אגדות כלכליות/אריאל רובינשטיין/תשע"ג

תרגיל 2: שווי המשקל של הג'ונגל

1. דון בתהליך הדינמי הבא:

נקודת פתיחה: כל הפרטים נמצאים ב"רחוב".

בשלב $t+1$: כל פרט הולך לבית הטוב ביותר מבחינתו מתוך הבתים שבשלב t אינם תפוסים, שתפוסים על ידי פרט חלש ממנו או הבית שהוא עצמו תופס. במידה ולבית מסוים מגיע יותר מפרט אחד, נשאר בבית החזק שבהם והשאר "נזרקים לרחוב".

הראה שהתהליך בהכרח "מתכנס" לשווי משקל של הג'ונגל. כלומר, שלתהליך יש סוף, והתוצאה בסוף מהווה שיווי משקל של הג'ונגל.

<u>המחשה</u>: נניח שבתקופה הראשונה פרט 2 הלך לבית "פנטהאוז", המועדף ביותר גם על 1, הפסיד אותו ל- 1 ונזרק לרחוב. עם זאת, פרט 7 תפס בתקופה הראשונה את ביתו "במדבר", ונאמר שבית במדבר הוא המועדף על ידי 2 מבין כל הבתים פרט לפנטהאוז. לכן, בתקופה השנייה פרט 2 ילך לבית במדבר ויגרש משם את 7 (ואת מי שעוד עלול להתמודד איתם על הבית כי 1 לא יעזוב את הפנטהאוז ו-2 הוא החזק מבין הנותרים).

<u>הוכחה</u>: נראה שפרט t יתפוס לכל המאוחר בתקופה t את הבית שהיה מקבל בפרוצדורה שתוארה בהוכחת משפט הקיום ושלא יזוז משם בדינמיקה המתוארת.

פרט 1 (החזק ביותר) בוחר וזוכה בבית הטוב ביותר בעיניו כיוון שכל הבתים ריקים והוא החזק ביותר. הוא לא יעזוב אותו משם והלאה כילא יגיעו אליו מתחרים כי הם חלשים ממנו, והוא לא מעוניין באף בית אחר.

נניח שהטענה נכונה עבור 1,... $t-1$ ונראה שהדבר נכון עבור פרט t. בשלב t כל הפרטים החזקים ממנו כבר ממוקמים בבתים מהם לא יזוזו. פרט t בוחר משלב זה ואילך (אולי אף קדם) את הבית המוקצה לו באלגוריתם שתואר בשיעור. מכל הפרטים הבוחרים בשלב זה בבית זה הוא החזק ביותר ולכן יישאר בו. בשלבים המאוחרים יותר איש לא ינסה לנשלו, שכן החזקים יותר כלל לא זזים, והחלשים יותר אינם פונים בדינמיקה המתוארת לבתים המוחזקים על ידי חזקים מהם. לכן משלב t ואילך גם פרט t יימצא תמיד בבית המוקצה לו בשיווי המשקל של הג'ונגל. לפיכך לכל המאוחר משלב n הפרטים יתמקמו בהקצאת שווי המשקל.

2. "סטטיקה השוואתית": השווה בין שני עולמות ג'ונגל השווים בכל (קבוצת הפרטים, קבוצת הבתים וההעדפות) אלא שבעולם אחד מדרג הכוח הוא 1S2S3....SN ובעולם האחר התחלפו הפרטים 6 ו-7 במקומם במדרג הכוח.

איך משפיעה עלייתו בסולם הכוח של החבר 7 על מצבו בשווי המשקל של הג'ונגל?

נסתכל תחילה על ההעדפות המתוארות בטבלה הבאה. ההקצאה בצהוב מתאימה לשווי המשקל של הג'ונגל כשיחס הכוח הינו $1\,S\,2\,S\,3\,S\,4$ ובירוק לעולם אחר בו מתחלפים 2 ו-3 במקומם במדרג הכוח (כלומר המדרג החדש הוא $1\,S\,3\,S\,2\,S\,4$ בשיווי המשקל בירוק). מצבו של 3 השתפר, של 2 הורע ושל 4 השתפר. מצבו של 1 נותר ללא שינוי:

1	2	3	4
A	B	B	B
B	D	A	C
C	C	C	A
D	A	D	D

לעומת זאת, בפרופיל ההעדפות המתואר בטבלה הבאה, מצבו של 3 השתפר, של 2 הורע ושל 4 הורע. גם כאן מצבו של 1 נותר ללא שינוי:

1	2	3	4
A	B	B	D
B	D	A	C
C	C	C	A
D	A	D	B

באופן כללי, שווי המשקל היחיד מושג באמצעות האלגוריתם שתואר בהוכחת משפט הקיום. החלפת המעמד במדרג הכוח בין 7 ו-6 לא יכולה לשנות את הבתים אליהם מגיעים הפרטים 1,...,5. פרט 7 נקרא קודם לבחור מבין כל הבתים למעט אלה שהחזיקו הפרטים 1,..,6 ואילו אחרי חיזוקו הוא נקרא לבחור מתוך קבוצה גדולה יותר המכילה גם את הבית אליו הגיע קדם פרט 6 ולכן מצבו הוטב או נותר אותו הדבר. פרט 6, נקרא עתה לבחור מתוך קבוצה קטנה יותר ולכן מצבו בוודאי שאינו משופר. פרט 8 (או כל פרט חלש מ-7) נקרא עתה לבחור מתוך קבוצה העשויה להיות שונה מהקבוצה ממנה בחר קודם ולכן כמו שראינו בדוגמא לעיל מצבו יכול להשתנות בכל כוון שהוא.

3. הראה שאם לפרטים יש העדפות עם "אדישויות" ייתכן שתוצאת שווי המשקל של הג'ונגל לא תהיה יעילה-פרטו במובן שתהיה הקצאה אחרת העדיפה על לפחות אחד מהפרטים ואינה גרועה לאף אחד מהם.

נראה זאת באמצעות דוגמה: יחס הכוח בין הפרטים הינו $1 S 2 S 3$. פרט 2 מוצא את C נחות ביותר והוא אדיש בין A ו-B.

1	2	3
C	B,A	A
A	C	C
B		B

במקרה זה יש שני שיוויי משקל של הג'ונגל:

- A-3 ;B-2 ;C-1

זה שיווי משקל של הג'ונגל כי כל פרט נמצא בבית מועדף עליו ביותר מתוך קבוצת כל הבתים.

- B-3 ;A-2 ;C-1 (צבוע בתכלת).

נוודא שזהו שיווי משקל של הג'ונגל: 1 ו-2 מחזיקים כל אחד בבית המועדף עליהם ביותר מבין כל הבתים ולכן גם מבין אלה המוקצים לחלשים יותר. 3 הוא הכי חלש, ולכן אינו יכול להפר את שווי המשקל.

זו אינה הקצאה יעילה, כי ההקצאה הראשונה עדיפה ממש לפרט 3 ואינה גרועה יותר לפרטים 1 ו-2.

4. נניח שכדי למנוע מלחמות מיותרות הוחלט בג'ונגל שכל פרט ישלח למחשב מרכזי את העדפותיו על קבוצת הבתים והמחשב, שיודע גם את יחסי הכוחות בין הפרטים, יחשב את שווי המשקל של הג'ונגל ויקצה לפיו את הפרטים לבתים. האם יתכן שלאחד הפרטים בג'ונגל כדאי להתחזות כאילו יש לו יחס העדפה שונה מיחס ההעדפה האמיתי שלו?

המחשב מוצא את שיווי המשקל של הג'ונגל. כל הפרטים החזקים מהפרט (נאמר פרט 7) שמשנה את העדפותיו, מוסיפים ומקבלים את הבית שקיבלו אילו 7 לא שינה את העדפותיו. פרט 7 כאילו נקרא לבחור מתוך אותה קבוצת בתיים שהותירו החזקים ממנו ולכן לא יתכן שאחרי ש-7 עיוות את העדפותיו המחשב ייבחר עבורו בית טוב יותר מהבית שהוא באמת המועדף עליו ביותר מתוך קבוצה זו.

5. הרחב את מודל הג'ונגל למצב בו מספר הבתים והפרטים אינם שווים. הקצאה במודל זה תהיה פונקציה מקבוצת הפרטים לקבוצה $H \cup \{street\}$ המקיימת שאין שני פרטים התופסים אותו בית (יותר מפרט אחד יכולים להימצא ברחוב). הנח שלפרטים העדפות ללא אדישויות. הראה שבמודל המורחב שווי המשקל של הג'ונגל קיים.

ראשית נגדיר מהו שיווי משקל:

הקצאה a מהווה שיווי משקל של הג'ונגל-והרחוב אם: (1) אין שני פרטים i ו-j כך ש-iSj ואילו $a_j \succ_i a_i$ כאשר $a_j, a_i \in H \cup \{street\}$; וגם (2) אין אף פרט i ובית לא מאוכלס h כך ש- $h \succ_i a_i$.

נוכיח קיום באמצעות כך שנראה שיש פרוצדורה שמובילה להקצאה שמהווה שיווי משקל: נניח שיש N בתים ו-I פרטים. ונחלק למקרים:

<u>$N \le I$ (מספר הבתים קטן או שווה למספר הפרטים)</u>: אם $\mathrm{N} = 0$ אז ההקצאה האפשרית היחידה היא שכל הפרטים ברחוב. נניח ש-$\mathrm{N} > 0$. ניתן לפרט 1 (החזק ביותר) לבחור את הבית a_1 שהוא הכי מעדיף מבין כל הבתים והרחוב (אנו מניחים שכל הפרטים מעדיפים לגור ברחוב פחות מאשר בבית כלשהו), כך $a_1 \succ_1 h$ כאשר $h \neq a_1$. כעת, ניתן לפרט 2 לבחור בית מבין כל הבתים פרט לזה ש-1 כבר תפס, וכן הלאה עד לפרט *N*. נקצה את הפרטים שמספרם גדול מ-*N* (אם יש כאלה) לגור ברחוב. קיבלנו הקצאה, כי לכל בית הוקצה פרט אחד, ולרחוב הוקצה מספר כלשהו של פרטים. הקצאה זו מהווה שיווי משקל כיוון ש: (1) לא ייתכן שפרט i חושק בבית a_j שמחזיק פרט חלש ממנו, כיוון שאם היה מעדיף אותו היה בוחר בו בתורו. אם i גר ברחוב, משמע שכל הבתים הוקצו לפרטים חזקים ממנו, ולכן אין לו מה ליטול מחלשים ממנו. (2) כל הבתים מאוכלסים ולכן התנאי השני מתקיים במובן ריק.

<u>$N > I$ (יותר בתים מפרטים)</u>: נבצע את אותו התהליך (ניתן ל-1 לבחור, ואז ל-2 לבחור מהיתר וכן הלאה). במקרה זה נקבל הקצאה שבה בחלק מהבתים יושב פרט אחד בדיוק, יש בתים ריקים ואף פרט לא נמצא ברחוב. נראה שזה ש"מ: (1) לא ייתכן שפרט i חושק בבית a_j שמחזיק פרט חלש ממנו, כיוון שאם היה מעדיף אותו היה בוחר בו בתורו. (2) לא ייתכן שפרט i חושק בבית פנוי h, כי אם היה מעדיף אותו על פני a_i היה בוחר בו בתורו.

6. איזה משני המנגנונים הבאים הוא לדעתך הוגן יותר:

א. סדר הפרטים נקבע באפן רנדומי (כל הסדרים שווי הסתברות) והפרטים בוחרים את הבתים באופן סדרתי.

ב. מתוך כל ההקצאות הפרטו-יעילות נבחרת אחת באפן רנדומי (כל ההקצאות שוות הסתברות).

אין מדובר בשאלה שתשובה עליה נכונה או אינה נכונה. האינטואיציה שלי לפחות היא שהשיטה הראשונה הוגנת יותר. אני מחזק את האינטואיציה בהתבוננות בפרופיל ההעדפות הבא:

1	**2**	**3**
A	A	A
B	B	C
C	C	B

שיטה א, מובילה בהסתברות 1/3 להקצאה (A,B,C) לפרטים (1,2,3) בהתאמה.

בהסתברות 1/3 להקצאה (B,A,C) ובהסתברויות 1/6 לכל אחת מההקצאות (B,C,A) ו-(C,B,A).

אלו הן ארבע ההקצאות היעלות ולכן שיטה ב תוביל את קבלתה של כל הקצאה בהסתברות ¼.

השיטה השנייה מובילה אם כן לכך שפרט 3 יקבל עתה את האלטרנטיבה המועדפת על ידיו בהסתברות כפולה מכל אחד מהאחרים הגם שהדבר כרוך בכך שקבלתו את A מובילה לכך שאחד משני הפרטים האחרים מקבל את האלטרנטיבה הגרועה ביותר מבחינתו.