם כל הפרטים מדווחים אמת אז תוצאת האלגוריתם היא  $(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3)$ :

1.  $m_1$  ו- $m_3$  מציעים ל- $w_1$ .  $m_2$  מציע ל- $w_2$ .  $w_1$  בוחרת ב- $m_1$ .  $m_3$  דחוי.
2.  $m_3$  מציע לבאה בתור  $w_2$ , והיא מצידה בוחרת ב- $m_2$ .
3.  $m_3$  מציע לבאה בתור (והאחרונה)  $w_3$ .
4. לכל בחורה יש מחזר אחד, והאלגוריתם מסתיים.

כלומר,  $w_1$  משודכת לעדיפות השנייה שלה, אך אם  $w_1$  מדווחת את ההעדפות  $m_1 > m_3 > m_2$  אז האלגוריתם יביא להקצאה  $(m_1, w_2), (m_2, w_1), (m_3, w_3)$  שבה היא משודכת לעדיפותה הראשונה:

1.  $m_1$  ו- $m_3$  מציעים ל- $w_1$ .  $m_2$  מציע ל- $w_2$ .  $w_1$  בוחרת ב- $m_3$ .  $m_1$  דחוי.
2.  $m_1$  מציע ל- $w_2$ , והיא מצידה בוחרת ב- $m_1$ .
3.  $m_2$  הדחוי מציע ל- $w_1$ , והיא בוחרת ב- $m_2$ .
4.  $m_3$  שנדחה מציע ל- $w_2$ , אך היא נשארת עם  $m_1$ .
5.  $m_3$  מציע לבאה בתור (והאחרונה)  $w_3$ .
6. כעת לכל בחורה יש מחזר אחד, והאלגוריתם מסתיים.

#### 5. (שאלה נוספת שנשאלה בכיתה): הוכח ששידוך יציב הוא יעיל פרטו.

נאמר ש-ST הוא שידוך יציב, ונניח בשלילה שהוא אינו יעיל פרטו. כלומר קיים שידוך אחר EF שבו כל פרט שמשודך לבן-זוג אחר מב-ST מרוצה יותר שכן הוא מעדיף את זוגו מ-EF על פני זוגו ב-ST. נניח שב-EF הזוג  $(m, w)$  הוא זיווג שונה מאשר ב-ST. מכיוון ש-ST שולט פארטו על ST, משמע ש- $m$  מעדיף את  $w$  על שידוכו ב-ST, וגם  $w$  מעדיפה את  $m$  על שידוכה ב-ST – משמע ש-ST אינה יציבה. סתירה.