

אגדות כלכליות / אריאל רובינשטיין / תשע"ג

תרגיל 1: מנגנוני הקצאה

נתונה קבוצה של פרטים I וקבוצה של בתים H .

מספר הפרטים ומספר הבתים שווה.

לכל פרט יחס העדפה (דרוג שלם) \succsim_i על קבוצת הבתים.

הקצאה היא פונקציה $a: I \rightarrow H$ חד-חד-ערכית ועל (דהיינו כל פרט מופנה לבית יחיד וכל בית נתפס עלי פרט אחד).

הקצאה a יעילה פרטו אם לא קיימת הקצאה אחרת b כך שלכל פרט i עבורו $b(i) \neq a(i)$ מתקיים ש-
 $b(i) \succ_i a(i)$.

במלים אחרות, הקצאה a אינה יעילה פרטו אם קיימת הקצאה אחרת b כך שלכל פרט i עבורו
 $b(i) \neq a(i)$ מתקיים ש- $b(i) \succ_i a(i)$.

פרופיל העדפות מציין את ההעדפה של כל פרט. למשל:

נניח ש- $I = \{1, 2, 3, 4\}$ ו- $H = \{a, b, c, d\}$. נתבונן בפרופיל הבא:

פרט 1	פרט 2	פרט 3	פרט 4	
A	B	B	B	מקום 1
B	C	A	C	מקום 2
C	D	C	A	מקום 3
D	A	D	D	מקום 4

בפרופיל זה יחס ההעדפה של פרט 3 למשל הוא: $B \succ_3 A \succ_3 C \succ_3 D$.

שיטת הקצאה (לא רנדומית) היא פונקציה המתאימה הקצאה יחידה לכל פרופיל של יחסי העדפה.

ההקצאה $a(1) = D, a(2) = A, a(3) = C, a(4) = B$ אינה יעילה-פרטו כי בהקצאה

$b(1) = C, b(2) = D, b(3) = A, b(4) = B$ משתפר מצבו של כל פרט המקבל בית שונה מהבית שהוקצה לו לפי a .

שאלות פשוטות

1. הוכח שהקצאה אינה יעילה פרטו **אם ורק אם** יש קבוצת פרטים $\{i_1, \dots, i_L\}$ כך שאם פרט i_l ($l > 1$) יקבל את הבית שמחזיק i_{l-1} ובנוסף פרט i_l יקבל את הבית שמחזיק i_L , אז כל הפרטים בקבוצה זו ייהנו.
2. בנה דוגמא חדשה של פרופיל יחסי העדפה והקצאה יעילה פרטו כך שאין זוג פרטים שמעוניינים להחליף את הבתים ביניהם.

שאלות פחות פשוטות

3. הוכח שבכל הקצאה יעילה יש פרט אחד שמקבל את הבית המועדף עליו ביותר.
4. בשיעור דברנו על שיטת ההקצאה הבאה. נקבע סדרה שמציינת את הניקוד שמקבל בית לפי דירוג $p_1 = n, p_2 = n-1, \dots, p_n = 1$.
לכל יחס העדפה \succ על קבוצת הבתים נסמן ב $m(\succ, h)$ את המיקום של בית h ביחס \succ . למשל, אם הבית "פנטהאוז" מדורג במקום השני לפי יחס ההעדפה \succ אז $m(\succ, \text{פנטהאוז}) = n - 1$.
- לכל הקצאה a , פרט i מקבל את הבית $a(i)$ שנמצא במיקום $m(\succ_i, a(i))$ ביחס ההעדפה שלו ותורם למשקל הכללי של ההקצאה את $p_{m(\succ_i, a(i))}$. סך הכול הניקודות שמקבלת ההקצאה a הינו $\sum_{i \in I} p_{m(\succ_i, a(i))}$ והשיטה בוחרת הקצאה הממקסמת סך זה.
- א. מהי ההקצאה שהשיטה הנ"ל תפיק בהתייחס לפרופיל שמתואר בטבלה בעמוד הקדם?
- ב. בהנחה שפרט 2 יכול למסור דירוג שונה מהעדפותיו האמתיות, ובהנחה שהפרטים האחרים ידווחו את האמת, הסבר מדוע כדאי לו לדווח על העדפות שונות מהעדפותיו האמתיות?