אגדות כלכליות/אריאל רובינשטיין/תשע"ג

פתרון תרגיל 1: מנגנוני הקצאה

נתונה קבוצה של פרטים I וקבוצה של בתים H.

מספר הפרטים ומספר הבתים שווה.

לכל פרט יחס העדפה (דרוג שלם) $\succ_i$ על קבוצת הבתים.

הקצאה היא פונקציה $a: I \to H$ חד-חד-ערכית ועל (דהיינו כל פרט מופנה לבית יחיד וכל בית נתפס עלי פרט אחד).

הקצאה a <u>יעילה פרטו</u> אם לא קיימת הקצאה <u>אחרת</u> b כך שלכל פרט i עבורו $b(i) \neq a(i)$ מתקיים ש- $b(i) \succ_i a(i)$.

במלים אחרות, הקצאה a <u>אינה יעילה פרטו</u> אם קיימת הקצאה <u>אחרת</u> b כך שלכל פרט i עבורו $b(i) \neq a(i)$ מתקיים ש- $b(i) \succ_i a(i)$.

פרופיל העדפות מציין את ההעדפה של כל פרט. למשל:

נניח ש- $I = \{1,2,3,4\}$ ו- $H = \{a,b,c,d\}$. נתבונן בפרופיל הבא:

	פרט 4	פרט 3	פרט 2	פרט 1
מקום 1	B	B	B	A
מקום 2	C	A	C	B
מקום 3	A	C	D	C
מקום 4	D	D	A	D

בפרופיל זה יחס ההעדפה של פרט 3 למשל הוא: $B \succ_3 A \succ_3 C \succ_3 D$.

<u>שיטת הקצאה</u> (לא רנדומית) היא פונקציה המתאימה הקצאה יחידה לכל פרופיל של יחסי העדפה.

ההקצאה $a(1)=D,\ a(2)=A,\ a(3)=C,\ a(4)=B$ אינה יעילה-פרטו כי בהקצאה

$b(1)=C,\ b(2)=D,\ b(3)=A,\ b(4)=B$ משתפר מצבו של כל פרט המקבל בית שונה מהבית שהוקצה לו לפי a.

שאלות פשוטות

1. הוכח שהקצאה אינה יעילה פרטו **אם ורק אם** יש קבוצת פרטים $\{i_1, \ldots, i_L\}$ כך שאם פרט i_l $(l > 1)$ יקבל את הבית שמחזיק i_{l-1} ובנוסף פרט i_1 יקבל את הבית שמחזיק i_L, אז כל הפרטים בקבוצה זו ייהנו.

<u>הוכחה:</u>

("אם") ראשית נוכיח שאם יש קבוצת פרטים כזו ההקצאה אינה יעילה:

נקרא להקצאה המקורית a ונגדיר הקצאה חדשה b כך שאם פרט אינו נמצא בקבוצה אז $b(i) = a(i)$ ואם הוא כן בקבוצה אז $b(i_l) = a(i_{l-1})$ לכל $l > 1$ ונגדיר $b(i_1) = a(i_L)$. יצרנו הקצאה חדשה b שהיא יותר טובה לכל פרט שקיבל בית שונה והיא (כמובן) זהה לכל פרט שלא השתנה לו הבית. מכיוון שהראנו שקיימת b שכזו, הקצאה a אינה יעילה פרטו.

("רק אם") כעת נוכיח שאם ההקצאה אינה יעילה אז יש קבוצת פרטים כזו:

אם ההקצאה אינה יעילה משמע שיש הקצאה אחרת b כך שכל הפרטים שעבורם $b(i) \neq a(i)$ מרוצים יותר. נסמן את אחד הפרטים שמקבל בהקצאה b בית אחר בתור "1". את הבית של 1 מ-a מקבל ב-b פרט אחר, נסמנו בתור 2. את הבית של 2 מקבל פרט אחר, נסמנו בתור 3 וכן הלאה. הקבוצה של הפרטים שמקבלים בתים שונים בהקצאות השונות היא סופית. לכן, באיזשהו שלב ייסגר מעגל כאשר אחד הפרטים מקבל ב-b את הבית שהיה ב-a של מספר 1. חברי המעגל הזה הם הקבוצה אותה חיפשנו, של פרטים המחליפים ביניהם בתים וכולם מרוצים מהחילוף.

2. בנה דוגמא חדשה של פרופיל יחסי העדפה והקצאה יעילה פרטו כך שאין זוג פרטים שמעוניינים להחליף את הבתים ביניהם.

<u>דוגמה:</u>

	פרט 3	פרט 2	פרט 1
מקום 1	פנטהאוז	וילה	וילה
מקום 2	וילה	פנטהאוז	ארמון
מקום 3	ארמון	ארמון	פנטהאוז

ההקצאה תהיה: 1 - ארמון; 2 – וילה; 3 – פנטהאוז.

נראה שאין זוג פרטים שמעוניין לבצע החלפה: 3 ו-2 מקבלים את העדיפות הראשונה שלהם, ולכן ברור שהם לא ירצו להחליף עם אף אחד. לכן, ל-1 אין עם מי להחליף גם כן כך שהאחר יהיה מרוצה. בסה"כ אין זוג שמעוניין לבצע החלפה.

ההקצאה יעילה כי בכל הקצאה אחרת, מצבו של 2 או 3 יורע.

לעומת זאת, נסתכל על הדוגמה הבאה בה תהיה הקצאה לא יעילה ובכל זאת לא יהיה אף זוג שמעוניין לבצע החלפה:

	פרט 3	**פרט 2**	**פרט 1**
מקום 1	פנטהאוז	וילה	ארמון
מקום 2	וילה	ארמון	פנטהאוז
מקום 3	ארמון	פנטהאוז	וילה

ההקצאה היא: 1 - פנטהאוז; 2 – ארמון; 3 – וילה.

ההקצאה הזו לא יעילה כי בהקצאה שבה שלושת הפרטים מחליפים את הבתים (1-ארמון; 2-וילה; 3-פנטהאוז) כולם יותר מרוצים. אבל בהקצאה הזו אין אף ***זוג*** שמעוניין לבצע החלפה (בדקו זאת).

שאלות פחות פשוטות

3. הוכח שבכל הקצאה יעילה יש פרט אחד שמקבל את הבית המועדף עליו ביותר.

הוכחה:

נניח שההקצאה יעילה, אבל שאין אף פרט שמקבל את הבית המועדף עליו ביותר. נבחר את אחד הפרטים, נקרא לו 1, ונאמר שהבית המועדף עליו ביותר נקרא a_1. כעת, נמצא את הפרט שקיבל בהקצאה את הבית הזה, ונקרא לו 2, ולבית שהוא הכי מעדיף נקרא a_2 וכן הלאה. הנחנו שאין אף פרט שמקבל את הבית המועדף עליו ביותר ולכן תמיד הפרט שמחזיק בבית המועדף ביותר יהיה פרט אחר. כלומר, נעבור בין הפרטים. אבל, מכיוון שהקבוצה סופית בסופו של דבר יווצר מעגל – כלומר, שנחזור לאחד הפרטים שכבר נתנו לו מספר. כעת, נשתמש בשאלה 1, ונחליף כמו בשאלה את הבתים בין הפרטים שבמעגל. יצרנו הקצאה אחרת שהיא עדיפה לכל הפרטים שהשתנה להם הבית, בסתירה לכך שההקצאה המקורית הייתה יעילה.

4. בשיעור דברנו על שיטת ההקצאה הבאה. נקבע סדרה שמציינת את הניקוד שמקבל בית לפי דירוגו $p_1 = n,\ p_2 = n-1 \ldots p_n = 1$.

לכל יחס העדפה $\succ$ על קבוצת הבתים נסמן ב $m(\succ, h)$ את המיקום של בית h ביחס $\succ$. למשל, אם הבית "פנטהאוז" מדורג במקום השני לפי יחס ההעדפה $\succ$ אז $m(\succ,\text{פנטהאוז}) = n-1$.

לכל הקצאה a פרט i מקבל את הבית $a(i)$ שנמצא במיקום $m(\succ_i, a(i))$ ביחס ההעדפה שלו ותורם למשקל הכללי של ההקצאה את $p_{m(\succ_i, a(i))}$. סך כל הנקודות שמקבלת ההקצאה a הינו $\sum_{i \in I} p_{m(\succ_i, a(i))}$, והשיטה בוחרת הקצאה הממקסמת סך זה.

א. מהי ההקצאה שהשיטה הנ"ל תפיק בהתייחס לפרופיל שמתואר בטבלה בעמוד הקודם?

נבחן את ערכם של הבתים בהתאם לפרופיל הדירוגים: A ו-B יכולים להיות שווים לכל היותר 4 כל אחד (A אם יינתן לפרט 1 ו-B אם יינתן ל-2,3 או 4), C שווה לכל היותר 3 (אם יינתן ל-2 או 4) ו-D יכול לתרום 2 נקודות (אם יינתן לפרט 2). כלומר, אם קיימת הקצאה שבה כל בית יוקצה כך שיתרום את ערכו המקסימלי, אז נגיע ל-13 נקודות.

נסתכל על הטבלה הבאה:

השורות מסמלות את הבתים, והעמודות את הפרטים. תא עם רקע צהוב מסמל שהבית באותה השורה מוקצה לפרט מהעמודה. הקצאה היא התאמה חד-חד-ערכית ועל בין הבתים לפרטים – לכן, הקצאה היא חוקית אם יש בדיוק תא אחד שמסומן בצהוב בכל שורה ובכל עמודה. למשל, בטבלה סימנו את ההקצאה A-1; B-2; C-3; D-4.

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

כעת, בכל תא נסמן את ערכו של הבית (השורה) אם מוקצה לפרט (העמודה) לפי הדירוג

	פרט 1	פרט 2	פרט 3	פרט 4
A	**4**	**1**	**3**	**2**
B	**3**	**4**	**4**	**4**
C	**2**	**3**	**2**	**3**
D	**1**	**2**	**1**	**1**

ההקצאה הטובה ביותר, אם היא אפשרית, תהיה כזו שבה כל בית יוקצה לפרט שמקנה לו את הדירוג המירבי האפשרי. כלומר, נרצה לסמן את הטבלה כך שבכל תא צהוב יהיה המספר המקסימלי באותה שורה, ויש רק דרך אחת לעשות זאת: את A נקצה ל-1 ואת D ל-2. כעת 2 תפוס ולכן C יוקצה ל-4, ואז 3 יקבל את B. כלומר, קיבלנו הקצאה יחידה והיא הטובה ביותר (וערכה אכן יהיה 13):

	פרט 1	פרט 2	פרט 3	פרט 4
A	**4**	**1**	**3**	**2**
B	**3**	**4**	**4**	**4**
C	**2**	**3**	**2**	**3**
D	**1**	**2**	**1**	**1**

ב. אם פרט 2 יכול למסור דירוג שונה מהעדפותיו האמתיות, ובהנחה שהפרטים האחרים ידווחו את האמת, הסבר מדוע כדאי לו לדווח על העדפות שונות מהעדפותיו האמיתיות?

<u>נסביר באמצעות דוגמה</u>: בהקצאה שמצאנו פרט 2 מקבל את D, העדיפות השלישית שלו. אבל אם ימסור את הדירוג השקרי $C \succ_2 B \succ_2 A \succ_2 D$ אז ההקצאה שתתקבל תהיה שהוא מקבל את C (שיפור!), 1 את A, 3 את B ו-4 את D. על פי הדירוג השקרי הציון הכולל השקרי הוא 13, על אף שעל פי הדירוג האמיתי הציון הכולל הוא 12 וזו למעשה הקצאה פחות טובה בהתבסס על השיטה שקבענו.