

אגדות כלכליות – אריאל רובינשטיין

פתרון מבחן, מועד א: תשע"ג

המבחן בספרים פתוחים, כל חומר לא אלקטרוני מותר לשימוש.

1. עשרה חברים לעבודה מתבקשים להביע דעתם מה הסכום המגיע להם בתמורה לעבודה שהשלימו.

ברור לכל שסכום מעל ל-100 אלף שקל אינו סביר. החברים מתכנסים וכל אחד מהם אמור להביע בתורו את דעתו על הסכום המגיע להם. הסכום יכול להיות כל כפולה של אלף שקלים. הסכום שישולם להם יהיה הסכום הנמוך ביותר מתוך הסכומים שינקבו על ידי החברים. כל חבר מעוניין שהקבוצה תקבל סכום גבוה ככל האפשר.

א. מצא שווי משקל פרפקטי למשחק. תאר את שווי המשקל בצורה מלאה.

שווי משקל פרפקטי אחד לדוגמה הוא שהאסטרטגיה של השחקן הראשון היא להציע 100 אלף, ושל כל אחד מהיתר היא להציע הצעה זזה להצעה של קודמו.

אם שחקן מציע הצעה שזזה להצעת קודמו, הוא מביח בכך שהוא לא מוריד את הסכום שתקבל הקבוצה, לכן זו תגובה טובה ביותר שלו כאשר מגיע תורו, ולא חשוב מה היו הצעות קודמיו (כלומר, השחקן מגיב בצורה טובה ביותר בכל סיטואציה שבה יצטרך להחליט). לכן, התגובה הטובה ביותר של השחקן הראשון להתנהגות זו של היתר היא להציע 100 אלף, כי כל מספר אחר יקטין את הסכום שיקבלו.

ב. מצא שווי משקל פרפקטי נוסף של המשחק.

שווי משקל פרפקטי נוסף הוא שהאסטרטגיה של כל שחקן היא להציע 100 אלף ללא תלות בפעולות השחקנים שלפניו. שהרי הצעה של 100 אלף בהכרח אינה מורידה את הסכום שתקבל הקבוצה ולכן היא תגובה טובה ביותר עבור כל היסטוריה סופית של המשחק.

ג. הראה שלמשחק יש תוצאת שווי משקל פרפקטי יחידה. הוכח טענתך.

תוצאת שיווי המשקל הפרפקטי היחידה היא שכל חבר מציע בתורו 100 אלף, והחברים מקבלים 100 אלף.

נניח שיש שווי משקל עם תוצאה אחרת. אזי יש לפחות היסטוריה אחת אחרת שחקן נוקב במספר שאינו גבוה מכל המספרים שהוזכרו קודם (לגבי שחקן 1 מדובר במספר נמוך מ-100). נתבונן בשחקן בעל המספר הגבוה ביותר שנוקב מספר X נמוך מכל המספרים שהוזכרו קודם Y . אם ינקוב במספר X השחקנים הבאים לא ינקבו במספר נמוך יותר, והוא יקבל X . אם ינקוב במספר Y כל הבאים בתור ינקבו במספר שאינו נמוך מ- Y ולכן הוא יקבל Y שהוא מספר גדול יותר. בסתירה לכך שמדובר בשווי משקל פרפקטי.

ד. הנח עתה שהשחקנים מביעים את דעתם באופן סימולטני. אפיין את שיווי המשקל של נאש במשחק זה.

שווי המשקל של נאש הם כל פרופילי הפעולות שבהם לפחות שני שחקנים מביעים דעה זזה ונמוכה ביותר מבין 10 הדעות: נניח ששני שחקנים שמביעים את הדעה הנמוכה ביותר הם 1 ו-2 (בלי הגבלת הכלליות). לאף שחקן אין פעולה שתשפר את מצבו כי הסכום עדיין ייקבע לפי דעתו של 1 או 2, ואילו דעה נמוכה יותר תוביל לתשלום נמוך יותר. אם יש רק שחקן אחד שמביע דעה נמוכה ביותר, אז זה לא ש"מ נאש כיוון שאם שחקן זה יביע דעה גבוהה יותר, אז התשלום יגדל.

2. קבוצה של לפחות 3 פרטים מתחרים בתחרות זריקת כדור ברזל. כל אחד מהמתחרים ישיג תוצאה ובסוף התחרות יוכרזו המשתתפים שיקבלו אותות הצטיינות. בשאלה זו נדון בכללים לחלוקת אות הצטיינות. הנח שלא ייתכן ששני פרטים ישיגו את אותה תוצאה. כלל צריך לקבוע מיהם המשתתפים המצטיינים בהינתן שמשתתף 1 השיג תוצאה x_1 , משתתף 2 השיג תוצאה x_2 וכו'.

להן רשימה של תכונות שהכלל עשוי לקיים:

A. שוויון בין המשתתפים: מלכתחילה הכלל מתייחס לכל המשתתפים באופן זהה.

B. מונוטוניות: משתתף שקבל את האות יקבל את האות גם אם הישגו השתפר והישיג יריביו לא השתפרו.

C. אי תלות: אם פרט מסוים שהישגו היה x לא קיבל את האות כאשר אחד המתחרים האחרים קיבל את הפרס והישיג תוצאה y , אז הוא לא יקבל את האות בכל פרופיל תוצאות אחר בו הוא השיג x ואותו חבר השיג y .

D. תמיד מחלקים לפחות פרס אחד.

E. תמיד יש מישהו שלא מקבל פרס.

א. הצע שיטה לחלוקת אותות שתקיים את כל התכונות.

השיטה: מקבל את האות מי שהשיג את התוצאה הגבוהה ביותר.

השיטה מקיימת את כל התכונות: מכיוון שהזוכה באות נקבע לפי התוצאות בלבד ומכיוון שהנחנו שהתוצאות שונות אז תנאים A, D ו-E מתקיימים. תכונה B (מונוטוניות) מתקיימת כיוון שאם מישהו קיבל את האות משמע שהוא היה בעל התוצאה הגבוהה ביותר, ואם הישגו השתפר ושל יריביו לא השתפרו, הוא עדיין יהיה בעל התוצאה הגבוהה ביותר. תכונה C (אי תלות) מתקיימת כיוון שאם פרט אחד לא קיבל את האות ומישהו אחר קיבל, משמע שלאחר תוצאה גבוהה יותר, ולכן בכל פרופיל אחר בו הם שמרו על תוצאות אלה הפרט האחד לא יהיה בעל התוצאה הגבוהה ביותר.

ב. לכל אחת מחמש התכונות, הצע כלל שאינו מקיים תכונה זו (הסבר בפרוטרוט מדוע) אך מקיים את ארבע התכונות האחרות (אין צורך להסביר זאת).

A. שוויון בין המשתתפים – הכלל: מקבל את האות שחקן מספר 1.

הכלל אינו מקיים את תכונת השוויון בין המשתתפים כיוון שאם שחקן 1 מקבל את האות בפרופיל מסוים ו-5 לא, ופרופיל אחר זהה לו פרט לכך שהתוצאות של 1 ו-5 התהפכו, עדיין 1 יקבל את האות ו-5 לא.

B. מונוטוניות – הכלל: מקבל את האות זה שהשיג את התוצאה הנמוכה ביותר.

הכלל אינו מקיים את תכונת המונוטוניות כיוון שאם בפרופיל מסוים שחקן 3 השיג את התוצאה הנמוכה ביותר ולכן זכה באות, ואילו בפרופיל אחר יריביו שמרו על תוצאותיהם ואילו הוא שיפר את תוצאתו אל מעל לשל יריביו, הוא לא יקבל את האות.

C. אי תלות – הכלל: מקבל את האות כל מי שהשיג את התוצאה הטובה ביותר או את השנייה הטובה ביותר.

הכלל אינו מקיים את תכונת אי התלות, כיוון שאם התוצאות של שלושה שחקנים הן (10,9,8) אז שחקנים 1 ו-2 יקבלו את האות ו-3 לא יקבל את האות. אך בפרופיל (5,9,8) שחקן 3 ו-2 מקבלים את אותן התוצאות כמו בפרופיל המקורי, אך שחקן 3 כן מקבל את האות.

D. תמיד מחלקים לפחות פרס אחד – הכלל: אף אחד לא מקבל פרס.

מובן מדוע התנאי אינו מתקיים. התנאים של מונוטוניות ואי תלות מתקיימים במובן הריק (הרישא לעולם לא מתקיימת).

E. תמיד יש מישהו שלא מקבל פרס – הכלל: כולם מקבלים את הפרס.

מובן מדוע התנאי אינו מתקיים. תנאי המונוטוניות מתקיים בצורה טריוויאלית (הסיפא תמיד מתקיימת) ותנאי האי-תלות מתקיים במובן הריק (הרישא לעולם לא מתקיימת).

ג. (לבית, אבל אשמח אם תנסה) נסה להוכיח שהשיטה שהצעת ב-א היא היחידה המקיימת את 5 התכונות.

נניח ששיטה כלשהי מקיימת את כל התכונות.

טענה 1: בכל פרופיל מקבלים את האות מספר מסוים של בעלי התוצאות הגבוהות.

נניח בשלילה שבפרופיל מסוים פרט 1 קיבל את האות עם תוצאה נמוכה משל פרט 2 ואילו 2 לא קיבל את האות. אם נשנה את פרופיל התוצאות כך שנחליף בין תוצאות השחקנים 1 ו-2 (נעלה את תוצאתו של 1 ונוריד את התוצאה של 2), ממונוטוניות (B) נובע ש-1 יקבל את האות בפרופיל החדש. מתכונה A נובע ש-2 צריך לקבל את האות בפרופיל המקורי, וקיבלנו סתירה.

טענה 2: בכל פרופיל, בעל התוצאה הגבוהה ביותר מקבל את האות, ובעל התוצאה הנמוכה ביותר לא מקבל אות.

אם יש פרופיל בו בעל תוצאה גבוהה ביותר אינו מקבל את הפרס, אז מתכונה D יש מקבל תוצאה אחרת המקבל את הפרס. מכיוון שהתוצאות שונות לפי הנחה, משמע שהשיגו נחות ונקבל סתירה לטענה 1. בצורה דומה בעזרת תכונה E, נסיק שבעל התוצאה הנמוכה ביותר אינו מקבל אות.

טענה 3: שחקן אינו זכאי לאות אם קיים שחקן אחר עם תוצאה גבוהה יותר.

לכל שתי תוצאות $x < y$, נבנה פרופיל שבו x היא התוצאה הנמוכה ביותר, ו- y הגבוהה ביותר, ולכן בעל התוצאה x לא זכאי לאות ובעל התוצאה y כן זכאי. לפי תכונה C בכל פרופיל אחר שבו אלה תוצאותיהם של השחקנים, בעל התוצאה x לא זכאי לאות.

מסקנה: מטענות 2 ו-3 נובע שמקבל את האות השחקן שהשיג את התוצאה הטובה ביותר.